



## Inversão de Velocidades Intervalares via Dix, SVD e Entropia Relativa Mínima

Valter Marques dos Santos Neto, IGEO/UFBA  
Amin Bassrei, IF/UFBA e CPGG/UFBA

Copyright 2009, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 11<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, August 24-28, 2009.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 11<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

### Abstract

The determination of interval velocities is an ultimate goal in exploration seismology, either as a final product or a input for some procedure in seismic data processing, like migration. In this work we compare the interval velocities obtained by using seismic processing packages with the Dix equation and by an inverse problem approach via singular values decomposition (SVD) and by the minimum relative entropy (MRE). The three approaches provided results equivalent to those obtained with processing packages, although MRE gives the best estimate of the interval velocities when compared to Dix and SVD.

### Introdução

A obtenção do campo de velocidades intervalares é de fundamental importância no processamento de dados sísmicos. A velocidade intervalar corresponde à velocidade de propagação do pulso sísmico em um dado material ou camada geológica. Uma vez obtida, a estimativa precisa do campo de velocidades intervalares nos permite caracterizar o meio analisado além de garantir resultados mais confiáveis e que podem abranger outras partes do processamento de dados sísmicos a exemplo da correção NMO e migração.

Nos pacotes de processamento de dados sísmicos, as velocidades intervalares são obtidas a partir das velocidades RMS através da utilização da fórmula de Dix (1955). Uma abordagem alternativa para obtenção das velocidades intervalares é a formulação e solução do problema inverso correspondente. A inversão de velocidades intervalares é uma abordagem que se mostra bastante eficiente e que possui algumas vantagens quando comparada ao método convencional usando a fórmula de Dix, a exemplo da possibilidade de incorporação de informação a priori ou prévia ao processo. Esse trabalho apresenta duas abordagens envolvendo a inversão de velocidades intervalares. A aplicação da decomposição por valores singulares na obtenção do operador de inversão e a utilização do conceito da entropia relativa mínima se mostram alternativas viáveis e robustas para o processo de

obtenção de velocidades intervalares mais precisas e confiáveis a partir dos campos de velocidades RMS.

### Formula de Dix

A fórmula de Dix (1955) foi deduzida a partir de um modelo de camadas homogêneas e interfaces planas para o cálculo de velocidades intervalares e espessura das camadas por meio da velocidade RMS. Ela é expressa como:

$$v_j^2 = \frac{T_j V_{RMS}^2(T_j) - T_{j-1} V_{RMS}^2(T_{j-1})}{T_j - T_{j-1}}, \quad (1)$$

onde  $v_j$  é a velocidade intervalar na camada  $j$ ,  $T_j$  é o tempo duplo de trânsito até a interface  $j$  considerando afastamento nulo entre fonte e receptor, e  $V_{RMS}$  é a velocidade RMS.

### Decomposição por Valores Singulares

O conceito de inversa generalizada foi desenvolvido por Moore e posteriormente por Penrose (1955). Uma maneira usual de obter a inversa generalizada, também chamada de pseudo-inversa é através da decomposição de valores singulares (SVD). A SVD consiste em uma técnica de decomposição matricial que permite a fácil obtenção da matriz inversa em casos onde a matriz envolvida no problema é não quadrada, possui posto incompleto ou é mal condicionada. O resultado obtido é a matriz inversa generalizada, pseudo-inversa ou matriz de Moore-Penrose ( $G^+$ ), que se trata de uma generalização da matriz inversa ( $G^{-1}$ ) no caso onde a matriz envolvida no problema é quadrada e de posto completo, podendo substituir a matriz inversa na obtenção de parâmetros para modelos geofísicos via solução do problema inverso (Hatton, 1986). A decomposição consiste em decompor  $G_{M \times N}$  de modo que:

$$G = U \Sigma V^T, \quad (2)$$

onde  $U_{M \times M}$  é a matriz que contém os vetores ortonormais da matriz  $GG^T$ ,  $\Sigma_{M \times N}$  é a matriz que contém os valores singulares, a raiz quadrada dos autovalores da matriz  $G^T G$ , e  $V_{N \times N}$  é a matriz formada pelos vetores ortonormais da matriz  $G^T G$ .

