



# Inversão de uma função constitutiva para descrever o comportamento do meio que possui polarização induzida (IP)

Edivagner S. Ribeiro, LENEP/UENF,  
Carlos A. Dias, LENEP/UENF

Copyright 2009, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 11<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, August 24-28, 2009.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 11<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

## Abstract

In this present work we present an interactive inversion method of the complex conductivity function, proposed by Dias (2000), which describes the electrical behavior of rocks that has an effect of induced polarization (IP). The conductivity function has five petrophysical significance coefficients, which are nonlinear functions in frequency. The objective of developing such software is to determine the value of such coefficients.

## Introdução

Os métodos elétricos e eletromagnéticos possuem uma relevância antiga e ainda crescente, em grande parte devida ao estudo das propriedades elétricas dos materiais geológicos. Nesse contexto, a análise da condutividade no espectro da frequência, ou do fenômeno correspondente da voltagem de tempo-transiente, fornece a informação elétrica mais completa com base na eletro-resistividade e no efeito da polarização elétrica induzida (efeito **IP**).

O leque de aplicações do estudo da resistividade e do efeito de **IP** vai desde a primazia na prospecção de depósitos metálicos, até à capacidade de discriminação mineral não-destrutiva dos agentes causadores da polarização, conforme demonstrado por Pelton et al. (1978), à determinação do tamanho do grão mineral associado ao efeito **IP** e do espaço livre médio separando as fontes desse efeito (Dias, 2000), e, ainda, à determinação da permeabilidade de fluxo em meio poroso, da distribuição da dimensão dos poros e da pressão capilar, com enorme significado para a área de água e petróleo (Lima and Niwas, 2000; Maosong et al. 2004; 2006a,b).

Dias (2000) apresentou uma análise comparativa exaustiva entre 12 modelos principais existentes, propostos para descrever o efeito **IP**, demonstrando haver um maior grau de coerência e menos ambigüidade no modelo que o autor propôs. Este modelo foi construído com base em resultados da teoria fenomenológica do efeito **IP** e demonstrou-se capaz de explicar, pela primeira vez, o comportamento elétrico das

rochas exibindo polarização elétrica às rádio e sub-rádio frequências (Dias, 1968; 1972). Um aprimoramento posterior deste modelo, pelo autor (Dias, 2000), substituiu quatro dos cinco coeficientes originais por parâmetros com significados petrofísicos bem definidos e com unicidade de valores.

Este trabalho se propõe ao estudo da inversão da função de Dias, aplicando o método de Marquardt para ajuste de dados de condutividade elétrica complexa (amplitude e fase) no domínio da frequência.

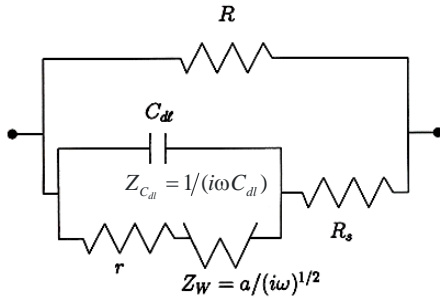
## Função “condutividade de corrente total” para as rochas

A noção de uma “condutividade de corrente total” nasceu da análise dos modelos propostos pelos eletroquímicos, traduzidos por circuitos analógicos, para descrever o comportamento de uma única interface metal-eletrólito. Marshall and Madden (1959) procederam de modo semelhante para descrever o comportamento elétrico da interface de um grão argilomineral com um eletrólito, sob ação de um campo elétrico alternado. Tais circuitos analógicos resultaram sempre de um desenvolvimento teórico de um modelo cinético atribuído ao fenômeno.

Dias (1968) percebeu que o circuito analógico proposto por Grahame (1952), ao ser associado em paralelo com um resistor, gerava uma função condutividade complexa capaz de descrever todos os tipos de curvas dos dados experimentais, resultantes da polarização causada tanto por partículas de sulfetos ou óxidos metálicos disseminados, como por partículas de argilominerais disseminados, em uma matriz de rocha, em contato com a solução salina percolante dos poros da rocha. Esse circuito analógico mais completo devido a Dias passou a ser chamado por ele (Dias, 1968; 1972) de **circuito fundamental**.

