



Migração reversa no tempo usando derivadas espaciais calculadas implicitamente

Nei D. Figueiredo, Reynam Pestana, LAGEP/CPGG/UFBA e Dan Kosloff, Tel-Aviv University and Paradigm

Copyright 2009, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 11th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, August 24-28, 2009.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 11th International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Summary

Numerical solution of the acoustic wave equation is routinely used for generating synthetic seismic surveys. These simulations are also the basis of reverse time migration. In this work we applied the reverse time migration based on a new numerical scheme for the acoustic wave equation. In this scheme, recursive derivative operators are derived by an L_∞ fit in the spectral domain and the use of these derivatives operators enables to extend the reverse time migration method to shorter wave lengths. An example of reverse time migration of a synthetic data set shows that the numerical dispersion can be significantly reduced with respect to schemes based on finite differencing. We also present a salt dataset example in order to demonstrate the applicability of the new scheme proposed.

Introdução

Soluções numéricas da equação acústica da onda são bastante usadas para a geração de dados sísmicos e também para a migração reversa no tempo. A precisão e eficiência das soluções numéricas dependem dos métodos usados para aproximar as derivadas espaciais presentes na equação da onda. O método de diferenças finitas de segunda ordem é o mais rápido, porém é menos preciso, enquanto o método pseudo-espectral é mais preciso, mas relativamente lento. Em geral, existe um compromisso, para uma especificada precisão, entre precisão e eficiência. Os operadores de baixa ordem requerem um número grande de pontos na malha, com um número pequeno de operações por ponto da malha, enquanto um método de alta ordem requer menos pontos, mas com mais operações a cada ponto da malha. Experiências indicam que os esquemas de quarta e sexta ordens apresentam os melhores resultados em termos de precisão e eficiência. Por outro lado, os esquemas de ordem mais alta apresentam um efeito de saturação, onde a melhoria na precisão é pequena não justificando o custo computacional adicional.

Neste trabalho examinamos o uso de operadores de derivada segunda determinados implicitamente, visando melhorar a eficiência da migração reversa no tempo. Entretanto, durante o cálculo das derivadas, faz-se necessário a solução de sistemas de equações tri diagonais, os quais podem ser resolvidos de forma bastante eficiente, sem um maior custo computacional.

Para testar os esquemas de migração, com esses operadores implícitos, utilizamos um modelo simples com quatro refletores inclinados, gerados com diferentes intervalos de amostragem espacial, e mediante a comparação dos resultados com esquemas baseados em diferenças-finitas (Alford et al., 1974) e pseudo-espectral (Kosloff and Baysal, 1982), verificamos as respostas dos operadores quanto à dispersão numérica. Também aplicamos os mesmos esquemas de migração reversa no tempo a um modelo mais complexo, com o objetivo de demonstrar a aplicabilidade do novo esquema proposto.

Migração Reversa no tempo

A equação acústica da onda em coordenadas cartesianas, para o caso bidimensional, é dada por:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

onde $P = P(x, z, t)$ é o campo de onda, $c = c(x, z)$ é a velocidade do meio, x e z são as coordenadas espaciais e t é o tempo.

A solução (1) é utilizada na migração de seções empilhadas (afastamento nulo), que serão determinantes na interpretação e exploração sísmicas. Entretanto, é bom ressaltar que para que isso seja possível é necessário a existência de um modelo de velocidades discretizado, de modo que o campo de onda seja calculado em cada ponto da malha do modelo. Logo, para que esse cálculo seja efetuado, as derivadas parciais presentes na equação da onda devem ser aproximadas mediante a utilização de métodos numéricos.

Entre os métodos numéricos mais utilizados podemos citar o método de diferenças-finitas. Tal método efetua a discretização das derivadas parciais mediante truncamento da série de Taylor (Alford et al., 1974), permitindo assim que a equação (1), seja reescrita da seguinte maneira:

$$P_{l,k}^{n-1} = 2P_{l,k}^n - P_{l,k}^{n+1} + g \left[P_{l+2,k}^n + P_{l,k+2}^n - 16 (P_{l+1,k}^n + P_{l,k+1}^n + P_{l-1,k}^n + P_{l,k-1}^n) + 30 P_{l,k}^n + P_{l-2,k}^n + P_{l,k-2}^n \right] \quad (2)$$

Onde

$$g = \frac{c^2 \Delta t^2}{12 h^2}$$

com $\Delta x = \Delta z = h$ e o campo de onda na sua forma discreta é dado por: $P_{l,k}^n = P(l\Delta z, k\Delta x, n\Delta t)$.