Desta forma, facilmente obtemos a pseudo-inversa da matriz  $G$  segundo a equação:

$$G^+ = V \Sigma^+ U^T, \quad (3)$$

sendo  $G^+$  a matriz inversa generalizada ou pseudo-inversa; e  $\Sigma^+$  a matriz formada pelo inverso dos valores singulares da matriz  $G^T G$  de modo que:

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

onde  $E$  é a matriz diagonal que contem o recíproco dos valores singulares de  $G$  na diagonal principal, isto é,  $e_{ii} = \sigma_i^{-1}$ .

### Entropia Relativa Mínima

O princípio da entropia relativa mínima é um conceito generalizado a partir do princípio da máxima entropia proposta por Jaynes (1957), um conceito de fundamental importância no desenvolvimento da teoria da informação. Vamos levar em consideração problemas que podem ser descritos através da integral de primeira espécie discreta de Fredholm:

$$d_j = \sum_{n=0}^N G_j \bar{m}(n), \quad j = 1, \dots, M \quad (5)$$

onde  $d_j$  é o dado,  $G_j$  as funções Kernel do modelo e  $\bar{m}(n)$  as estimativas dos parâmetros do modelo.

A entropia relativa para o caso contínuo é definida como:

$$H(q,p) = \int q(m) \log \frac{q(m)}{p(m)} dm, \quad (6)$$

de modo que  $H$  é a entropia relativa,  $q(m)$  é a função densidade de probabilidade posterior e  $p(m)$  a função densidade de probabilidade prévia ou a priori. Segundo Shore and Johnson (1980) o objetivo na entropia relativa mínima é encontrar uma estimativa final  $q$  de tal forma que:

$$H(q,p) = \min H(q',p), \quad (7)$$

onde  $q'$  é a função densidade de probabilidade verdadeira. De posse das equações acima e consideração algumas condições tais como:

$$\int_0^{\infty} q(m) dm = 1, \quad (8)$$

e

$$\int_0^{\infty} q(m) m(n) dm = \bar{m}(n), \quad (10)$$

além de uma função densidade de probabilidade a priori adequada de acordo com o que foi proposto por Shore (1981), de forma que:

$$p(m) = \prod_{n=0}^N \frac{1}{s(n)} e^{-\frac{m(n)}{s(n)}}, \quad (11)$$

onde  $s(n)$  é a informação a priori na mesma dimensão física do modelo, podemos então construir a função objetivo para a entropia relativa mínima:

$$\Phi(m) = \int_0^{\infty} q(m) \log \left[ \frac{q(m)}{p(m)} \right] dm + \mu \left( \int_0^{\infty} q(m) dm - 1 \right) + \sum_{j=1}^M \lambda_j \left[ \int_0^{\infty} q(m) \sum_{n=0}^N G_j(n) m(n) dm - d_j \right]. \quad (12)$$

de forma que  $\mu$  e  $\lambda_j$  são os multiplicadores de Lagrange definidos a partir do problema da minimização com restrições. Da minimização da função objetivo é possível obtermos:

$$\bar{m}(n) = \frac{1}{\frac{1}{s(n)} + \sum_{j=1}^M \lambda_j G_j(n)}, \quad n = 0, \dots, N. \quad (11)$$

Deste modo o sistema fica formulado em termos da MRE onde a solução do problema, agora não linear, se resume em encontrar os multiplicadores de Lagrange.

### Metodologia

Foram utilizadas três metodologias para obtenção do campo de velocidades intervalares a partir das velocidades RMS. A primeira metodologia foi a aplicação da fórmula de Dix para obtenção de velocidades intervalares mediante a construção de um programa na linguagem FORTRAN90 em dados de velocidade RMS. Essa metodologia foi aplicada em um exemplo sintético e posteriormente a um dado real com a finalidade de validar a utilização da fórmula de Dix. No caso da aplicação em dado real, o objetivo foi comparar o campo de velocidades intervalares obtido pelo programa FORTRAN com campo de velocidades intervalares proveniente do software FOCUS versão 5.3 da Paradigm Geophysical.