Dias (1968) demonstrou também que o “circuito fundamental” quando associado com um resistor em série ou em paralelo, um número qualquer de vezes e seguindo qualquer ordem seqüencial, não altera a forma da função condutividade como função de frequência, mas apenas os coeficientes da função. O mesmo acontecendo quando circuitos fundamentais vêm associados em série ou em paralelo, um número arbitrário de vezes, desde que variem apenas por um fator de escala. Dias (2000) passou, então, a denominar de **célula elementar do comportamento elétrico** o circuito fundamental do meio polarizável.

A primeira função condutividade de corrente total para um testemunho de rocha foi escrito por Dias (1968) publicado em 1972 (Dias, 1972) com base no circuito analógico da figura 1.



**Figura 1 - Célula do comportamento elétrico do meio polarizável, segundo o modelo de Dias.**

Com base nesse circuito, escreve-se a função admitância

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_s + Z'} \quad (1)$$

onde Z' no membro inferior do circuito pode ser escrito como:

$$\frac{1}{Z'} = \frac{1}{Z_{Cdl}} + \frac{1}{r + Z_w} \quad (2)$$

De modo que  $Z_{Cdl}$  e  $Z_w$  representam, respectivamente, a impedância da dupla camada elétrica (de Helmholtz) e a impedância de Warburg.

Então a função condutividade normalizada pelo valor de  $\sigma_0$  (valor de  $\sigma$  na freqüência zero) vem dada por:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + \frac{R}{R_s + \frac{(r + Z_w)Z_{Cdl}}{r + Z_w + Z_{Cdl}}} \quad (3)$$

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = 1 + \frac{R\lambda/Z_w}{1 + (r + R_s)\lambda'/Z_w} \quad (4)$$

onde

$$\lambda = 1 + \mu, \quad (5)$$

$$\lambda' = 1 + \left(1 - \frac{r}{r + R_s}\right)\mu, \quad (6)$$

$$\mu = \frac{r + Z_w}{Z_{Cdl}}. \quad (7)$$

A função **condutividade de corrente total** em sua versão final (Dias, 2000) é dependente de cinco parâmetros com significado petrofísico, definidos a seguir:

$\sigma_0$  (condutividade dc): Corresponde ao valor mais baixo da condutividade, atingido quando o efeito da polarização alcança o seu valor máximo;

$m$  (cargabilidade): Medida da máxima dispersão da condutividade normalizada pelo maior valor do módulo de  $\sigma$ , que ocorre nas altas freqüências quando o efeito de **IP** ainda não existe, constituindo a medida da intensidade do efeito da polarização, definido como:

$$m = \frac{\sigma_{\omega \rightarrow \infty} - \sigma_{\omega \rightarrow 0}}{\sigma_{\omega \rightarrow \infty}} \quad (8)$$

No circuito da célula unitária, corresponde a

$$m = \frac{R}{R + R_s} \quad (9)$$

Vem relacionada com o tipo/espécie da fonte geradora do efeito **IP** e, de uma forma peculiar, ao seu teor. Trata-se do parâmetro mais estabelecido na literatura, na interpretação do efeito **IP**. Este parâmetro é adimensional e está definido no intervalo  $0 \leq m < 1$ .