Além disso, convém enfatizar que o primeiro membro da equação (2) é uma aproximação de segunda ordem para a derivada temporal e o termo entre colchetes, do segundo membro desta mesma equação, é uma aproximação de quarta ordem para as derivadas espaciais.

Outro método muito utilizado para resolver numericamente a equação da onda é o método pseudo-espectral, também conhecido como método de Fourier (Kosloff and Baysal, 1982).

Nesse método é utilizada a propriedade da derivada na transformada de Fourier para o cálculo de derivadas parciais, de acordo com a seguinte relação:

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \Leftrightarrow -k_x^2 F(k_x)$$

Logo, podemos reescrever a equação (1), adaptando-a ao método de Fourier, da seguinte maneira:

$$P_{l,k}^{n-1} = 2P_{l,k}^n - P_{l,k}^{n+1} + c^2 \Delta t^2 F^{-1} \left[-(k_x^2 + k_z^2) \right] F P_{l,k}^n \quad (3)$$

Onde F e F^{-1} representam a transformada direta e inversa de Fourier, respectivamente. Portanto, pela equação (3) vemos que o método de Fourier também utiliza o mesmo operador de diferenças-finitas de segunda ordem, como anteriormente, para aproximar a derivada segunda temporal.

Além destes dois métodos bastante utilizados, outra forma de calcular numericamente as derivadas parciais, da equação da onda, é através do esquema proposto por Kosloff et al., 2008. As derivadas espaciais de segunda ordem são obtidas usando-se um esquema com operadores de derivadas, os quais são calculados implicitamente.

Operadores espaciais implícitos

Seja uma função $P(x)$ contínua. Admitindo-se uma discretização para essa função, podemos estabelecer a seguinte notação:

$$x = jdx \Rightarrow P[j] = P(x = jdx)$$

Assim, pode-se demonstrar que uma aproximação recursiva para a derivada segunda da função $P[j]$ pode ser escrita como (Kosloff et al., 2008):

$$\frac{\partial^2 P[j]}{\partial x^2} = \frac{a_0 + a_1 \Delta_1 + a_2 \Delta_2 + \dots + a_N \Delta_N}{1 + b_1 \Delta_1 + b_2 \Delta_2 + \dots + b_M \Delta_M} P[j] \quad (4)$$

onde $\Delta_k P[j] = P[j+k] + P[j-k]$.

Considerando $M \leq N$, a equação (4) pode ser reescrita de forma equivalente:

$$\frac{\partial^2 P[j]}{\partial x^2} = (c_0 + \dots + c_{N-M} \Delta_{N-M} + \frac{d_0}{1 + \beta_0 \Delta_1} + \dots + \frac{d_{M-1}}{1 + \beta_{M-1} \Delta_1}) P[j] \quad (5)$$

Os coeficientes em (5) podem ser relacionados aos coeficientes em (4). A equação (5) é mais conveniente para efeito de cálculo, enquanto a equação (4) é mais adequada para projetar os coeficientes. Os primeiros termos $c_0 + \dots + c_{N-M} \Delta_{N-M}$, formam um operador explícito. Mas cada termo $\frac{d_j}{1 + \beta_j \Delta_1}$ resulta em um

sistema tri-diagonal de equações.

Os coeficientes a_l e b_l da equação (5) são calculados através de um ajuste no domínio espectral, de acordo com a seguinte equação:

$$-k_L^2 = a_0 + 2a_1 \cos k_L dx + 2a_2 \cos 2k_L dx + \dots + 2a_N \cos N k_L dx + 2b_1 k_L^2 \cos k_1 dx + \dots + 2b_M k_L^2 \cos M k_L dx + (-1)^L \varepsilon \quad (6)$$

onde, $L = 1 \dots N + M + 2$.