A segunda metodologia aplicada aos dados de velocidade RMS foi utilização da SVD na teoria de inversão para obter o campo de velocidades intervalares. Esta abordagem consiste em tratar a obtenção do campo de velocidades intervalares como a solução de um problema inverso. A exemplo da integral de Fredholm, na

Geofísica, a formulação do problema direto clássico em notação vetorial é:

$$\mathbf{d} = \mathbf{G} \mathbf{m}, \quad (12)$$

onde  $\mathbf{d}$  é o vetor de dados observados,  $\mathbf{m}$  é o vetor de parâmetros do modelo, e  $\mathbf{G}$  a matriz que relaciona os dados observados com os parâmetros do modelo (matriz Kernel). No nosso caso (Bassrei, 1990), temos que:

$$d_j = T_j V_{RMS}^2(T_j), j = 1, \dots, M, \quad (13)$$

e

$$m_i = v_i^2, i = 1, \dots, N. \quad (14)$$

O campo de velocidades intervalares pode ser obtido a partir das velocidades RMS via solução do seguinte problema inverso:

$$\mathbf{m} = \mathbf{G}^+ \mathbf{d}, \quad (13)$$

sendo  $\mathbf{G}^+$  a matriz inversa generalizada obtida via SVD.

A terceira metodologia usada foi à solução do problema inverso usando a abordagem MRE. Essa abordagem usa um formalismo próximo do formalismo da abordagem SVD, principalmente no que tange a dimensão e natureza adotada aos parâmetros e dados do modelo. Esse mecanismo de solução do problema utiliza a MRE para obter o campo de velocidades intervalares, a estimativa dos parâmetros do modelo, a partir das velocidades RMS do modelo, os dados do modelo (Ulrych et al., 1990). Segundo a abordagem MRE, utilizando as equações 5 e 11, nosso problema passa a ser formulado da seguinte forma:

$$d_j = \sum_{n=0}^N G_j \frac{I}{\frac{I}{s(n)} + \sum_{j=1}^M \lambda_j G_j(n)}, \quad j = 1, \dots, M \quad (14)$$

onde a solução do problema não linear depende exclusivamente de encontrarmos os multiplicadores de Lagrange. Os multiplicadores Lagrange são encontrados através do método de Newton-Raphson, uma vez encontrados são substituímos na equação 11 para a obtenção das velocidades intervalares.

### Aplicação em Dados Sintéticos

A aplicação em dados sintéticos consistiu na construção de um modelo geológico de subsuperfície e aplicação das metodologias com finalidade de verificação e validação. O modelo, construído por intermédio de um programa FORTRAN, consiste em um meio geológico formado por vinte e três camadas homogêneas e isotrópicas, com interfaces planas e horizontais. No

modelo foram fixadas as velocidades intervalares e RMS de cada camada. A partir do modelo, foram aplicadas as três metodologias (Dix, SVD e MRE) para obtenção das velocidades intervalares que posteriormente foram comparadas com as velocidades do modelo. Os resultados envolvendo dados sintéticos foram satisfatórios, demonstrando que a fórmula de Dix não oferece uma boa estimativa de velocidades intervalares a partir das velocidades RMS. Na primeira etapa da aplicação em dados sintéticos a SVD obteve resultados muito bons quando comparados aos resultados da aplicação da fórmula de Dix. Os resultados envolvendo a MRE foram ligeiramente melhores que os resultados obtidos pela SVD.

