

Modelagem Sísmica de Tempos de Trânsito de Reflexão em Interface Parabólica

Marcos Rogério L. Teles, CPRM, Serviço Geológico do Brasil, Superintendência de Recife, PE, Brasil
Wilson M. Figueiró, CPGG, Universidade Federal da Bahia, Salvador, BA, Brasil

Copyright 2009, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 11th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, August 24-28, 2009.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 11th International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

The present work makes an approach of the direct problem in seismic. The central objective is the generation of traveltimes of reflected rays that: are originated in sources positioned in the surface of observation, cross an isotropic medium (homogeneous and heterogeneous), are reflected by a parabolic interface, and come back to the observation surface. In brief: it is made a reflection traveltimes modeling for two-dimensional isotropic media with parabolic reflector interface.

Introdução

O método sísmico faz uso das propriedades elasto-acústicas para imagear a subsuperfície terrestre. Um procedimento básico da sísmica consiste em causar uma perturbação no meio, gerar uma onda elasto-acústica, e registrar o tempo de retorno desta onda à superfície, seja por: reflexões, refrações, difrações, ou conversões sofridas no interior do meio sísmico.

Através de informações "a priori", constrói-se um modelo. Em seguida, faz-se a escolha de uma técnica, dentre várias existentes, capaz de fornecer os parâmetros que definem o modelo proposto, usando dados observados.

Por modelagem direta entende-se a resolução do problema direto, que consiste na obtenção de dados sintéticos (calculados) para um determinado modelo. A estratégia adotada de modelagem é puramente geométrica e cinemática para modelos homogêneos, e de traçamento numérico de raios para meios heterogêneos utilizando-se as equações do raio (Cerveny, 1987 e Figueiró, 1994).

Traçamento de Raios Sísmicos e Cálculo dos Tempos de Trânsito

Apresenta-se, aqui, a formulação teórica necessária ao cálculo de tempos de transito de ondas sísmicas, que se propagam em meios isotrópicos bidimensionais e são refletidas em interfaces. Tal formulação depende do modelo geológico adotado, do sistema de aquisição e de técnicas de traçamento de raios.

Dois modelos são considerados: um homogêneo e outro heterogêneo. Ambos isotrópicos e dotados de uma interface refletora parabólica, $h(x)$. No primeiro caso, uma estratégia geométrica permite resolver analiticamente o problema de traçar trajetórias de raios que unem dois pontos dados (um fonte S e um receptor R) e que são (entre eles) refletidas em $h(x)$. No segundo, utiliza-se as equações do raio (Cerveny, 1987) para o traçamento numérico do raio, onde somente a posição da fonte e uma direção estão fixadas.

Modelo Isotrópico Homogêneo

A função $h(x)$ descreve um refletor parabólico, representado no modelo mostrado da Figura 1, seus parâmetros a , b , e c caracterizam a geometria da interface refletora e podem ser variados de modo a alterar a profundidade, o posicionamento horizontal, a suavidade, a curvatura e a concavidade da interface refletora. A função $u^2(x, z)$ representa o quadrado da vagarosidade no meio.

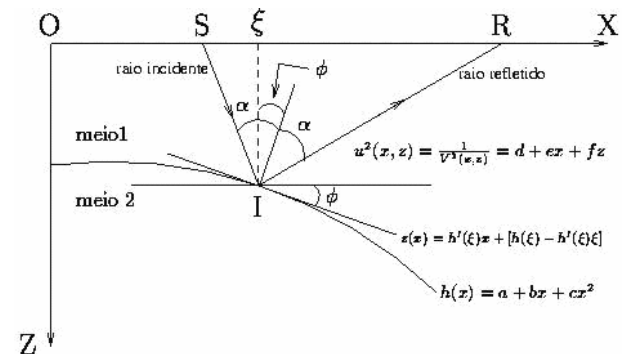


Figura 1: Trajetória do raio no modelo isotrópico e homogêneo ($e = f = 0$), com interface parabólica.

O modelo adotado é representado na Figura 1, na qual a interface é parametrizada polinomialmente do seguinte modo:

$$h(x) = a + bx + cx^2. \quad (1)$$

Esta interface separa dois meios geológicos com propriedades físicas distintas, o campo de velocidade $V = V(x, z)$ situado acima da interface, meio 1, e parametrizado por:

$$\frac{1}{V^2} = d + ex + fz. \quad (2)$$

O objetivo é calcular os tempos trânsito de ondas que: se originam na superfície, numa fonte posicionada em S , se propagam no meio 1, são refletidas na interface $h(x)$, retornam à superfície, e são detectadas em receptores previamente posicionados em R .