Os termos $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_M$ são os coeficientes a serem determinados e ε é o erro. Os $N+M+2$ componentes de números de onda k_L estão dentro do intervalo $0 \leq k_L < k_{\max} < \pi dx$, onde k_{\max} é definido pelo usuário. Esse valor é fornecido com o objetivo de obter o melhor compromisso entre a precisão no ajuste e o menor comprimento de onda que se pode propagar na malha com uma menor dispersão numérica. O sistema (6) é resolvido iterativamente e, em cada tempo, os valores de k_L são selecionados nos pontos extremos da função erro.

Utilizamos neste trabalho, por exemplo, um operador de derivadas com dois termos no numerador e um termo no denominador para terminar o operador de derivada espacial de segunda ordem. A partir de (5), esse operador é dado por:

$$D_x = \frac{1}{d x^2} \frac{a_0 + a_1 \Delta_x}{1 + b_1 \Delta_x} \quad (6)$$

$$= A \left(1 + \frac{B}{1 + b_1 \Delta_x} \right)$$

Para avaliar a equação (6) temos que resolver um sistema de equações. A matriz do operador $1 + b_1 \Delta x$ é tri-diagonal. Desde que a decomposição LU deste operador é pré-calculada, o cálculo da derivada segunda é obtida de forma eficiente, fazendo-se com que esse método também seja relativamente rápido em termos computacionais.

Precisão dos operadores de derivada segunda.

Consideremos a aplicação do operador de derivada espacial à função $f[j] = e^{ikjdx}$ para diferentes valores de k , e denotamos o resultado dessa aplicação como $\bar{k}^2 f[j]$. A velocidade de fase numérica normalizada é dada por $c_f = \bar{k} / k$. A velocidade de fase normalizada, para diferentes operadores, é plotada versus número de onda. Na Figura 1 fd-4 representa o operador de diferenças-finitas de 4ª ordem, enquanto 3-1, por exemplo, denota um operador obtido de (6) com $N=3$ e $M=1$, respectivamente. No caso ideal o operador deveria conseguir um valor de velocidade de fase igual a 1 até o número de onda de Nyquist, $k_f dx = \pi$. No cálculo do operador, o máximo valor do número de onda (k_{max}) foi ajustado a fornecer o máximo erro da velocidade de fase normalizada menor do que 0.5%, considerando-se a faixa $0 \leq k_L \leq k_{max}$.

Nota-se na Figura 1 que a inclusão de mais um termo implícito no operador de derivada melhora de forma significativa a sua precisão. Em particular, o operador 3-1 produz uma boa resposta. Também nota-se que o operador 3-0 tem uma resposta melhor do que o operador de diferenças-finitas de 4ª ordem, possuindo o mesmo número de coeficientes.

Resultados Numéricos:

Modelo homogêneo:

Nesta seção discutiremos os resultados obtidos na realização dos experimentos numéricos descritos anteriormente. Inicialmente, analisamos os resultados obtidos na migração de uma seção de afastamento nulo gerada com o módulo *Susynlv* – *Synthetic Linear Velocity* – do pacote SU (Seismic Unix). Os operadores utilizados foram os mesmos e as respostas com este exemplo importantes no sentido de validar as vantagens da aplicação do método implícito e seu efeito quando do aumento espacial da malha de discretização. As seções

apresentadas nas Figuras 2 e 3 possuem afastamento entre traços de 10 e 20 metros, respectivamente.

As Figuras 2a-d e 3a-d mostram imagens migradas obtidas com quarta ordem diferenças-finitas, operador implícito 2-1, operador implícito 3-1 e o método pseudo-espectral, respectivamente. Dos resultados obtidos, a dispersão numérica é mais proeminente na Figura 3a com o esquema de diferenças-finitas de 4ª ordem. Na Figura 3b do operador implícito 2-1 a dispersão é menor, enquanto é praticamente eliminada com o método implícito 3-1 (Figura 3c). O resultado da Figura 3c é quase tão bom quanto o resultado do método pseudo-espectral (Figura 3d).

Modelo SEG-EAGE:

Também testamos a aplicabilidade dos esquemas de migração com operadores implícitos em um modelo estruturalmente mais complexo – modelo SEG-EAGE. Os resultados das migrações pós-empilhamento foram obtidos, tendo como campo de velocidades o modelo do domo de sal mostrado na Figura 4. Esse modelo de sal possui 1290 amostras laterais, 300 amostras verticais e intervalo de amostragem horizontal e vertical de 12,2 m. Como entrada para o processo de migração foi utilizada a seção de afastamento nulo, mostrada na Figura 5, que possui 1290 traços, espaçamento entre traços de 12,2 m, 2504 amostras temporais e intervalo de amostragem temporal de 2 ms.