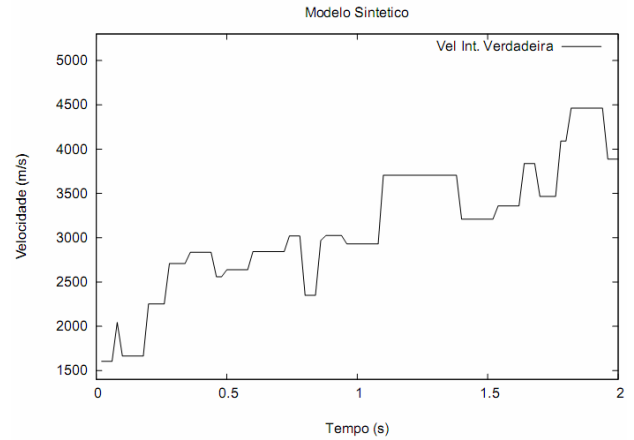


Figura 1: Modelo verdadeiro

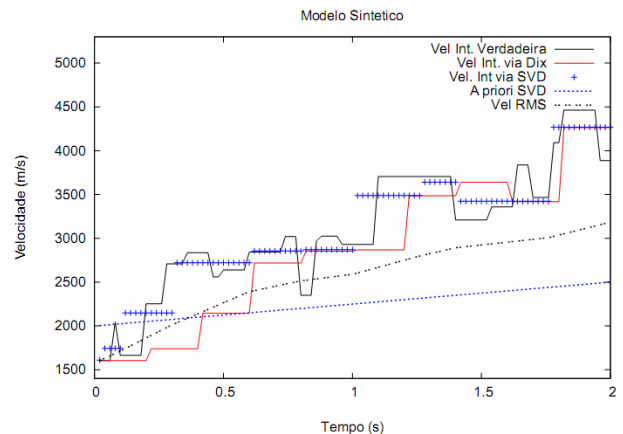
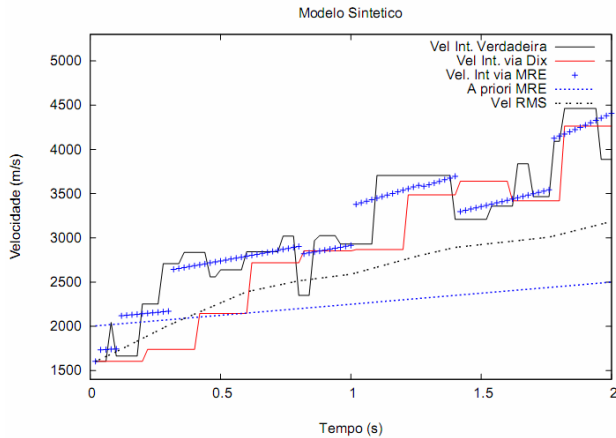


Figura 2: Quadro comparativo entre as velocidades intervalares obtidas pela fórmula de Dix e pela SVD.



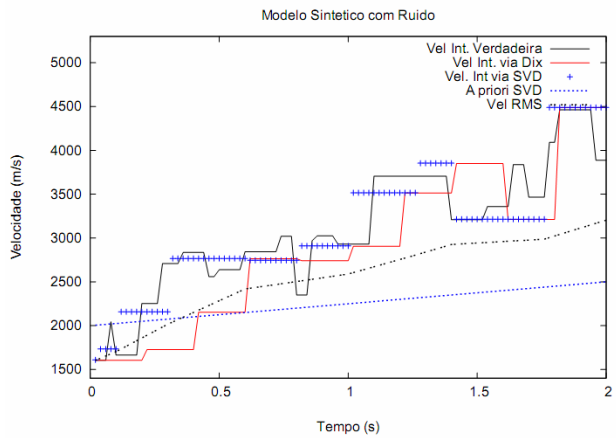
**Figura 3:** Quadro comparativo entre as velocidades intervalares obtidas pela fórmula de Dix e pela MRE.

Método	Erro RMS (%)
Dix	14.46
SVD	7.92
MRE	7.64

**Tabela 1:** Tabela de erros entre as velocidades intervalares calculadas e as velocidades reais do modelo.

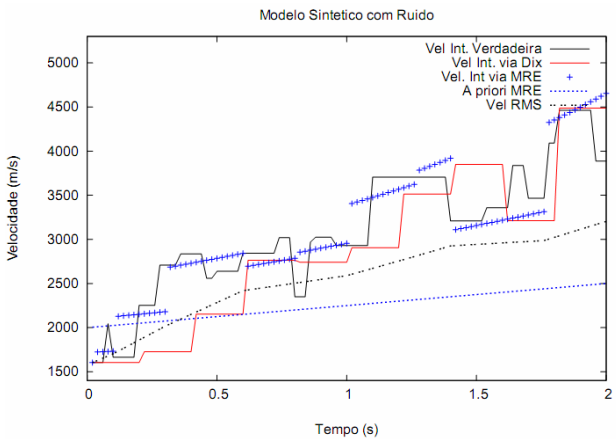
Método	Erro RMS (%)
Dix	15.65
SVD	9.01
MRE	8.78

**Tabela 2:** Tabela de erros entre as velocidades intervalares calculadas e as velocidades reais do modelo contaminado com ruído Gaussiano a 1.4%.



**Figura 4:** Quadro comparativo entre as velocidades intervalares obtidas pela fórmula de Dix e pela SVD em modelo contaminado com ruído Gaussiano a 1.4%.