$\tau$  (tempo de relaxação), corresponde ao tempo de relaxação da zona da dupla camada elétrica de Helmholtz, quando o efeito de difusão é suplantado pelos outros mecanismos de condução na célula unitária, sendo dado por:

$$\tau = rC_{dl}. \quad (10)$$

Trata-se de um parâmetro com dimensão de tempo, normalmente menor que 1s, podendo chegar a até  $10^{-7}$ s. Vem relacionado com o tamanho do grão mineral da fonte geradora do efeito. É o parâmetro segundo melhor estabelecido na literatura, na interpretação do efeito **IP**;

$\delta$  (fração do comprimento da célula unitária afetada pelo efeito de polarização), dado por:

$$\delta = \frac{r}{r + R_s}. \quad (11)$$

Este parâmetro é peculiar deste modelo. É adimensional e está definido no intervalo  $0 \leq \delta < 1$ . Envolve apenas os componente ôhmicos da condução na célula unitária, podendo  $r$  ser diretamente relacionado ao comprimento da zona afetada pela polarização e  $R_s$  ao comprimento da porção da célula livre dessa influência.

$\eta$  (parâmetro eletroquímico), dado por:

$$\eta = a/r \quad (12)$$

Este parâmetro também é peculiar deste modelo. Tem a dimensão de  $s^{-1/2}$  e acha-se relacionado à significância relativa entre a componente ôhmica da corrente elétrica e o módulo da componente da corrente produzida por difusão dentro da espessura da dupla camada elétrica, na freqüência de  $1 \text{ rad/s}$ , na célula unitária. Possui, portanto, uma relação característica com o processo cinético produtor da polarização. Na célula unitária, pode ser igualado a  $2D^{1/2}/l$  onde  $D$  é o valor da difusividade do "cátion de troca" da solução e  $l$  é a espessura da dupla-camada elétrica de Helmholtz (Chang and Jaffé, 1952).

Ao ser  $\eta$  dependente de  $\ell$ , não variará com  $\omega$  só em primeira aproximação, em decorrência da linearização. Dias (2000) estimou que, para as rochas,  $\eta$  pode variar desde valores inferiores próximos de 1 até aproximadamente 150.

Segundo Dias (2000), espera-se que  $\eta$  cresça com a concentração, tanto das fontes disseminadas quanto dos íons em solução, em menor intensidade com o último.

Após certo exercício algébrico e introduzindo os novos parâmetros, reescreve-se a equação condutividade total em sua forma final dada por:

$$\sigma = \sigma_0 \left[ 1 + \alpha \frac{\lambda \beta (i\omega)^{1/2}}{1 + \lambda' \beta (i\omega)^{1/2}} \right], \quad (13)$$

onde temos:

$$\lambda = 1 + \mu \quad (14)$$

$$\lambda' = 1 + (1 - \delta)\mu \quad (15)$$

$$\mu = i\omega\tau \left[ 1 + \eta (i\omega)^{-1/2} \right] \quad (16)$$

$$\alpha = m(1 - \delta)/(1 - m) \quad (17)$$

$$\beta = (\eta\delta)^{-1} \quad (18)$$

Conforme Dias (2000), existem atualmente 12 modelos analíticos principais, na literatura, propostos para descrever os dados experimentais medidos no laboratório relacionados ao efeito **IP**. São modelos que oferecem parâmetros petrofísicos para interpretação de características e propriedades do meio.

Do trabalho de Dias (2000), conclui-se que o modelo do autor é o mais apropriado para descrever o efeito **IP**, por possuir três características fundamentais:

- ser capaz e versátil como os melhores para superpor os dados experimentais, com a vantagem de fazê-lo usando o menor número de coeficientes;
- ser fenomenológico na origem, isto é, construído a partir dos princípios fundamentais que descrevem o fenômeno e o comportamento do meio que exhibe o efeito sob a ação de um campo elétrico harmônico;
- gerar coeficientes que possuem significado petrofísico de maneira consistente e coerente.

Tem-se, portanto, uma função complexa  $\sigma$ , dependente de cinco coeficientes ( $\sigma_0$ ,  $m$ ,  $\delta$ ,  $\tau$ ,  $\eta$ ) e da variável  $\omega$  (frequência  $\omega = 2\pi f$ ).

O modelo proposto por Dias tem muito a oferecer, e seu potencial não foi suficientemente explorado para descrever propriedades petrofísicas das rochas e fazer a caracterização de ambientes, através da medida da polarização elétrica. Em sua nova forma, a **função condutividade total** utiliza parâmetros, que contêm intervalos de variação bem definidos e significado petrofísico claro. Esta função mostrou-se consistente quando confrontada com as informações externas existentes.

