



# Crítério da Validação Cruzada Generalizada na Escolha do Parâmetro Ótimo: Aplicação em Tomografia Linear de Tempos de Trânsito

Naiane Pereira de Oliveira, IGEO/UFBA

Amin Bassrei, IF/UFBA & CPGG/UFBA

Copyright 2009, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 11<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, August 24-28, 2009.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 11<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

## Abstract

Inverse problems in Applied Geophysics are in general ill-posed. These difficulties of the inverse procedure are associated with the fact that the matrix involved is ill-conditioned. To compensate this shortcoming, it is appropriate to the use some technique of regularization. In this work we make of regularization with derivative matrices, also called smoothing, in seismic traveltimes tomography. It turns out that this method has an input parameter called the regularization parameter  $\lambda$ , whose choice is a problem. In order to select the optimum lambda we use GCV (*Generalized Cross Validation*) approach. The results with synthetic contaminated with noise, using regularization orders, attested the feasibility of this technique.

## Introdução

A geofísica de prospecção de hidrocarbonetos tem como principal objetivo a obtenção de imagens de determinadas áreas em subsuperfície como potenciais reservatórios. Sendo a sísmica a área da geofísica mais utilizada para este propósito. A tomografia foi incorporada na sísmica como método de inversão de dados gerando modelos subsuperficiais de velocidade e é conhecida pelo seu alto poder de resolução. Todavia, a inversão tomográfica é mal-condicionada necessitando, desta forma, um tratamento numérico que garanta a existência, unicidade e estabilidade da solução.

A tomografia sísmica consiste em uma técnica de reconstrução de imagem, mapeamento de propriedades físicas, por meio das somas de valores de propriedades em determinadas direções (Abriel, 2008; Terra, 2007). A tomografia clássica requer distribuição das fontes dos receptores em torno do objeto a ser imageado. Sendo que a tomografia de tempos de trânsito, ou tomografia de raio utiliza os tempos de trânsito entre fontes e receptores como vetor de dados observados na inversão e a forma da onda é desconsiderada. A reconstrução tomográfica é um tipo especial de problema inverso que permite estimar uma função utilizando integrais de linha da mesma (Bassrei, 1990), haja vista que a propagação de energia através de um meio pode ser escrita por uma integral ou a soma da média de parâmetros:

$$t_{raio} = \int_{raio} s(x, z) dl.$$

A propagação de ondas sísmicas pode ser modelada através de traçados de raios, cujo uso permite a modelagem de meios com exatidão e eficiência computacional. Dividindo o meio em células compreendidas entre fonte e receptor, estamos discretizando o meio. Com essa abordagem, são traçados raios perpendiculares às frentes de ondas representando a menor distância fonte-receptor, sendo que esta análise é válida para meios isotrópicos. Neste trabalho foram consideradas situações em que os contrastes de velocidades são relativamente baixos e o ângulo de transmissão do raio pode ser considerado constante, desta forma podemos aproximar a propagação de ondas no meio por raios retos. Em seguida aplicou-se um método de resolução de sistemas lineares para estimar um novo modelo sísmico.

$$\mathbf{d} = G\mathbf{m}.$$

Onde  $\mathbf{d}$  é o vetor de parâmetros de dados (tempos de trânsito) e  $\mathbf{m}$  é o vetor de parâmetros de modelo (vagarosidades). A matriz tomográfica  $G$  utilizada no referido trabalho tem dimensão de 900 x 800, isto é, 900 equações e 800 incógnitas. Trata-se, portanto, de um problema sobredeterminado.

## Regularização

A regularização introduz termos referentes à suavidade do modelo na função objetivo para a resolução do problema (Santos, 2006). Sendo a função objetivo:

$$\varphi(\mathbf{m}) = \mathbf{e}^T \mathbf{e},$$

onde  $\mathbf{e} = \mathbf{d} - G\mathbf{m}$ .

Estes termos têm a sua influência controlada pelo fator de regularização, podemos escolher entre soluções mais suaves com maior erro ou menos suaves com menor erro. Portanto, o que define uma boa regularização é uma boa escolha do  $\lambda$ .

Portanto, o tratamento matemático recorrido foi a regularização por matrizes de derivadas também chamada de suavização. Utilizando a definição em que  $L_n$  representa a matriz de aproximação de deriva onde  $n$  é a ordem da derivada. O valor de  $L_n$  para o vetor de parâmetros  $\mathbf{m}$ :

$$L_n = \|\mathbf{l}_n\|_2^2 = (\mathbf{D}_n \mathbf{m})^T \mathbf{D}_n \mathbf{m},$$

usando a definição do  $L_n$  define-se a função objetivo como (Bassrei and Rodi, 1990):

$$\phi(\mathbf{m}) = \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \lambda L_n,$$

realizando as devidas substituições, temos:

$$\phi(\mathbf{m}) = (\mathbf{d} - G\mathbf{m})^T (\mathbf{d} - G\mathbf{m}) + \lambda (D_n \mathbf{m})^T D_n \mathbf{m}.$$

Derivando essa função objetivo em relação ao vetor  $\mathbf{m}$ , e igualando a zero, finalmente:

$$\mathbf{m}^{est} = (G^T G + \lambda D_n^T D_n)^{-1} G^T \mathbf{d}.$$

Para o caso em que  $n = 0$  a inversão se resume aos métodos dos mínimos quadrados amortecidos. A proposta deste trabalho é a aplicação da técnica GCV para a escolha do lambda ótimo.

