



# Regularização de Problemas Inversos por Seleção de Valores Singulares: Aplicação em Tomografia Iterativa de Tempos de Trânsito

Caio Jean Matto Grosso da Silva, IGEO/UFBA  
Amin Bassrei, IF/UFBA e CPGG/UFBA

Copyright 2009, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 11<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, August 24-28, 2009.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 11<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

## Abstract

Inverse problems are in general ill-posed, in such a way that we have to deal with the aspects of existence, uniqueness and stability. In this work we deal with seismic traveltimes tomography, which is a kind of inverse problem. We use the well known singular value decomposition (SVD) in order to obtain the slowness distribution from a given known set of traveltimes. When using SVD we face the problem of small singular values that should be avoided in the construction of the pseudo-inverse matrix. We propose here a new methodology for the optimum selection of singular values. This methodology is based on the behavior of the singular values decay, the RMS error for data parameters, the RMS error for model parameters, the model parameters energy and the model parameters entropy. We applied this methodology in linearized seismic traveltimes tomography, where the simulations with synthetic data provided good results.

## Introdução

A tomografia é um tipo de problema inverso que pode ser formulado através de um sistema linear. O presente trabalho trata da tomografia de tempo de trânsito, assim definida, pois utiliza como dado de entrada os tempos de trânsito entre a fonte e o receptor. A tomografia de tempos de trânsito encontra aplicação em geofísica de reservatórios (Abriel, 2008).

Matematicamente a tomografia é implementada por um sistema de equações lineares, onde os coeficientes da matriz tomográfica representam a geometria que o raio descreve no meio. Como solução para esse sistema deseja-se estimar o campo de velocidade de subsuperfície.

Contudo, a tomografia de tempos de trânsito se encaixa como um problema inverso não linear, tornando-se indispensável o uso de uma linearização para que seja possível estimar uma solução factível. A não-linearidade do problema está no fato de que o campo de

vagoriedade, parâmetro a se estimar, depende do caminho percorrido pelo raio e a geometria do raio é função do próprio campo de vagoriedade. O caso linear foi abordado por Silva (2008) e Silva e Bassrei (2008).

Temos ainda que para obtermos a solução do sistema é necessário encontrar uma matriz inversa associada ao percurso do raio. Logo, se a matriz não for quadrada ou não for singular não possuirá uma matriz inversa associada. Para contornarmos este problema utilizamos a decomposição em valores singulares (SVD) (Noble & Daniel, 1982) que permite determinar uma aproximação da matriz inversa caso ela esteja englobada por um desses casos.

Como o problema inverso é mal-posto torna-se necessária alguma forma de regularização. Por vezes utiliza-se a chamada regularização por matrizes de derivadas, onde a questão central é a determinação do parâmetro ótimo de regularização (Santos, Bassrei e Costa, 2006).

No presente trabalho, onde lidamos com o SVD, tem-se a inconveniente presença de pequenos valores que comprometem a solução do sistema. Para tanto propomos a utilização de uma quantidade ótima de valores singulares como ferramenta de regularização. A seleção realizada, para se determinar a quantidade de valores singulares a serem incorporados na matriz inversa, foi realizada por seis diferentes critérios que foram: (1) comportamento da amplitude do valor singular; (2) comportamento da derivada do valor singular; (3) erro entre os parâmetros de dado; (4) erro entre os parâmetros de modelo; (5) energia do parâmetro de modelo e (6) entropia do parâmetro de modelo.

## Metodologia

A tomografia sísmica é um tipo especial de problema inverso onde podemos estimar uma função a partir de uma integral de linha. Para a tomografia de tempos de trânsito a função a ser estimada é o campo de vagoriedade de subsuperfície. Podemos reescrever esta mesma integral de linha numa notação matricial dada por:

$$\vec{s}_{ver} = G^+ \vec{t}_{obs},$$

onde  $\vec{t}_{obs}$  é o vetor que contém os tempos de trânsito entre a fonte e o receptor,  $G^+$  é uma aproximação da inversa da matriz que contém as distâncias que os raios

percorrem no modelo, obtida a partir do traçado de raios e  $\vec{s}_{ver}$  é o vetor da vagarosidade verdadeira do meio.

A matriz  $G^+$  é obtida pela SVD uma vez que a possibilidade de se trabalhar na geofísica com uma matriz que se enquadre como quadrada e que possui posto completo é muito pequena.