Os dados experimentais utilizados na época, ainda que poucos, permitiram uma comparação do desempenho dos diversos modelos, assim como, a discussão da consistência do significado petrofísico dos vários coeficientes envolvidos. Os resultados mostraram que apenas os modelos multi Cole-Cole e Dias foram capazes de descrever as curvas mais caprichosas, sendo a função multi Cole-Cole de sete parâmetros e a de Dias de cinco parâmetros, com esta última apresentando menos ambigüidade na determinação dos coeficientes. Outro ponto relevante é que o modelo multi Cole-Cole é empírico e o de Dias fenomenológico na sua geração.

### Metodologia

Para que possamos inverter a função condutividade de corrente total, e obter os valores dos parâmetros petrofísicos utilizaremos o método de Marquardt, com o ajuste dos mínimos quadrados.

Problemas de mínimos quadrados têm como objetivo encontrar o melhor ajuste para um conjunto de dados de tal modo que o valor da soma dos quadrados das distâncias (tomadas na vertical) entre o modelo (curva ajustada) e cada um dos pontos experimentais seja o menor possível. Essas diferenças entre os pontos da curva ajustada e cada um dos pontos experimentais são denominados resíduos.

No problema específico, um conjunto de dados experimentais (medidas da fase e da amplitude da condutividade complexa) será representado por

$$\mathbf{y}_0 = [y_{0_1} \ y_{0_2} \ \dots \ y_{0_M}]^T \quad (19)$$

os quais são funções não-lineares da frequência e dos parâmetros a serem estimados.

O processo iterativo parte de uma aproximação inicial do vetor de parâmetros. Esse “palpite” inicial é construído com base nos valores limite previamente investigados e informações *a priori*. O objetivo do ajuste é minimizar a distância entre a curva experimental, descrita por  $y_0$  e a curva calculada pelo modelo proposto dado por

$$\mathbf{y}_{calc} = [y_1(f_1, \mathbf{p}) \ y_2(f_2, \mathbf{p}) \ \dots \ y_M(f_M, \mathbf{p})]^T \quad (20)$$

onde  $f$  é a frequência das  $M$  observações e  $\mathbf{p}$  o vetor de  $N$  parâmetros propostos pelo modelo que em sua representação vetorial é dada por:

$$\mathbf{f} = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_M]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_N]^T. \quad (21)$$

Como as componentes  $y_i(f_i, \mathbf{p})$  são funções não-lineares dos parâmetros, o método determina a atribuição de valores estimados às componentes do vetor de parâmetros,  $\hat{\mathbf{p}}$ , através de um processo iterativo onde, partindo de uma aproximação inicial  $\hat{\mathbf{p}}^{(0)}$ , obtêm-se na  $k$ -ésima iteração uma estimativa para os valores dos parâmetros os quais são utilizados para atualização dos dados calculados na próxima iteração, ou seja,

$$\hat{p}^{(k)} = \hat{p}^{(k-1)} + \Delta\hat{p}^{(k)} \quad (22)$$

sendo  $\Delta\hat{p}^{(k)}$  uma estimativa da correção dos parâmetros. O vetor  $\Delta\hat{p}^{(k)}$  é calculado a partir da solução de um problema linear usando mínimos quadrados, onde faz-se a substituição do funcional  $y(f, p)$  (segundo membro da equação (13) normalizado pelo seu valor na frequência zero) pela aproximação de primeira ordem no seu desenvolvimento em série de Taylor em função dos parâmetros.