Seja $T(S, R)$ o tempo total de trânsito do raio. Como neste caso o meio é homogêneo e isotrópico, os parâmetros e e f na Eq. (2) são nulos, e isto significa dizer que a velocidade é constante. Pode-se expressar analiticamente $T(S, R)$ da seguinte forma: o tempo de transito do raio, como se pode observar na Figura 1, é a soma dos intervalos \overline{SI} e \overline{IR} dividido por V , isto é:

$$T(S, R) = \frac{\overline{SI} + \overline{IR}}{V} \quad (3)$$

Pode-se com base na geometria do problema escrever:

$$\cos(\alpha - \phi) = \frac{h(\xi)}{SI} \quad (4)$$

e

$$\cos(\alpha + \phi) = \frac{h(\xi)}{IR}, \quad (5)$$

onde ξ é a coordenada x do ponto de incidência I do raio na interface.

Substituindo-se (4) e (5) em (3), tem-se:

$$T(S, R) = \frac{h(\xi)}{V} \left[\frac{1}{\cos(\alpha - \phi)} + \frac{1}{\cos(\alpha + \phi)} \right]. \quad (6)$$

De acordo com a geometria pode-se também escrever:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \phi) = \frac{\xi - S}{h(\xi)} \quad (7)$$

e

$$\operatorname{tg}(\alpha + \phi) = \frac{R - \xi}{h(\xi)}. \quad (8)$$

Logo:

$$\alpha - \phi = \operatorname{arctg} \left[\frac{\xi - S}{h(\xi)} \right] \quad (9)$$

e

$$\alpha + \phi = \operatorname{arctg} \left[\frac{R - \xi}{h(\xi)} \right]. \quad (10)$$

Então:

$$2\phi = \operatorname{arctg} \left[\frac{R - \xi}{h(\xi)} \right] - \operatorname{arctg} \left[\frac{\xi - S}{h(\xi)} \right]. \quad (11)$$

Baseando-se, ainda, na Figura 1, tem-se:

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{dh}{d\xi}(\xi). \quad (12)$$

Logo:

$$\phi = \operatorname{arctg} \left[\frac{dh}{d\xi}(\xi) \right] = \operatorname{arctg}(b + 2c\xi). \quad (13)$$

Substituindo-se a equação (13) na equação (11), tem-se:

$$2 \cdot \operatorname{arctg}(b + 2c\xi) = \operatorname{arctg} \left[\frac{R - \xi}{h(\xi)} \right] - \operatorname{arctg} \left[\frac{\xi - S}{h(\xi)} \right] \quad (14)$$

que é uma equação cuja única variável é ξ .

A solução da equação (14) é obtida numericamente através dos seguintes passos:

1º.) Constrói-se a função

$$F(\xi) = 2 \cdot \operatorname{arctg}(b + 2c\xi) - \operatorname{arctg} \left[\frac{R - \xi}{h(\xi)} \right] + \operatorname{arctg} \left[\frac{\xi - S}{h(\xi)} \right]; \quad (15)$$

2º.) Considera-se a equação $F(\xi) = 0$, isto é, dados S e R , sua raiz nos fornece a coordenada x do ponto de incidência I no refletor;

3º.) Utiliza-se o método da bisseção para resolver (15);

4º.) Uma vez obtido ξ , o ângulo ϕ é obtido diretamente através da equação (13);

5º.) De posse do valor de ϕ pode-se calcular o valor de α através da equação (9) ou (10); e

6º.) Então, o cálculo de $T(S, R)$ pode ser feito através de (6).

Esse procedimento é repetido para diversos pares fonte-receptor.

Meio Heterogêneo Isotrópico

Analisa-se, agora, um modelo geológico, representado na Figura 2, que se distingue do anterior devido à presença de heterogeneidade no campo de velocidades, que é descrita matematicamente pela equação (2) com os parâmetros e e f não simultaneamente nulos.

O problema do traçamento de raio unindo dois pontos fixos pode ser extremamente complexo. Portanto, no presente trabalho, apenas as fontes estarão fixadas e só serão consideradas as chegadas dentro de um intervalo limitado de superfície de observação.