Para o modelo SEG-EAGE, foram geradas quatro seções migradas, utilizando os operadores de derivadas espaciais de segunda ordem, descritos anteriormente. Os resultados das migrações reversas no tempo, com os operadores de diferenças-finitas de 4ª ordem, operadores implícitos com 2-1 e 3-1 coeficientes e com o método pseudo-espectral, estão mostrados nas Figuras 6,7,8 e 9, respectivamente. Os resultados obtidos com os operadores implícitos são tão bons quanto os obtidos com os métodos de diferenças-finitas e pseudo-espectral. Em termos de eficiência computacional, o esquema com operador implícito 2-1 é equivalente ao esquema com diferenças-finitas e o 3-1 apresentou um tempo 1,5 vezes menor do que o método pseudo-espectral, podendo ter seu desempenho melhorado.

Discussão e conclusões

Neste trabalho foi apresentada a migração reversa no tempo de dados sísmicos, através da solução numérica da equação da onda, utilizando um novo esquema de derivadas espaciais calculadas a partir de operadores implícitos. Com respeito aos resultados obtidos com o modelo de refletores inclinados, verifica-se que o método implícito realizou a migração de seções com uma maior amostragem espacial, conseguindo resultados tão bons quanto ao obtido com o método pseudo-espectral, mas de uma maneira mais eficiente. Com relação aos experimentos realizados com o modelo do domo salino, os resultados obtidos com o método implícito são bastante parecidos aos obtidos com os de diferenças-finitas e pseudo-espectral, demonstrando assim que esses operadores podem ser aplicados com sucesso e de forma eficiente na migração de dados sísmicos.

Agradecimentos

Os dois primeiros autores agradecem ao LAGEP (Laboratório de Geofísica de Exploração de Petróleo), pela disponibilização de recursos computacionais para realização deste trabalho, e Nei Davi à ANP (Agência Nacional de Petróleo) pelo apoio através de bolsa de estudos.

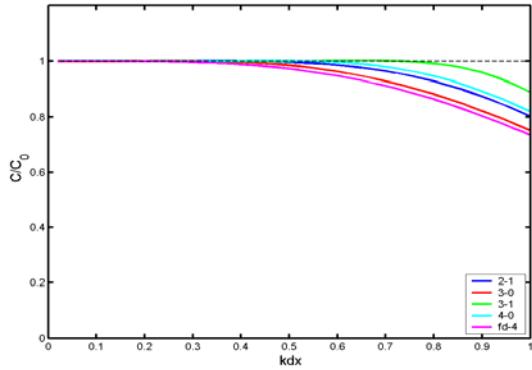


Figura 1 - Velocidade de fase normalizada versus número de onda, $k' dx = \frac{k dx}{\pi}$, para diferentes operadores de derivada de segunda ordem.