O método a ser utilizado nesse trabalho será o de Marquardt para determinar  $\Delta\hat{p}^{(k)}$ , de modo que se pode escrever:

$$\Delta\hat{p}^{(k)} = (\mathbf{W}^{(k)T} \mathbf{W}^{(k)} + \Gamma^{(k)} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{W}^{(k)T} (\mathbf{y}_0 - \mathbf{y}^{(k)}) \quad (23)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade ( $p \times p$ ), e a constante  $\Gamma^{(k)} > 0$ ,

$$\mathbf{y}^{(k)} = [y_1(f_1, \hat{p}^{(k)}), y_2(f_2, \hat{p}^{(k)}), \dots, y_M(f_M, \hat{p}^{(k)})]^T \quad (24)$$

$$\mathbf{W}^{(k)} = (\mathbf{w}_{ij}^{(k)})_{M \times N}, \quad \text{com} \quad \mathbf{w}_{ij}^{(k)} = \frac{\partial y_i(f_i, \hat{p}^{(k)})}{\partial p_j} \quad (25)$$

A constante  $\Gamma^{(k)}$  deve ser escolhida de tal modo que a aproximação da matriz Hessiana, seja definida positiva, iniciando com um valor modesto de 0.001; nas iterações seguintes a escolha devendo ser feita com algum critério:

- Se  $\mathbf{y}^{(k+1)} \geq \mathbf{y}^{(k)}$  repete-se a iteração considerando um valor superior para  $\Gamma^{(k)}$ , isto é, multiplicando-se por um fator de 10 o valor tomado anteriormente nessa mesma iteração;
- Se  $\mathbf{y}^{(k+1)} < \mathbf{y}^{(k)}$  deve passar-se à iteração seguinte considerando  $\Gamma^{(k+1)} < \Gamma^{(k)}$ , ou seja,  $\Gamma^{(k+1)} = \Gamma^{(k)} / 10$ .

O processo iterativo deve continuar até que os valores dos parâmetros fiquem constantes.

O software foi desenvolvido de modo que podemos escolher qual das variáveis deve ser minimizada primeiro, controlando as correlações entre os parâmetros durante os cálculos iniciais.

Outra opção desenvolvida no software é a escolha do número de iteração a ser aplicada a cada variável ou a combinação delas, podendo trabalhar com uma, duas, três ou mesmo as quatro variáveis ao mesmo tempo, sendo essa ultima opção utilizada quando encontramos a estabilidade nos cálculos.

### Resultados

Aplicamos o ajuste da função condutividade de corrente total a dados sintéticos variando os valores para os parâmetros petrofísicos e observamos o comportamento do software de inversão durante o processo iterativo e a correlação entre os parâmetros.

Os dados sintéticos foram gerados no intervalo de frequência desde  $10^{-3}$  Hz até  $10^9$  Hz (figura 1), pois deste modo temos as duas assintotas que são utilizadas para o cálculo inicial da cargabilidade (parâmetro m).

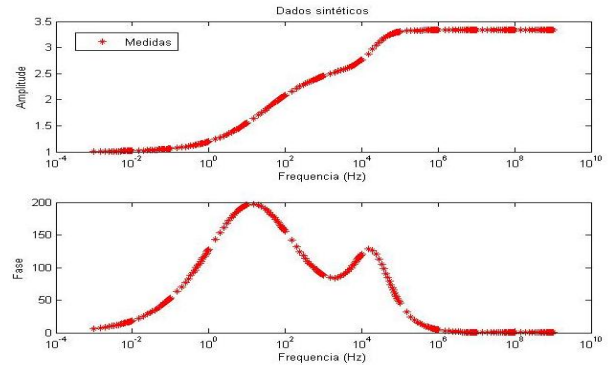


Figura 2 - Dados Sintéticos de Condutividade (fase e amplitude)

No caso dos dados sintéticos, onde apresenta as duas assintotas, temos um valor preciso da cargabilidade que é calculada com base na equação (8), deste modo é necessário supor os valores dos outros três parâmetros ( $\delta, \tau, \eta$ ) tomando como base o formato da curva e as informações *a priori*, sendo o valor de  $\sigma_0$  uma leitura do próprio gráfico.