A obtenção dos caminhos percorridos (trajetórias) pelos raios é feita resolvendo os seguintes sistemas de equações (Cerveny, 1987):

$$\frac{dX_i}{d\tau} = P_i \quad (16)$$

e

$$\frac{dP_i}{d\tau} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{V^2} \right), i \in \{1, 2\}, \quad (17)$$

onde $x_1 = x, x_2 = z, \tau$ é um parâmetro do caminho seguido pelo raio e $P(\tau) = (P_1(\tau), P_2(\tau))$ é o vetor tangente a esse caminho, em cada um de seus pontos $(x(\tau), z(\tau))$, chamado de vetor vagarosidade. Além disso:

$$\|P(\tau)\| = \frac{1}{V(x(\tau), z(\tau))} \quad (18)$$

e

$$\tau = \int_0^l V(l) dl, \quad (19)$$

onde l é o comprimento do arco da curva definida pelo raio (Thompson e Chapman, 1985).

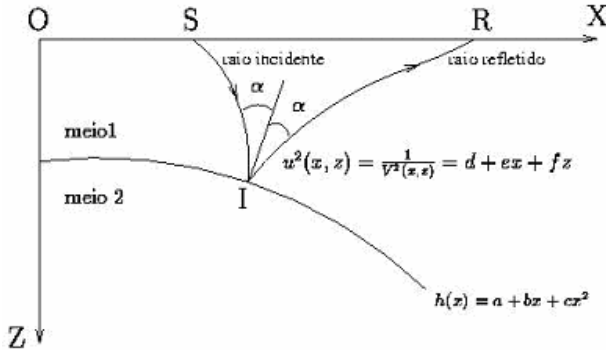


Figura 2: Trajetória do raio no modelo isotrópico e heterogêneo com interface parabólica.

Derivando-se a equação (16) e usando-a na equação (17) tem-se:

$$\frac{d^2 X_i}{d\tau^2} = \frac{dP_i}{d\tau} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} \left(\frac{1}{V^2} \right). \quad (20)$$

Substituindo-se a equação (2) em (20) e calculando-se o gradiente no segundo membro tem-se:

$$\frac{d^2 X_i}{d\tau^2} = \frac{dP_i}{d\tau} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (d + ex + fz) = \begin{cases} \frac{e}{2}, & \text{se } i = 1 \\ \frac{f}{2}, & \text{se } i = 2. \end{cases} \quad (21)$$

Logo pode-se encontrar uma solução para $x(\tau)$ através de:

$$\frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} = \frac{e}{2}. \quad (22)$$

Integrando-se duas vezes a equação (22), tem-se:

$$x(\tau) = \frac{e}{4} \tau^2 + c_1 \tau + c_2. \quad (23)$$

Procedendo-se de modo análogo para $i = 2$, tem-se:

$$z(\tau) = \frac{f}{4} \tau^2 + c_3 \tau + c_4. \quad (24)$$

Aplicando-se as condições de contorno na fonte $S = (x_s, z_s)$, isto é, $x(0) = x_s$ e $z(0) = z_s$, tem-se: $c_2 = x_s$ e $c_4 = z_s$.

Pode-se, então, escrever:

$$x(\tau) = \frac{e}{4} \tau^2 + c_1 \tau + x_s. \quad (25)$$

e

$$z(\tau) = \frac{f}{4} \tau^2 + c_3 \tau + z_s. \quad (26)$$

Através da equação (16) chega-se às seguintes igualdades:

$$\frac{e}{2} \tau + c_1 = P_{11} \quad (27)$$

e

$$\frac{f}{2} \tau + c_3 = P_{12}. \quad (28)$$

Fazendo-se $\tau = 0$, tem-se que: $c_1 = P_{11}(0)$ e $c_3 = P_{12}(0)$. Logo, pode-se finalmente escrever as soluções:

$$x_1(\tau) = \frac{e}{4} \tau^2 + P_{11}(0) \tau + x_s \quad (29)$$

e

$$z_1(\tau) = \frac{f}{4} \tau^2 + P_{12}(0) \tau + z_s. \quad (30)$$

As constantes x_s e z_s são as coordenadas da fonte, enquanto $P_{11}(0)$ e $P_{12}(0)$ são as coordenadas do vetor vagarosidade na fonte, que indicam a direção do vetor tangente à trajetória no início do caminho e devem obedecer à equação eikonal na fonte, isto é:

$$P_{11}^2(0) + P_{12}^2(0) = \frac{1}{V^2(S)}. \quad (31)$$

Fazendo-se a interseção do raio incidente com a interface refletora, determina-se o valor de $\tau (= \tau_1)$ no ponto de incidência. Pode-se, então, conhecer as

coordenadas (x_I, z_I) deste ponto. Além disso, obtêm-se o ângulo de incidência na interface $h(x)$, necessário na aplicação do princípio de Snell e na obtenção do vetor vagarosidade, $\vec{P}_R(\tau_I) = (P_{R1}(\tau_I), P_{R2}(\tau_I))$, do raio refletido no ponto I . O conhecimento do valor de τ tanto no ponto I como no ponto $R = (x_R, 0)$ é necessário para cálculo do tempo de trânsito.

A obtenção dos tempos de trânsito neste trabalho é feita analiticamente. A equação (19) fornece uma relação entre velocidade $V(l)$ e o parâmetro τ . E a equação

$$t = \int_C \frac{1}{V(l)} dl \quad (32)$$

fornece uma relação entre a velocidade e o tempo gasto pelo raio para percorrer o caminho C obtido pela concatenação dos caminhos percorridos pelos raios incidentes e refletidos.

Admite-se por hipótese a existência de uma função W tal que

$$\frac{dW}{dl} = V(l), \quad (33)$$

então pela equação (19), tem-se:

$$\tau = \int_0^I dW = W(l) - W(0). \quad (34)$$

Logo:

$$\frac{d\tau}{dl} = \frac{dW(l)}{dl} = V(l), \quad (35)$$

ou seja:

$$dl = \frac{d\tau}{V(l)}. \quad (36)$$

Substituindo-se (36) em (32), tem-se:

$$t = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{1}{V^2} d\tau, \quad (37)$$

que juntamente com (2), (29) e (30), permite escrever:

$$t = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ d + e \left[\frac{e}{4} \tau^2 + P_{I1}(0)\tau + x_S \right] + f \left[\frac{f}{4} \tau^2 + P_{I2}(0)\tau + z_S \right] \right\} d\tau. \quad (38)$$

A expressão (38) é calculada em duas etapas: na primeira calcula-se o tempo t_1 gasto pelo raio incidente para atingir a interface partindo da fonte S (neste caso, a integral será calculada entre os limites $\tau_1 = 0$, na fonte,

e $\tau_2 = \tau_I$, correspondente ao ponto de incidência na interface $h(x)$ e na segunda o tempo t_2 , gasto pelo raio refletido que parte do ponto de incidência I rumo a superfície $z=0$, neste caso os limites de integração são $\tau_1 = \tau_I$ (na interface) e $\tau_2 = \tau_R$ (na superfície). Neste último caso, deve-se ter claro que o ponto de partida do raio é $I = (x_I, z_I)$ e o vetor vagarosidade em I é $P_R(\tau_I) = (P_{R1}(\tau_I), P_{R2}(\tau_I))$.

O tempo total t , obviamente, é dado por:

$$t = t_1 + t_2, \quad (39)$$

onde:

$$t_1 = \frac{e^2 + f^2}{12} \tau_I^3 + \frac{eP_{I1}(0) + fP_{I2}(0)}{2} \tau_I^2 + (d + ex_S + fz_S) \tau_I \quad (40)$$

e

$$t_2 = \frac{e^2 + f^2}{12} (\tau_R^3 - \tau_I^3) + \frac{eP_{R1}(\tau_I) + fP_{R2}(\tau_I)}{2} (\tau_R^2 - \tau_I^2) + (d + ex_I + fz_I) (\tau_R - \tau_I) \quad (41)$$

A implementação de um código computacional, para o cálculo dos tempos de trânsito, segue basicamente a seguinte seqüência de passo:

1º.) Definição do ângulo de saída do raio; ele permite calcular $P_{I1}(0)$ e $P_{I2}(0)$, com auxílio da expressão (31);

2º.) Interseção do raio $(x_I(\tau), z_I(\tau))$ com a interface refletora $h(x)$, isto é:

$$G(\tau) = h(x_I(\tau)) - z_I(\tau) \quad (42)$$

que permite obter τ_I , empregando o método da bisseção para encontrar o zero do polinômio $G(\tau)$ num intervalo pré-determinado (τ_1, τ_2) com $\tau_1 < \tau < \tau_2$;