### Critério GCV

A técnica utilizada para a escolha do parâmetro ótimo de regularização é a Validação Cruzada Generalizada, o GCV (do inglês *Generalized Cross Validation*) que é baseado no princípio da validação cruzada, ou seja, o problema inverso regularizado é solucionado se omitindo um dado do vetor de dados por vez. Em cada realização é empregado um valor diferente e determinado do parâmetro de regularização  $\lambda$ . Se o  $\lambda$  utilizado for adequado, espera-se que o vetor de dados calculados obtidos na modelagem direta para a  $k$ -ésima interação é bem próximo do vetor de dados observados. Portanto, o parâmetro ótimo é aquele que minimiza a função (Wahba, 1990):

$$V(\lambda) = \sum_{k=1}^N \{d_k^{obs} - d_k[\mathbf{m}^k]\}^2.$$

Esta é a função de validação cruzada convencional. A mesma pode ser avaliada de um modo mais eficiente, não necessitando resolver explicitamente o problema inverso para cada observação omitida, utiliza-se a expressão seguinte (Wahba, 1990):

$$V(\lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{[d_i^{obs} - d_i(\mathbf{m}_\lambda)]^2}{[1 - A_{ii}(\lambda)]^2},$$

onde  $\mathbf{m}_\lambda = (G^T G + \lambda D_i^T D_i)^{-1} G^T \mathbf{d}^{obs}$  é a solução do problema inverso para um valor particular de  $\lambda$  e  $A_{ii}$  é o  $i$ -ésimo elemento da matriz diagonal da matriz

$$A(\lambda) = G(G^T G + \lambda D_i^T D_i)^{-1} G^T.$$

A função de validação cruzada não é invariante sob uma transformação ortogonal do sistema linear original. Desta forma o valor de  $\lambda$  que minimiza a função  $V(\lambda)$  para o problema transformado não é o mesmo  $\lambda$  que minimiza a

função  $V(\lambda)$  para o problema original, levando a resultados diferentes para dois problemas equivalentes. Por este motivo tal função foi modificada obtendo a função de validação cruzada generalizada ou GCV, dada por (Wahba, 1990):

$$GCV(\lambda) = \frac{\|\mathbf{d}^{obs} - \mathbf{d}(\mathbf{m}_\lambda)\|^2}{\{\text{traço}[I - A(\lambda)]\}^2}.$$

Na comunidade geofísica, o critério GCV foi aplicado na inversão 1-D de dados eletromagnético por Farquharson and Oldenburg (2004). Em sismologia de exploração, Santos and Bassrei (2007), utilizaram o mesmo critério em tomografia de difração.

### Simulações Numericas

Foi usado um modelo geológico sintético discretizado em 800 blocos, 20 blocos na horizontal e 40 blocos na vertical. A aquisição de dados é a geometria poço a poço, com 30 fontes no poço da esquerda e 30 receptores no poço da direita, de modo a se ter 900 raios ou 900 equações. Pode-se ver no modelo geológico uma camada de baixa velocidade (1700 m/s), a falha normal e o paleocanal (Figura 1). A inversão matricial recorrida foi a técnica de composição em valores singulares (SVD – do inglês *Singular Value Decomposition*), sem a seleção de valores singulares para que pudéssemos estudar somente o tratamento matemático realizado apenas pela suavização. O processo se realiza do seguinte modo: uma faixa arbitrária de valores para o parâmetro ótimo é utilizada, em seguida se usa um valor para cada realização, concomitantemente é calculada a função GCV em função do respectivo  $\lambda$ . A curva GCV x  $\lambda$  é traçada para a extração do parâmetro ótimo de regularização. Tal curva irá apresentar um mínimo global para o intervalo selecionado. Todas as simulações foram realizadas utilizando dados contaminados com ruído e dados sem ruído.

### Resultados

Foram geradas as curvas GCV: para regularização de ordens 0,1 e 2. O modelo sintético recuperado com o  $\lambda$  ótimo, indicado pelo método e por fim selecionado, permitiu recuperar com considerável precisão o meio, de um modo geral. Pode-se perceber que a recuperação tomográfica mais suave foi para a regularização de ordem dois e a que melhor teve qualidade foi a de ordem um.