As figuras mostram que de todas as formas os resultados obtidos através da SVD e MRE foram melhores que os resultados provenientes da utilização da fórmula de Dix. O grande diferencial das abordagens SVD e MRE em relação a Dix é a possibilidade de incorporação de informações a priori no processo de obtenção das velocidades intervalares. Nesse modelo, para ambas as abordagens, adotamos o mesmo a priori. O a priori utilizado possui a mesma dimensão das velocidades intervalares do modelo e é linearmente crescente. O erro entre o a priori utilizado e o modelo verdadeiro é de 32.5% (erro RMS) para todos os casos. A abordagem SVD obteve resultados bons apresentando praticamente metade do erro (7.92%) obtido pela fórmula de Dix. Os resultados obtidos pela MRE foram ligeiramente melhores que os resultados obtidos pela SVD, apresentando erro de 7.64%. A abordagem MRE possui maior potencial de resultados pelo fato de ser mais sensível a informações a priori. Os resultados obtidos pela MRE não foram ainda melhores devido à natureza simples da informação a priori escolhida. Posteriormente fizemos a contaminação dos dados do modelo com ruído Gaussiano a 1.4%. Na parte envolvendo adição de ruído ao dado, ambas as técnicas (SVD e MRE) se mostraram robustas e estáveis à contaminação dos dados por ruído.



**Figura 5:** Quadro comparativo entre as velocidades intervalares obtidas pela fórmula de Dix e pela MRE em modelo contaminado com ruído Gaussiano a 1.4%.

**Aplicação em Dados Reais**

Na etapa de aplicação das metodologias em dados reais, foram utilizados dados de uma linha sísmica no formato SEG-Y proveniente de um levantamento marítimo realizado na bacia de Jequitinhonha no sul da Bahia, e que faz parte do acervo de dados do CPGG-UFBA. O processamento básico composto por etapas fundamentais de preparação dos dados (geometria, edição, mute dos traços), filtragem usando filtro de frequência e análise de velocidade foi feita utilizando o

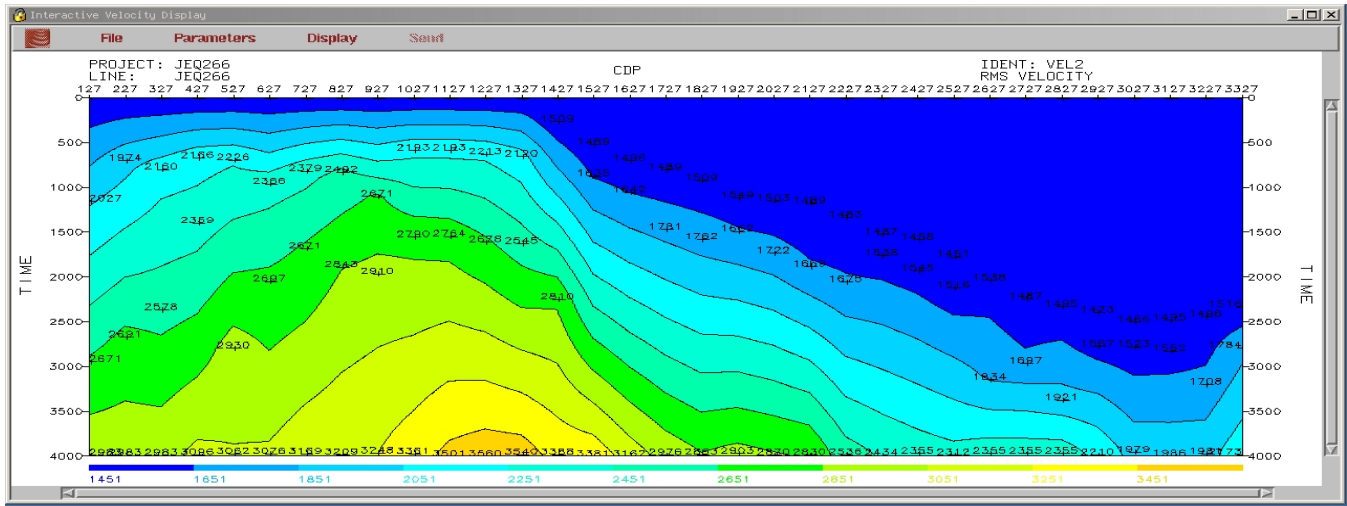


Figura 6: Campo de Velocidades RMS do FOCUS.