3º.) Para o cálculo do ângulo de incidência do raio no ponto $I = (x_I, z_I)$, determina-se o vetor tangente ao raio incidente em I , \vec{u}_I , faz-se a rotação desse vetor de π radianos e, neste mesmo ponto, determina-se o vetor normal, \vec{u}_n , à interface. O valor do ângulo α é obtido através da seguinte expressão:

$$\cos(\alpha) = \frac{-\vec{u}_I \cdot \vec{u}_n}{|\vec{u}_I| |\vec{u}_n|}; \quad (43)$$

4º.) Para determinação do ângulo de saída do raio refletido, utiliza-se a lei de Snell e, então, faz a rotação do vetor \vec{u}_n de um ângulo α no sentido horário. A equação (31), é reescrita como segue:

$$P_{R1}^2(I) + P_{R2}^2(I) = \frac{1}{V^2(I)}, \quad (44)$$

que juntamente com o ângulo α , fornece as condições para determinação de $P_{R1}(\tau_I)$ e $P_{R2}(\tau_I)$;

5º.) Para determinação do valor de τ na interseção do raio refletido com a superfície de observação, faz-se $z_R(\tau) = 0$ em

$$z_R(\tau) = \frac{f}{4}(\tau - \tau_I)^2 + P_{R2}(\tau_I)(\tau - \tau_I) + z_I, \quad (45)$$

que resolvida fornece $\tau = \tau_R$;

6º.) O tempo de transito do raio é obtido com o emprego das expressões (39), (40) e (41).

Resultados

Os experimentos realizados seguiram basicamente as seguintes linhas de raciocínio (Teles, 2001):

1º.) Estabelecer fundamentos teóricos rigorosos para a modelagem de tempos de trânsito de reflexão produzidos em modelos representativos de meio isotrópicos homogêneos e isotrópicos heterogêneos dotados de uma interface refletora parabólica;

2º.) Observar a influencia dos parâmetros do modelo nos tempos de viagem calculados; e

3º.) Criar um espaço de modelos, que admita uma modelagem analítica, para ser usado como base sólida provedora de modelos de referência para procedimentos de inversão.

Esta postura de apresentar uma análise matemática rigorosa tem como objetivo principal estabelecer “guias” para a correta interpretação dos resultados, além de verificar os limites de validade ou aceitabilidade destes resultados. O padrão da geometria de aquisição é mostrado na Figura 3.

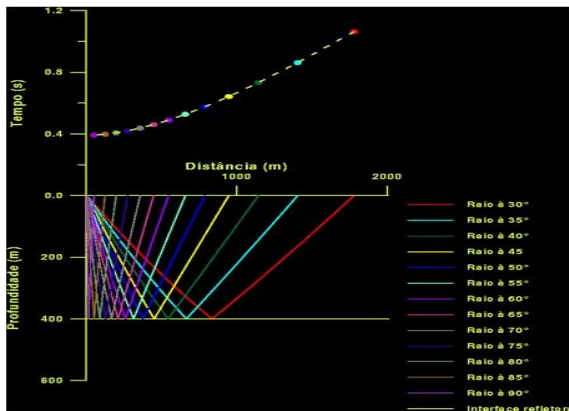


Figura 3: Modelo com os seguintes parâmetros: $a = 400\text{ m}$ e $b = c = 0$ (refletor) e $d = 0,25\text{ s}^2\text{km}^{-2}$, $e = 7 \times 10^{-5}\text{ s}^2\text{km}^{-3}$, e $f = 5 \times 10^{-5}\text{ s}^2\text{km}^{-3}$ (campo do quadrado da vagarosidade).