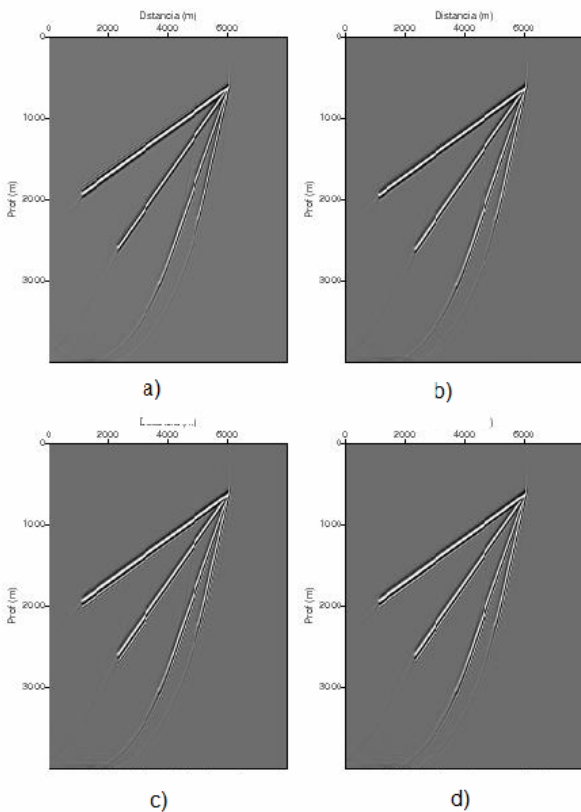


Figura 2 - Resultado da migração - modelo de refletores inclinados e afastamento entre traços de 0,01 km: Diferenças finitas de 4ª ordem (a), método implícito 2-1 (b), método implícito 3-1 (c) e pseudo-espectral (d).

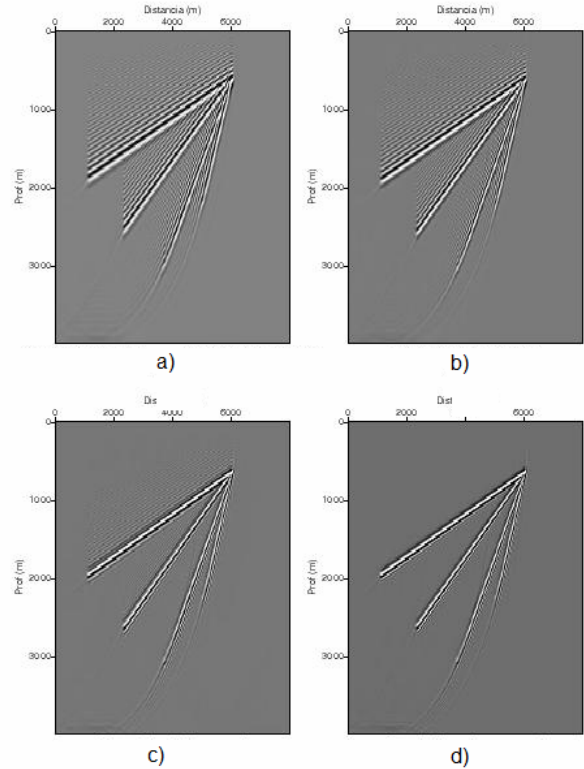


Figura 3 - Resultado da migração - modelo de refletores inclinados com afastamento entre traços de 0,02 km: Diferenças finitas de 4ª ordem (a), método implícito 2-1 (b), método implícito 3-1 (c) e pseudo-espectral (d).