A SVD é um tipo especial de decomposição de uma matriz pela qual podemos encontrar para mesma uma boa aproximação de sua inversa independentemente se a matriz não é quadrada ou não possui posto completo. Essa decomposição consiste na fatoração de uma determinada matriz como produto de outras três matrizes, dada por:

$$A = U\Sigma V^T,$$

onde  $U$  e  $V$  são matrizes ortonormais e  $\Sigma$  é uma matriz diagonal que contém os valores singulares da matriz  $A$ . Logo, podemos determinar uma inversa associada por:

$$A^+ = V\Sigma^+U^T,$$

onde  $A^+$  é a matriz pseudo-inversa de  $A$ . A solução obtida a partir da matriz inversa será tão boa quanto melhor for a escolha dos valores singulares utilizados para compor a matriz inversa. Pois, a instabilidade do sistema, razão de mal-condicionamento, aumenta com uma grandeza conhecida como número de condição (NC) definido pela razão entre o maior e o menor valor singular. Torna-se necessário então uma criteriosa seleção dos valores singulares para que seja possível recuperar um bom modelo de subsuperfície.

Esta seleção foi baseada em seis critérios: (1) comportamento da amplitude do valor singular e (2) comportamento da derivada do valor singular. Estes critérios sugerem uma seleção baseada no comportamento do valor singular somente e não de sua influência na inversão. Os demais critérios indicam uma seleção baseada na influência do valor singular na inversão. Estes são: (3) erro entre os parâmetros de dado; (4) erro entre os parâmetros de modelo; (5) energia do parâmetro de modelo e (6) entropia do parâmetro de modelo.

O erro entre os parâmetros de dado é obtido por:

$$E_d = \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{(t_i^{obs} - t_i^{cal})^2}}{N},$$

onde  $t_i^{obs}$  e  $t_i^{cal}$  são os  $i$ -ésimos tempo observado e calculado respectivamente. O erro entre os parâmetros de modelo são dados por:

$$E_m = \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{(s_i^{ver} - s_i^{est})^2}}{N},$$

onde  $s_i^{ver}$  e  $s_i^{est}$  são as  $i$ -ésimas vagarosidade verdadeira e estimada respectivamente. A energia do modelo estimado é calculada por:

$$E = \sum_{i=1}^N (s_i^{est})^2.$$

Assim como a energia do modelo estimado a entropia representa também a estabilidade do modelo escolhido, podendo ser definida por:

$$H = \sum_{i=1}^N s_i^{est} \log \frac{1}{s_i^{est}},$$

onde  $H$  é a entropia do modelo estimado.

Outro problema na tomografia de tempos de trânsito é a dependência do caminho percorrido pelo raio com o campo de vagarosidade do meio, encaixando-se como um problema não-linear. Pois, para determinarmos a vagarosidade do meio necessitamos conhecer a geometria que o raio descreve em subsuperfície, mas para tal conhecimento seria necessário saber o campo de velocidade do meio (parâmetro investigado). Para contornarmos este problema realizamos uma linearização baseada em um procedimento iterativo dado por:

$$\Delta \vec{t}_i = A \Delta \vec{s}_i,$$

onde  $\Delta \vec{t}_i$  é o vetor da diferença entre o tempo observado e o calculado na iteração  $i$ ,  $A$  é a matriz obtida pelo traçado de raio na mesma iteração e  $\Delta \vec{s}_i$  é o vetor de atualização para nova vagarosidade, obtido por:

$$\Delta \vec{s}_i = A^+ \Delta \vec{t}_i,$$

onde  $A^+$  é uma aproximação da matriz inversa de  $A$ . A nova vagarosidade considerada será definida por:

$$\vec{s}_{i+1} = \vec{s}_i + \Delta \vec{s}_i.$$

Logo, podemos partir de um modelo inicial homogêneo, para o qual os raios se comportariam como retos, e repetimos o processo iterativo até que se encontre um modelo aceitável de subsuperfície.

Para a realização do traçado de raios utilizou-se o programa desenvolvido por Schots (1990) que foi baseado no trabalho de Anderson & Kak (1982).

## Resultados

Uma vez que tentamos validar a metodologia abordada tornou-se necessário utilizar dados sintéticos, pois somente com tais dados é possível conhecer o que realmente existe em subsuperfície. As simulações numéricas foram realizadas sobre o modelo sintético mostrado na Figura 1.