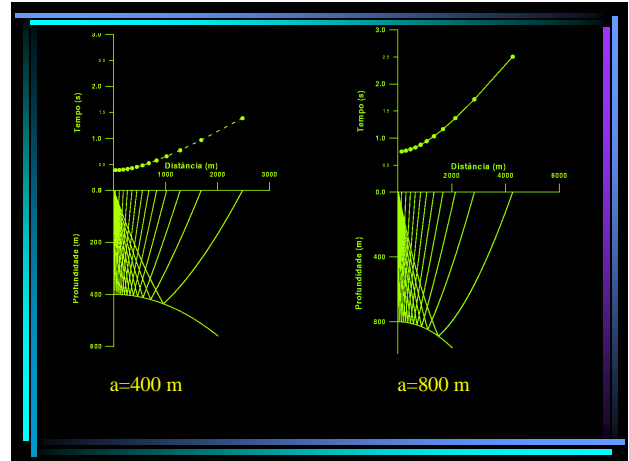


Figura 4: Influência do parâmetro a sobre os dados modelados de tempo de trânsito. Todos os outros parâmetros estão fixados.

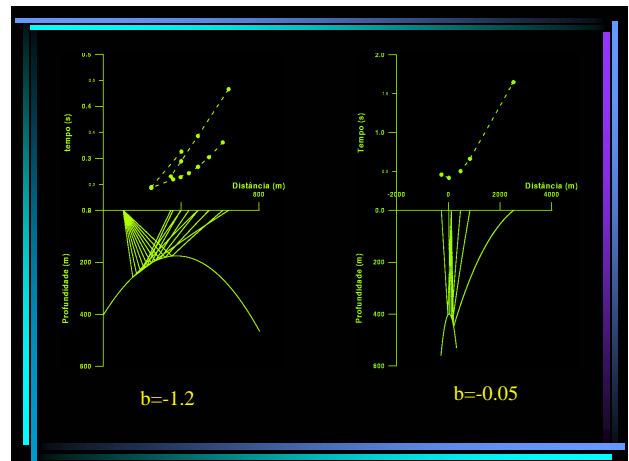


Figura 5: Influência do parâmetro b sobre os dados modelados. Todos os outros parâmetros estão fixados.

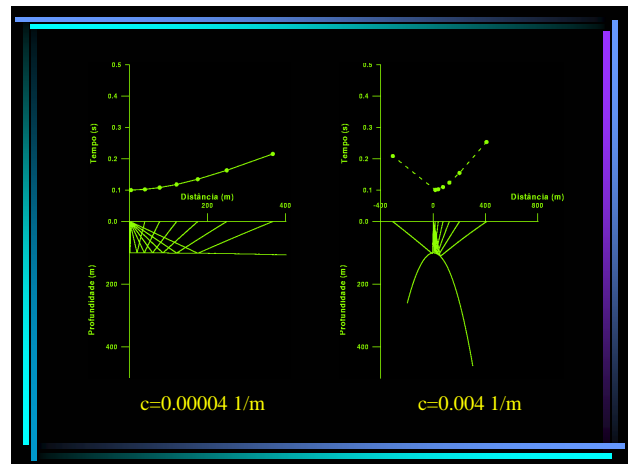


Figura 6: Influência do parâmetro c sobre os dados. Todos os outros parâmetros foram fixados.

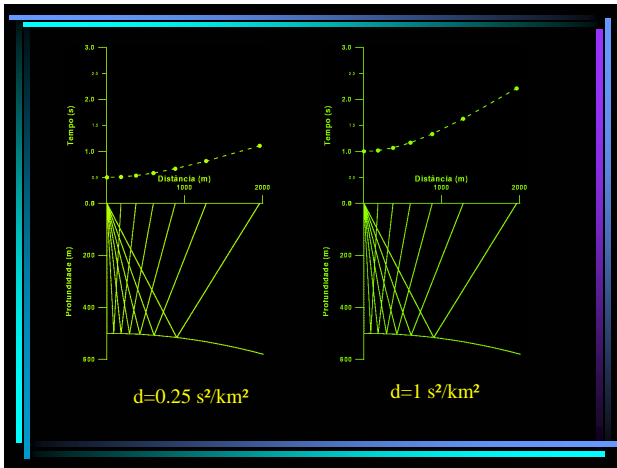


Figura 7: Influência do parâmetro d sobre os dados. Todos os outros parâmetros estão fixados.