Na figura 3 observamos a sobreposição da curva de dados experimentais (vermelho) e a curva calculada a partir da inversão da função de condutividade, onde podemos verificar uma sobreposição de boa qualidade apenas nos extremos.

Com base na observação de diversas combinações de valores para os parâmetros, e o comportamento da fase da condutividade, neste caso, se fez necessário modificar o valor do tempo de relaxação ( $\tau$ ) proposto inicialmente para um valor menor que é mais próximo da curva e então partir para o processo iterativo controlando as correlações entre os valores.

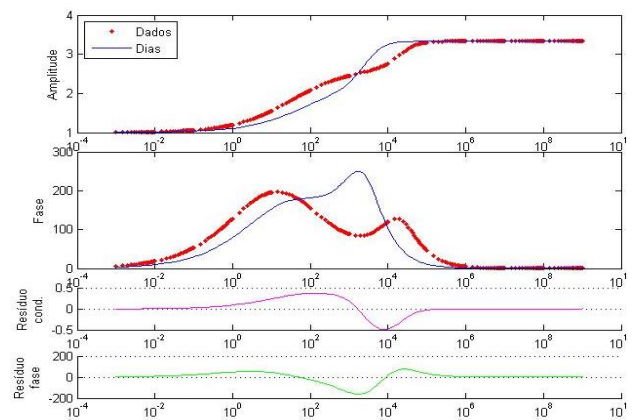


Figura 3 - Curva de dados sintéticos com a sobreposição da curva calculada com o vetor de parâmetros inicial.

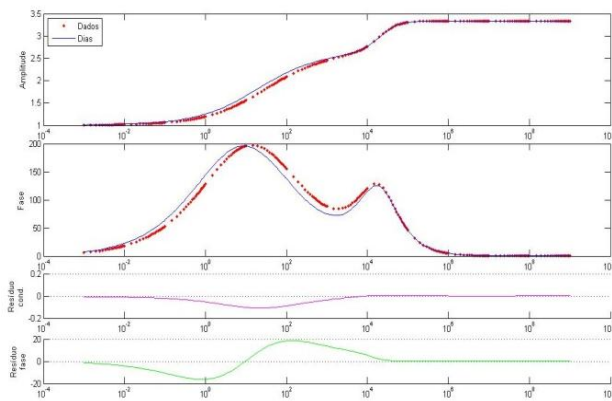
Esse caso que apresentamos aqui e os demais dados sintéticos estudados apresentaram forte correlação entre os parâmetros  $\delta$  e  $m$  além de uma grande sensibilidade do parâmetro eletroquímico  $\eta$ , que durante as iterações muitas vezes era necessário deixá-lo estático variando apenas os demais.

A figura 4 foi gerada após redução do valor do tempo de relaxação e algumas iterações. Obtivemos um bom ajuste dos dados com a função teórica, atingindo valores de erro de 2.592% para o ajuste da amplitude da condutividade e 13.522% para a fase da condutividade. A inversão da função se mostra satisfatória para a amplitude, todavia a fase ainda apresenta valores elevados de erro.

Os valores obtidos para os coeficientes são bem aproximados dos reais propostos para o dado sintético onde o tempo de relaxação era de  $2 \times 10^{-5}$  s e o calculado de  $1,28 \times 10^{-5}$  s, todavia para obtermos esse valor se fez necessário inserir no vetor de parâmetros inicial o valor da ordem de grandeza correta.

Para o parâmetro eletroquímico ( $\eta$ ), seu valor original é de 50 e o calculado foi de 48.69, valor este que foi necessário mante-lo fixo passando as dez primeiras iterações, pois o mesmo é muito sensível e está fortemente correlacionado aos outros.

A fração de poro (parâmetro  $\delta$ ) original era de 0.3 e o calculado obtido foi de 0.2867 e a cargabilidade 0.7 sendo calculada 0.6981 após as iterações.