O modelo possui quatro campos de velocidade distintos com uma variação que vai de 3000 a 4000 m/s. Como principais feições temos, a presença de uma falha normal, e uma heterogeneidade de alta velocidade que seria o reservatório alvo.

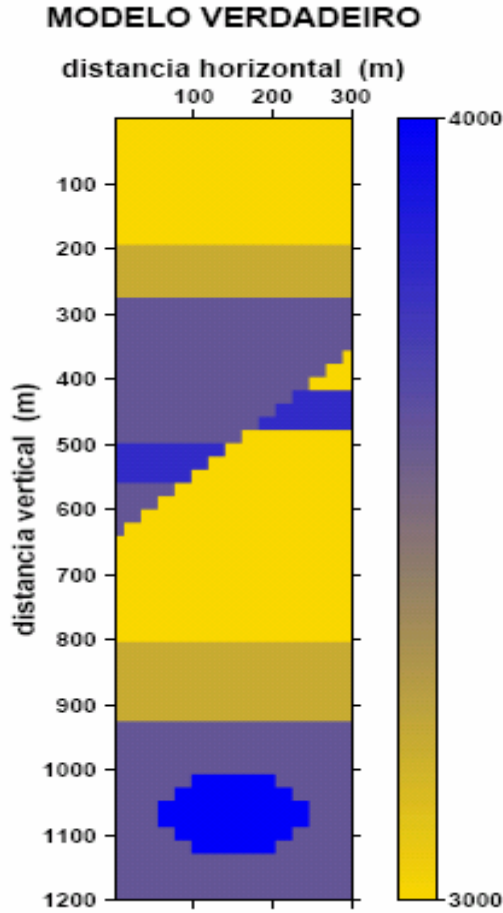


Figura 1 – Modelo Verdadeiro

O modelo foi discretizado em 15 blocos na direção horizontal e 60 blocos na direção vertical totalizando 900 blocos. Cada bloco tem formato quadrado com dimensão de 20 m. Foram simulados dois tipos de aquisição, onde estas foram do tipo poço a poço. Para o primeiro tipo de aquisição foram postos 30 fontes em um poço e 30 receptores no outro totalizando 900 raios. Dessa maneira a matriz utilizada que contém os raios é da ordem 900 x 900 formando um sistema determinado. Para a segunda aquisição, colocou-se 40 fontes em um poço e 40 receptores no outro, contabilizando 1600 raios, formando, desta forma, uma matriz de ordem 1600 x 900, logo, um sistema sobredeterminado.

A utilização de dois tipos de sistemas, determinado e sobredeterminado, foi necessária para se analisar a influência da iluminação do modelo pelos raios na obtenção da imagem de subsuperfície.

Na primeira iteração utilizou-se um modelo inicial homogêneo, para ambos os tipos de aquisição considerado. Logo, os caminhos percorridos para os diferentes raios foram modelados como sendo retos. A partir da geometria do raio obtida no problema direto partiu-se para o procedimento inverso. Nesta parte realizou-se uma inversão para cada uma das novecentas diferentes quantidades de valores singulares. Para cada inversão foi calculado o erro entre os parâmetros de dado, erro entre os parâmetros de modelo, energia do modelo estimado e entropia do modelo estimado.

As Figuras 2, 3, 4 e 5 mostram, respectivamente, o erro entre os parâmetros de dado, erro entre os parâmetros de modelo, energia do modelo estimado e entropia do modelo estimado para o sistema determinado. A partir dessas funções podemos analisar a influência do número de valores singulares na inversão.