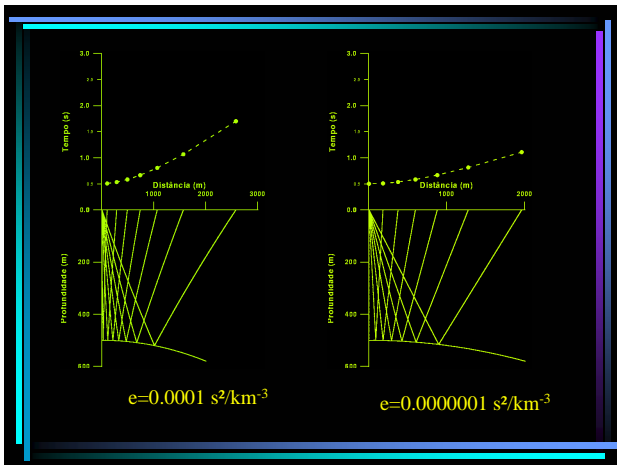


Figura 8: Influência do parâmetro e sobre os dados. Todos os outros parâmetros estão fixados.

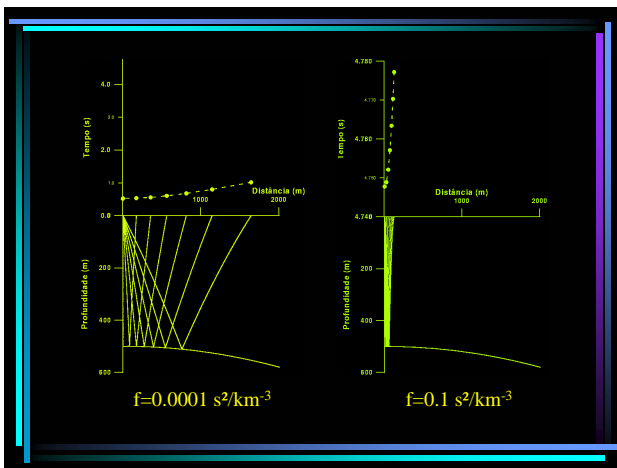


Figura 9: Influência do parâmetro f sobre os dados. Todos os outros parâmetros estão fixados.

Conclusões

A rigorosa análise matemática adotada para a modelagem de tempos de trânsito de reflexão produzidos em modelos representativos de meio isotrópicos homogêneos e heterogêneos dotados de uma interface refletora, mostra-se extremamente vantajosa, no que se refere à implementação computacional e na própria apresentação das curvas de tempo, em outras palavras, tal análise permite uma apreciação, mais acurada (e isolada de outros fatores), da influência dos parâmetros do modelo sobre curvas de tempos de trânsito de reflexão em interfaces parabólicas. Além disso, a observação das curvas obtidas, apresenta sugestões que, podem guiar o trabalho interpretativo.

Alguns modelos gerados, Figuras de 4 a 9, descrevem de forma eficiente, tanto o campo de velocidades do meio, em termos de seus parâmetros cinemáticos (campo de velocidades), como os aspectos geométricos (interfaces refletoras). Esses modelos servem de referência para procedimentos de inversão de dados sísmicos.

O algoritmo proposto pode prover uma base para o desenvolvimento de programa de migração de dados sísmicos que utiliza traçado de raios sísmicos. Para tanto, deve-se incluir modelos na análise modelos com mais de uma camada e fazer um traçado de raio considerando-se o problema da conexão de dois pontos situados na superfície de observação, o que implica na necessidade de efetuar-se modificações no citado algoritmo, generalizando-o para modelos mais complexos de campo de velocidades e outras geometrias que não se restrinja a apenas uma de interface sísmica.

Estudos mais completos podem ser realizados parametrizando-se todo o campo de velocidades por uma única função polinomial. Neste caso, as interfaces são simuladas por grandes variações da referida função nas curvas que representam tais interfaces geológicas refletoras, nas quais o campo de velocidades, geralmente, é descontínuo.

Agradecimentos

Agradecemos à ANP (Agência Nacional do Petróleo) e ao CPGG-UFBA (Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia da Universidade Federal da Bahia).

Referências

Cervený, V., 1987. Ray Methods for Three-Dimensional Seismic Modeling. The Norwegian Institute of Technology.

Figueiró, W. M., 1994. Tomografia de Reflexão no caso do Refletor Curvo. Tese de Doutorado, PPPG-UFBA, Salvador.

Teles, M. R. L., 2001. Modelagem Sísmica de Tempos de Trânsito de Reflexão em Interface Parabólica. Trabalho de Graduação em Geofísica, DGGA-UFBA, Salvador.

Thomson, C. J. & Chapman, C. H., 1985. An Introduction to Maslov's Asymptotic Method. Geophys J. R. Soc., 61, 729-746.