**Figura 4 - Ajuste final de dados sintéticos.**

O software também foi testado com dados experimentais retirados da literatura (artigo de Dias, 2000) onde apresentava já o valor dos parâmetros petrofísicos para comprovarmos o desempenho do software de inversão, todavia os dados encontrados estavam em um limite inferior a frequência de  $10^5$  Hz e não apresentavam a formação a assíntota superior (máxima frequência) dificultando o ajuste dos dados e mantendo um erro insatisfatório.

## Conclusões

Até o presente momento não havia um software de inversão destinado a trabalhar com função de condutividade de Dias (2000). Esta primeira versão foi desenvolvida com base no algoritmo de Marquardt fazendo um ajuste satisfatório de dados sintéticos e sendo limitado ainda para dados experimentais com o espectro de frequência mais completo (que apresente as duas assíntotas).

Embora tenhamos conseguido obter ajuste satisfatório dos dados, o software apresenta limitações, inicialmente por se tratar de um programa semi automático, onde há a necessidade de inserir valores para o vetor de parâmetros que sejam bem aproximados do valor real, pois as atualizações durante o processo iterativo são de valores muito pequenos para os parâmetros a cada iteração.

Outra limitação do método adotado é a importância da presença das duas assíntotas para o cálculo da cargabilidade. A falta de um ou dos dois extremos do espectro de frequência reflete diretamente da determinação da ordem de grandeza do parâmetro  $\tau$  e no cálculo de  $m$  que por sua vez torna-se distante do valor real.

Um ponto importante para a evolução desse trabalho é o estudo minucioso da correlação entre os parâmetros e o desenvolvimento de um método para melhorar a estimativa do vetor de parâmetros inicial podendo resultar até mesmo na substituição do método de Marquardt para outro algoritmo mais complexo que trabalhe com valores elevados de resíduo, deixando o método de Marquardt apenas para o ajuste final dos valores quando o valor de resíduo é menor possível.

## Acknowledgments

Os autores agradecem o apoio financeiro recebido da FAPERJ através da bolsa de mestrado e pelo incentivo a pesquisa.

## References

- Chang, H.C. Jaffé, G., 1952, Polarization in electrolytic solutions, Part I, Theory, J. Chem. Phys, 20(7), 1071-1077.
- Dias, C. A., 1968, A non-grounded method for measuring electrical induced polarization and conductivity. Ph.D. Thesis, Univ. California- Berkeley, USA.
- Dias, C. A., 1972, An analytical model for a polarizable medium at radio and lower frequencies, Journal of Geophysical Research, 77, 1972, 4945 – 4956.
- Dias, C. A., 2000, Developments in a Model to Describe Low-frequency Electrical Polarization of Rocks, Geophysics, 65, 437-451.

Grahame, D. C., 1952, Mathematical theory of the faradaic admittance (pseudocapacity and polarization resistance), *J. Electrochem. Soc.*, 99, 370c-385c.

Lima, O. A. L. and Niwas, S., 2000, Estimation of hydraulic parameters of shaly sandstone aquifers from geoelectrical measurements, *Journal of Hydrology*, 235, 12 - 26.

Maosong, T., Weinan, W., Yizhong, J., Deqin, S. and Li, L., 2004, Estimation of permeability of shaly sand reservoir from induced polarization time spectra, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 45, 1-10.

Maosong, T., Weinan, W., Yizhong, J. and Li, L., 2006, A time-domain induced-polarization method for estimating permeability in a shaly sand reservoir, *Geophysical Prospecting*, 54, 623-631.

Maosong, T., Weinan, W., Yizhong, J., Deqin, S. and Li, L., 2006, Determining capillary-pressure curve, pore-size distribution, and permeability from induced polarization of shaley sand, *Geophysics*, 71(3), N33 - N40.

Marshall, D.J. and Madden, T.R., 1959, Induced polarization - A study of its causes, *Geophysics*, 24(4), 790-816.

Pelton, W. H., Ward, S. H., Hallof, P. G., Sill, W. R., and Nelson, P. H., 1978, Mineral discrimination and removal of inductive coupling with multi-frequency IP, *Geophysics*, 43, 588-609.