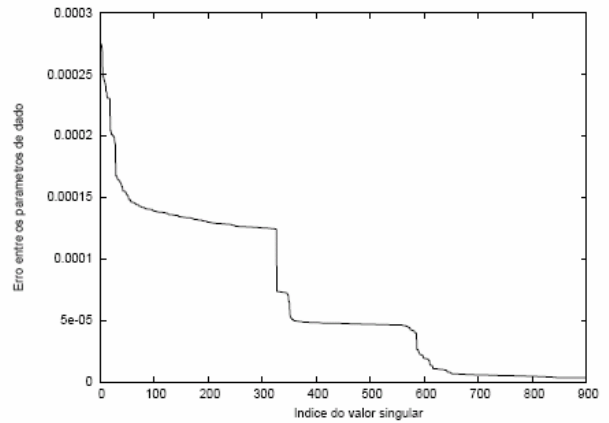


Figura 2 – Erro entre os parâmetros de dado para a primeira iteração

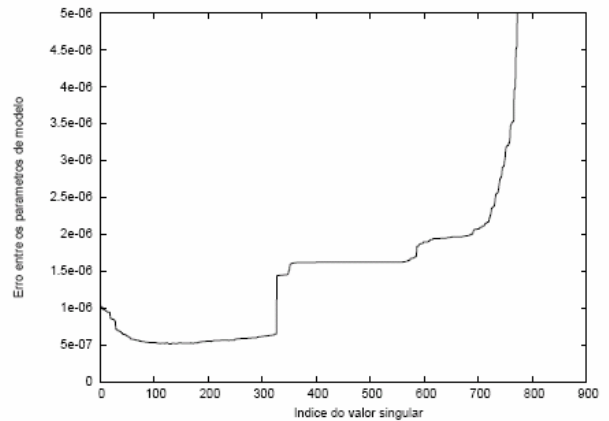


Figura 3 – Erro entre os parâmetros de modelo para a primeira iteração

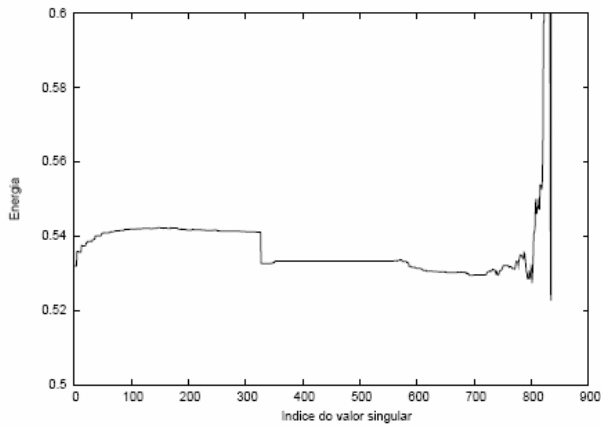


Figura 4 – Energia dos parâmetros de modelo estimado para a primeira iteração

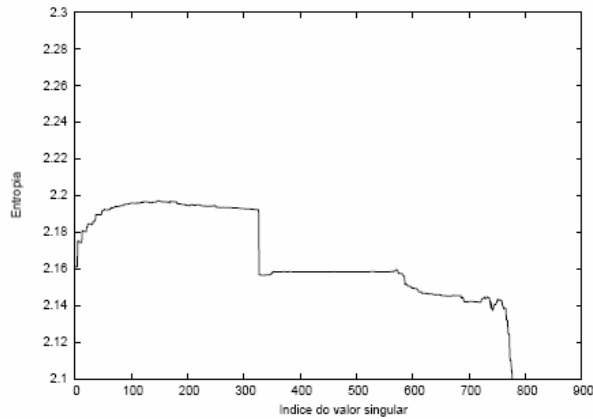


Figura 5 – Entropia dos parâmetros de modelo estimado para a primeira iteração

A partir da Figura 3, que mostra o erro entre os parâmetros de modelo, podemos perceber que o número de valores singulares utilizados para compor a matriz inversa que proporcionará um modelo estimado mais próximo do modelo verdadeiro é a quantidade de 326 valores singulares. Entretanto, esta função não pode ser considerada como um critério, pois não se conhece realmente o que há em subsuperfície, mas permitiu validar os critérios de: erro entre os parâmetros de dado, energia do modelo estimado e entropia do modelo estimado, pois eles indicaram uma mesma região de corte.

Com os valores de vagarosidade estimado realizou-se um novo traçado de raios onde começa a segunda iteração. Após a modelagem direta (traçado de raios) repetiu-se a inversão. Este procedimento foi repetido até uma terceira iteração.

A Figura 6 mostra o modelo estimado após a terceira iteração com uma suavização do seu campo de vagarosidade. Este resultado foi obtido utilizando 280 valores singulares.