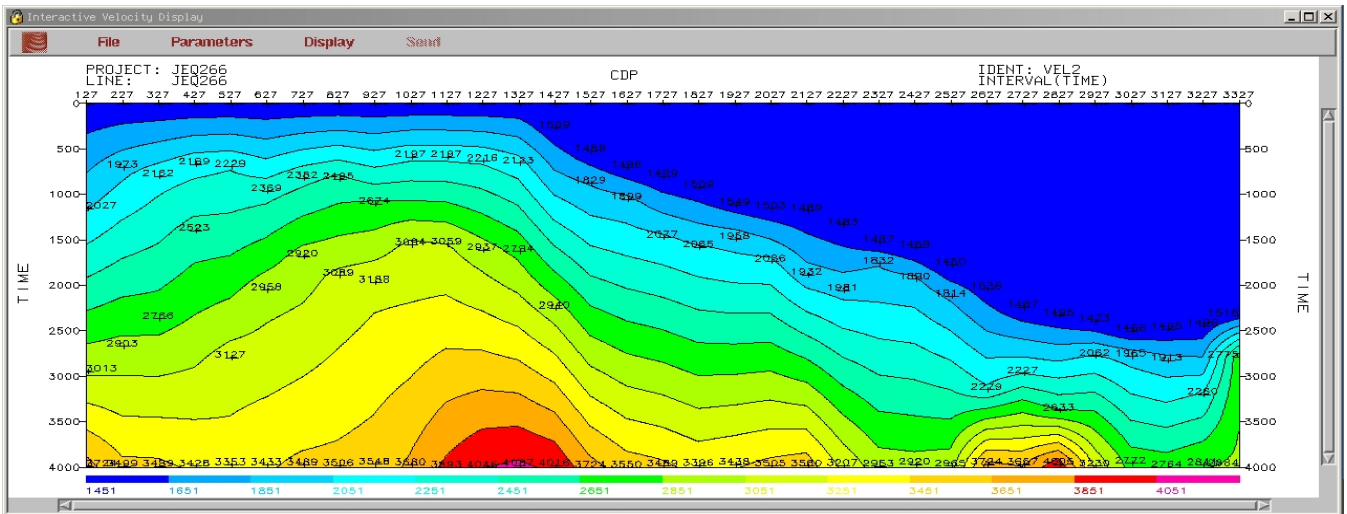


Figura 7: Campo de Velocidades intervalares do FOCUS.