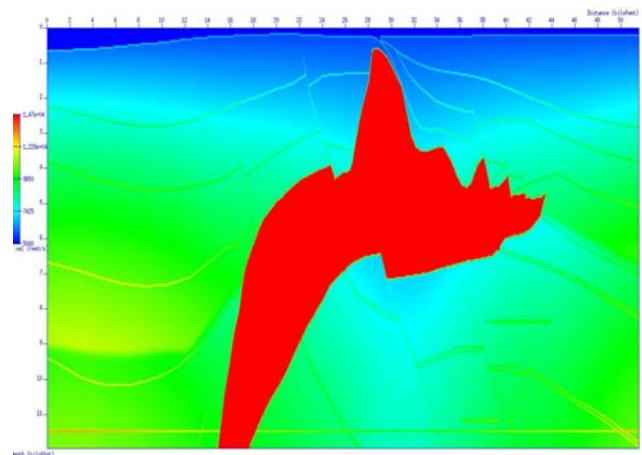


Figura 4 - Modelo de sal SEG-EAEG – campo de velocidades

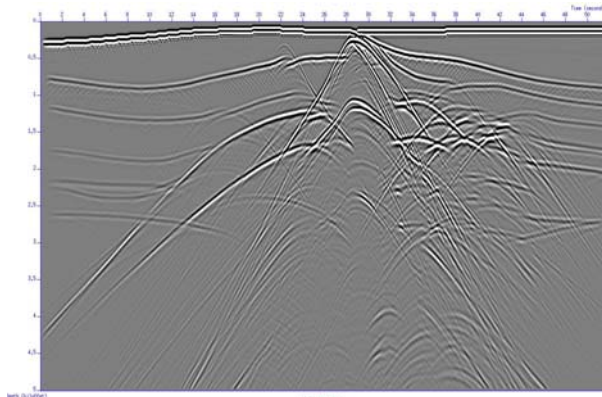


Figura 5 - Seção de afastamento nulo

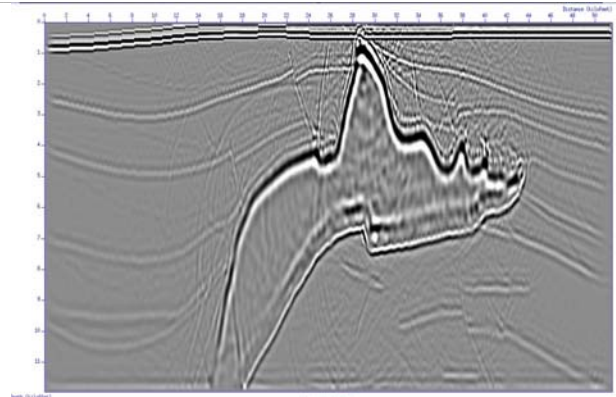


Figura 8 - Seção migrada – método implícito com 3 coeficientes

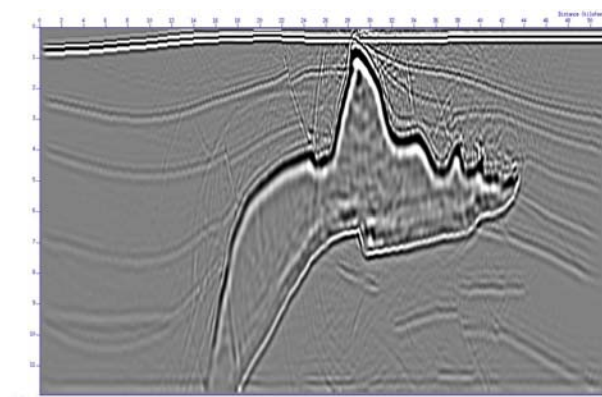


Figura 6 - Seção migrada – diferenças-finitas 4ª ordem

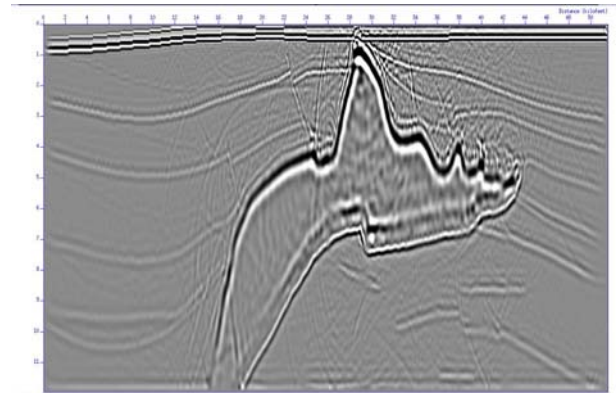


Figura 9 - seção migrada – método pseudo-espectral

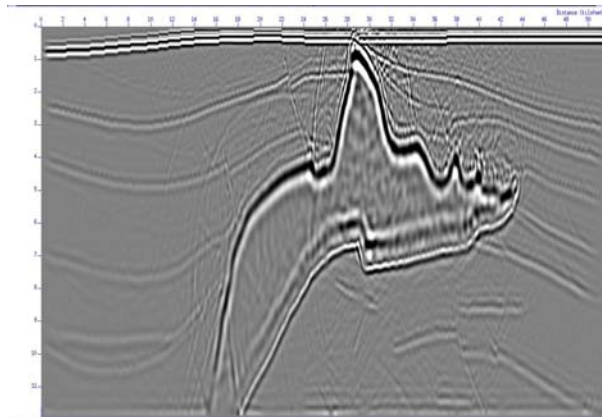


Figura 7- Seção migrada – método implícito com 2 coeficientes.

Referências

- Alford, R., Kelly, K. R., and Boore, D., 1974, Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation: *Geophysics*, **39**, 834–842
- Kosloff, J., and Baysal, E., 1982, Forward modeling by a fourier method: *Geophysics*, **47**, 1402–1412.
- Kosloff, D., Pestana, R., and Tal-Ezer, H., 2008, Numerical solution of the constant density acoustic wave equation by implicit spatial derivative operators: Expanded Abstract, SEG, 2008.