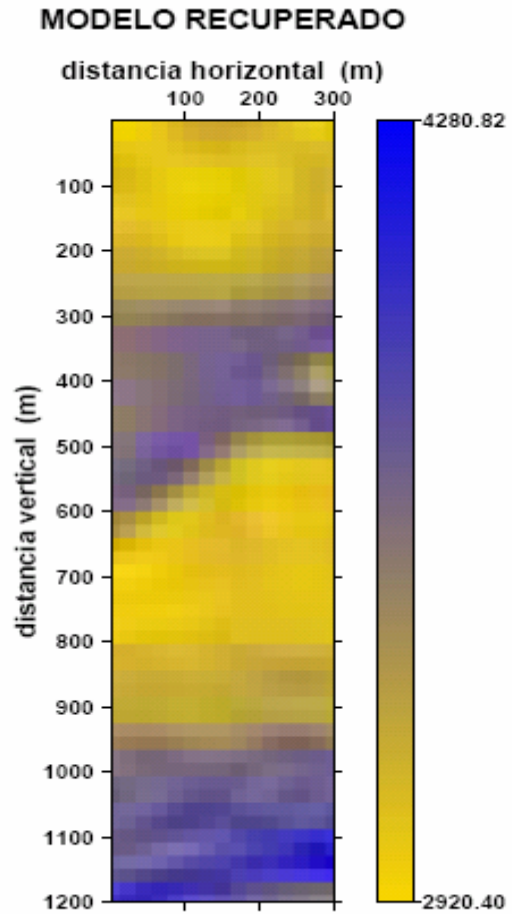


Figura 6 – Modelo estimado na terceira iteração após suavização do campo de velocidade para o caso determinado.

As Figuras 7, 8, 9 e 10 representam, para o sistema sobredeterminado na primeira iteração, respectivamente, o erro entre os parâmetros de dado, o erro entre os parâmetros de modelo, a energia do modelo estimado e a entropia do modelo estimado.