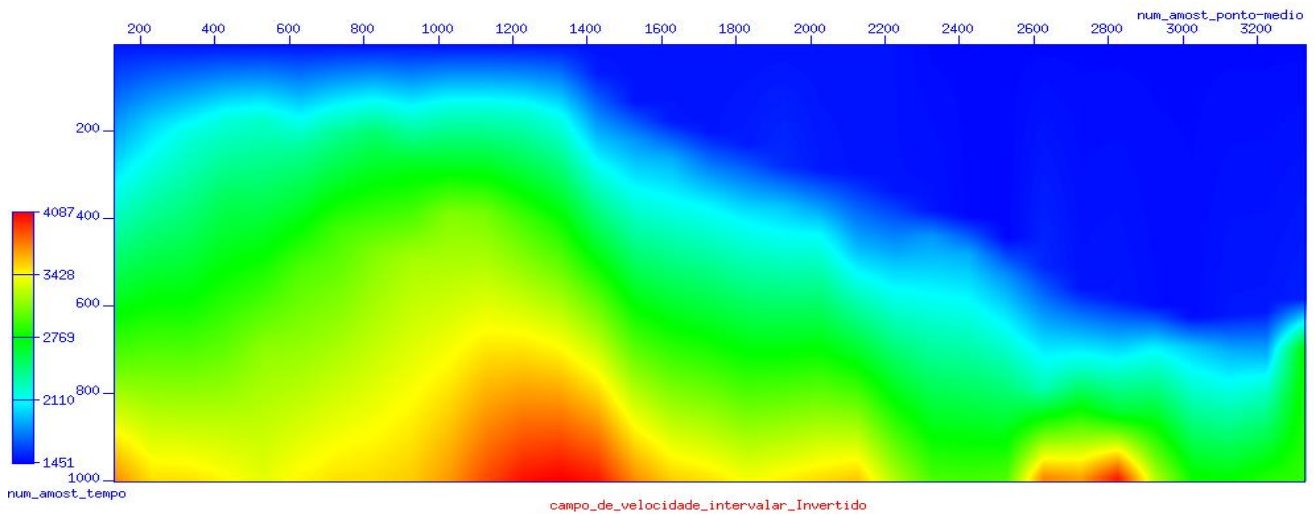


Figura 8: Campo de Velocidades intervalares obtido via Dix e SVD

software FOCUS da Paradigm Geophysical. Após a etapa de análise de velocidade foi possível obter o campo de velocidades RMS e intervalar do dado. A Figura 6 mostra o campo de velocidades RMS obtido pelo FOCUS. A etapa posterior foi utilizar o campo de velocidades RMS proveniente da análise de velocidades no FOCUS com dado de entrada no programa FORTRAN para obtenção do campo de velocidades intervalares mediante a fórmula de Dix, para fins comparativos, e via solução do problema inverso com uso da SVD. A etapa de aplicação das metodologias aos dados reais ainda não incluiu a utilização da MRE, que será dentre em breve aplicada aos dados reais incluindo a utilização de perfis sísmicos como estimativa a priori para os dados reais tanto na aplicação da MRE como da SVD. A Figura 7 mostra o campo de velocidades intervalares obtido pelo FOCUS. O resultado obtido com campo de velocidades proveniente da solução do problema inverso usando a SVD, sem a incorporação de informação a priori, foi o mesmo resultado obtido usando a fórmula de Dix que por sua vez foi o mesmo apresentado pelo FOCUS (Figura 8). Esse resultado proveniente da utilização da SVD aplicada a dados reais é de fundamental importância para a validação de sua utilização como forma de obtenção do campo de velocidades intervalares. As etapas de correção NMO (usando o campo obtido via inversão) e empilhamento foram efetuadas no Seismic Unix.

### Conclusões

Os resultados obtidos mostraram confirmarão a utilização da fórmula de Dix pelos pacotes de processamento de dados sísmicos para obtenção das velocidades intervalares a partir do campo de velocidades RMS. A aplicação do conjunto de metodologias propostas nesse trabalho em dados sintéticos mostrou a deficiência dos resultados provenientes da utilização da fórmula de Dix para obtenção de velocidades intervalares. As abordagens SVD e MRE se mostraram mais precisas e robustas quando comparadas aos resultados provenientes da utilização da fórmula de Dix. A principal vantagem na aplicação da formulação do problema inverso usando a SVD e a MRE na obtenção de velocidades intervalares é a possibilidade de incorporação de informações a priori no processo de inversão. A abordagem utilizando a MRE se mostrou mais sensível à utilização de informação prévia (a priori), possuindo maior potencial de resultados principalmente quanto a sua aplicação em dados reais. A utilização desse tipo de informação consiste, por exemplo, na utilização de dados de perfis como o sísmico e densidade como ponto de partida do processo de inversão, o que resulta na obtenção de estimativas mais confiáveis a respeito das velocidades intervalares. Esses resultados são relevantes principalmente ao levar-se em consideração o potencial da utilização desses tipos de abordagem em problemas relacionados sísmica de reflexão.

### Agradecimentos

Os autores agradecem ao LAGEP/CPGG/UFBA pela utilização dos recursos computacionais, à Paradigm Geophysical pela licença educacional do FOCUS, à FINEP e à PETROBRAS pelo suporte financeiro na Rede Cooperativa NNE em Geofísica de Exploração (Rede 01 - Fase II). V. M. Santos Neto agradece à SBGf pela bolsa de graduação. A. Bassrei agradece ao CNPq pelos projetos 484.239/2006-6 (Edital Universal MCT/CNPq 02/2006) e 308.875/2007-9 (bolsa de pesquisa).

### Referências

- Bassrei, A., 1990. Inversão de Dados Geofísicos Unidimensionais através da Entropia Relativa Mínima, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia.
- Dix, C. H., 1955, Seismic velocities from surface measurements, *Geophysics*, 20, 68-86.
- Hatton, L., Worthington, M. H. & Making, J., 1986, *Seismic Data Processing*, Blackwell, Oxford.
- Jaynes, E. T., 1968, Information theory and statistical mechanics, *Physical Review*, 106, 620-630.
- Penrose, R., 1955. A generalized inverse for matrices, *Proceedings of The Cambridge Philosophical Society*, 51, 406-413.
- Shore, J. E and Johnson, R. W., 1980. Axiomatic derivation of the principle of minimum cross-entropy. *IEEE Transactions on Information Theory* IT-26, 26-37.
- Shore, J. E., Minimum cross-entropy spectral analysis. *IEEE Transactions on Acoustic Speech and Signal Processing* ASSP-29, 230-237.
- Ulrych, T. J., Bassrei, A. & Lane, M. 1990. Minimum relative entropy inversion of one-dimensional data with applications. *Geophysical Prospecting*, 38: 465-487.