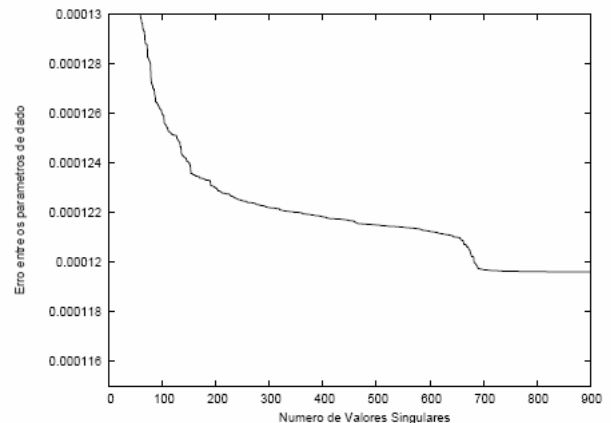


Figura 7 – Erro entre os parâmetros de dado para a primeira iteração

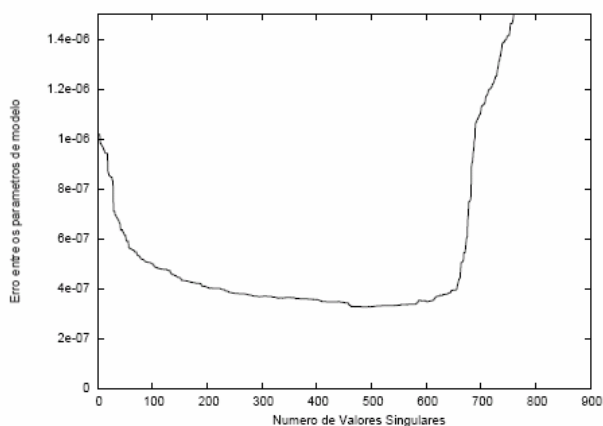


Figura 8 – Erro entre os parâmetros de modelo para a primeira iteração

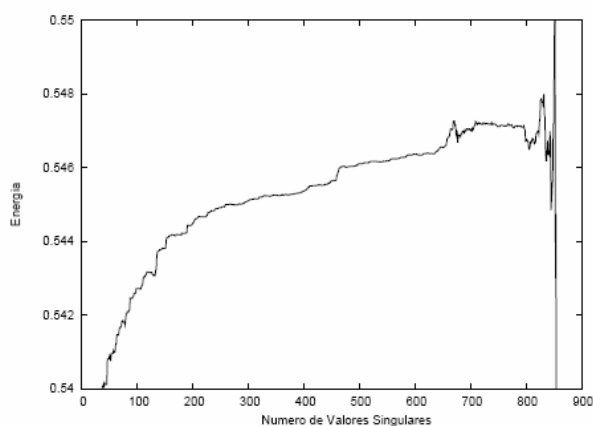


Figura 9 – Energia dos parâmetros de modelo estimado para a primeira iteração

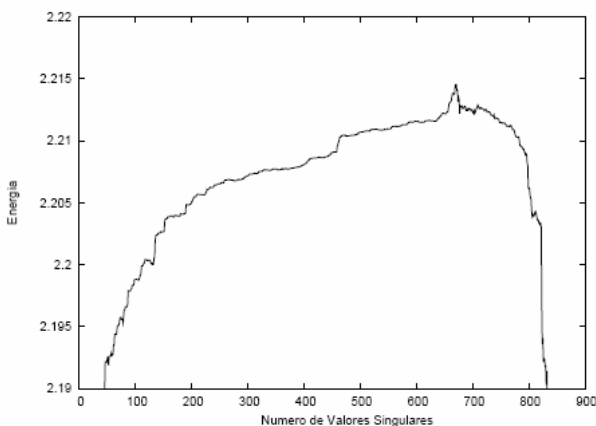


Figura 10 – Entropia dos parâmetros de modelo estimado para a primeira iteração

A partir da análise gráfica das funções podemos concluir que a quantidade ótima de valores singulares equivale a 645, pois neste ponto observa-se uma mudança brusca no comportamento do erro entre os parâmetros de dado, energia e entropia, sendo estes critérios validados pelo

erro entre os parâmetros de modelo. Repetiu-se o mesmo procedimento iterativo, utilizado no sistema determinado, até a terceira iteração.

A Figura 11 mostra o modelo estimado para o sistema sobredeterminado com 660 valores singulares sem a utilização de uma suavização do campo de velocidade, obtido na terceira inversão do procedimento iterativo.

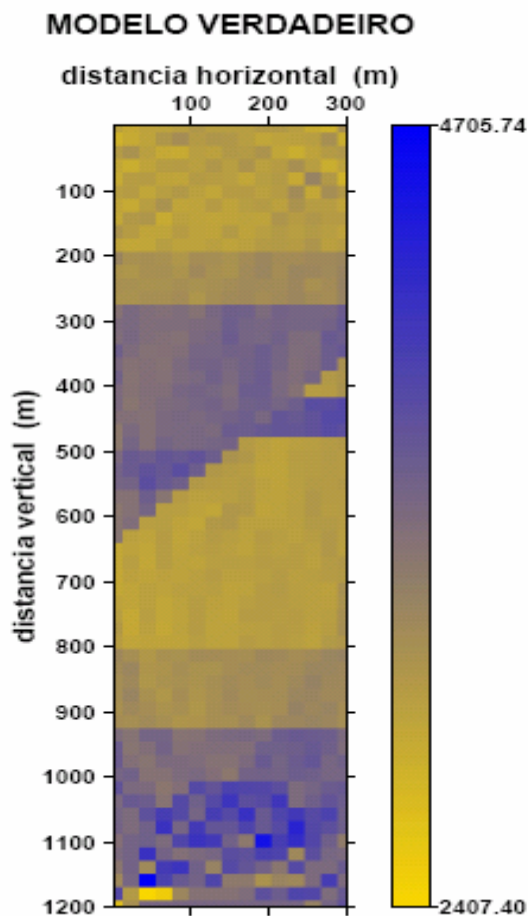


Figura 11 – Modelo estimado na terceira iteração sem suavização para o caso sobredeterminado.

A tabela abaixo mostra o erro entre os parâmetros de modelo para as diversas iterações em ambos os casos estudados (determinado e sobredeterminado) com dados influenciados por ruído gaussiano de valor 0.001 e também sem ruído.

Os valores apresentados na tabela mostram a variação do erro em função do número de iterações e do valor do ruído inserido. Entretanto, apesar dos valores serem pequenos eles não traduzem muita coisa a respeito da recuperação do modelo, uma vez que utilizamos o erro RMS absoluto.

Com os resultados mostrados podemos observar como a iluminação do modelo pelo traçado de raios é importante, assim como, a variação do erro RMS do parâmetro de

modelo em função do número de iterações e do valor de ruído inserido.

ERRO RMS DOS PARÂMETROS DE MODELO				
Quantidade de Iterações	Determinado		Sobredeterminado	
	Sem ruído	Com ruído	Sem ruído	Com ruído
Iteração 1	6.46	6.47	3.84	3.91
Iteração 2	6.44	6.45	3.56	3.62
Iteração 3	6.01	6.02	3.10	3.18

Tabela 1 – Valores do erro RMS dos parâmetros de modelo, a serem multiplicados por  $10^{-7}$ , para as diversas iterações. Simulações nos casos determinado e sobredeterminado, com e sem a influência do ruído. Unidade de vagarosidade, em *s/m*.

## Conclusões

A tomografia de tempos de trânsito é uma abordagem cinemática da tomografia sísmica, que utiliza como dado de entrada os tempos de trânsito entre as fontes e os receptores. A tomografia é um tipo de problema inverso considerado mal-posto. Na tentativa de amenizar esse mal condicionamento e obter uma solução factível utilizamos uma metodologia de seleção de valores singulares.

A partir dos resultados gerados na primeira e na segunda iteração podemos validar a metodologia de seleção de valores singulares abordada.

Devido a não utilização de um tipo especial de regularização uma quantidade relativamente alta de valores singulares tiveram que ser descartados para ser possível determinar um modelo satisfatório.

Os critérios de seleção: (1) comportamento da amplitude do valor singular e (2) comportamento da derivada do valor singular não puderam ser validados, pois indicaram uma região de corte de valores singulares na qual não era possível determinar um modelo aceitável.

A função de erro entre os parâmetros de modelo não pode ser considerada como um critério devido à falta de conhecimento do que realmente há em subsuperfície. Entretanto, é uma função importante para que pudéssemos validar a metodologia empregada.

Os demais critérios de seleção de valores singulares: (3) erro entre os parâmetros de dado, (5) energia do modelo estimado, (6) entropia do modelo estimado foram validados, uma vez que indicaram uma mesma região de corte de valores singulares coerentes com o erro entre os parâmetros de modelo.

Considerou-se também a influência da iluminação do meio pelo traçado de raio na inversão. Podemos perceber que uma melhor iluminação (caso sobredeterminado) permitiu uma melhor recuperação do

modelo analisado sem mesmo utilizar uma suavização do campo de velocidades. Logo, uma boa disposição de fontes e receptores é imprescindível para se obter uma resposta satisfatória do meio em subsuperfície.

Enfim, concluiu-se que os resultados foram satisfatórios de forma que foi possível encontrar um modelo bastante próximo do verdadeiro.

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao LAGEP/CPGG/UFBA pela utilização dos recursos computacionais, à FAPESB e ao CNPq pelo projeto 7507 (Edital Nº 06/2006 – PRONEX). C. J. M. G. Silva agradece ao Convênio UFBA/ANP-PRH 08 pela bolsa de iniciação científica. A. Bassrei agradece ao CNPq pelos projetos 484.239/2006-6 (Edital Universal MCT/CNPq 02/2006) e 308.875/2007-9 (bolsa de pesquisa).

## Referências

- Abriel, W. (2008) Reservoir Geophysics: Applications. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa.
- Anderson, A. H. and Kak, A. C. (1982) Digital ray tracing in two-dimensional refractive fields. Journal of Acoustical Society of America, vol. 72, 1953-1606.
- Noble, B. and Daniel, J. W. (1982) Algebra Linear Aplicada, University of Wisconsin and University of Texas.
- Schots, H. A. (1990) Tomografia sísmica poço a poço e poço a superfície utilizando ondas diretas, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.
- Santos, E. T. F., Bassrei, A., e Costa, J. (2006) Evaluation of L-Curve and  $\Theta$ -curve approaches for the selection of regularization parameter in anisotropic travelttime tomography, Journal of Seismic Exploration, vol. 15, 245-272.
- Silva, J. N. P. (2008) Critérios de seleção de valores singulares na inversão de dados geofísicos: aplicação em tomografia de tempos de trânsito, Trabalho de Graduação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.
- Silva, J. N. P., e Bassrei, A. (2007) Critérios de seleção de valores singulares em problemas inversos lineares: uma aplicação em tomografia de tempos de trânsito, Sítientibus (UEFS) – Série Ciências Físicas, vol. 3.