Tais resultados obtidos foram para as regularizações sem ruído, contudo as simulações com ruído se mostraram satisfatórias uma vez que a curva GCV x  $\lambda$  apresentou comportamento similar indicando um ponto de convergência e os tomogramas com dados ruidosos se mostraram bem aceitáveis, ainda que com alguma perturbação na imagem. Os resultados obtidos foram organizados do seguinte modo:

- Ordem 0: a Figura 2 mostra a curva GCV para ordem zero obtida sem ruído e a Figura 3 mostra a reconstrução respectiva. A Figura 4 mostra a curva GCV obtida com cinco níveis de ruído e a Figura 5 mostra reconstrução para dados contaminados com ruído de um fator 0,001 para ordem zero.
- Ordem 1: a Figura 6 mostra a curva GCV para ordem um sem ruído e a Figura 7 mostra a reconstrução respectiva. A figura 8 mostra a curva GCV obtida com cinco níveis de ruído e a Figura 9 mostra reconstrução para dados contaminados com ruído de um fator 0,0005 para ordem um.
- Ordem 2: a Figura 10 mostra a curva GCV para ordem dois sem ruído e a Figura 11 mostra a reconstrução respectiva. A figura 12 mostra a curva GCV obtida com cinco níveis de ruído e a Figura 13 mostra reconstrução para dados contaminados com ruído de um fator 0,0001 para ordem dois.

### Conclusões

Neste trabalho, analisou-se a aplicabilidade da técnica GCV para a escolha do fator ótimo de suavização aplicada em tomografia de tempos de trânsito com um modelo sintético. Os modelos recuperados apresentam boa concordância com o modelo original o que indica que o fator de regularização selecionado com o uso da curva GCV permite recuperar adequadamente o modelo. Embora o método abordado seja baseado em inversão de matrizes, ele é útil para malhas tomográficas de pequeno e médio porte, ainda que o critério GCV simplifique a detecção do fator ótimo de regularização uma vez que está associado ao mínimo da curva.

### Agradecimentos

Os autores agradecem ao LAGEP/CPGG/UFBA pela utilização dos recursos computacionais, à FAPESB e ao CNPq pelo projeto 7507 (Edital N° 06/2006 – PRONEX). Naiane Oliveira agradece ao PIBIC/UFBA/CNPq pela bolsa de Iniciação Científica. A. Bassrei agradece ao CNPq pelos projetos 484.239/2006-6 (Edital Universal MCT/CNPq 02/2006) e 308.875/2007-9 (bolsa de pesquisa).

### Referências

**Abriel, W.** (2008) Reservoir Geophysics: Applications. Society of Exploration Geophysicists, Tulsa.

**Bassrei, A.** (1990) Inversão de dados geofísicos unidimensionais através da entropia relativa mínima, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

**Bassrei, A., Rodi, W.L.** 1993. Regularization and inversion of linear geophysical data. In: Proceedings of

the Third International Congress of the Brazilian Geophysical Society, Rio de Janeiro, Brazil, vol. 1, pp. 111-116.

**Farquharson, C. G. and Oldenburg, D. W.** (2004) A comparison of automatic techniques for estimating the regularization parameter in non-linear inverse problems, *Geophysical Journal International*, vol. 156, 411-425.

**Santos, E. T. F.** (2006) Inversão tomográfica sísmica anisotrópica com regularização ótima, Tese de Doutorado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

**Santos, E. T. F., and Bassrei, A.** (2007) Application of GCV in geophysical diffraction tomography, 69<sup>th</sup> European Association of Geoscientists and Engineers Conference & Exhibition, Londres, Reino Unido, 11 a 14 de junho de 2007, CD-ROM, 5 pp.

**Terra, F. A.** (2007) Aplicação da Curva L em problemas inversos: Metodologias de extração do parâmetro ótimo de regularização, Trabalho de Graduação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

**Wahba, G.** (1990) Spline Models for Observational Data, SIAM, Filadelfia.

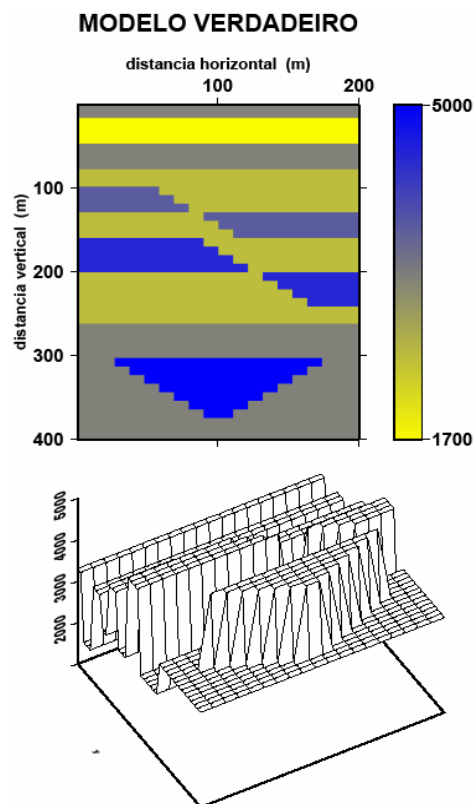
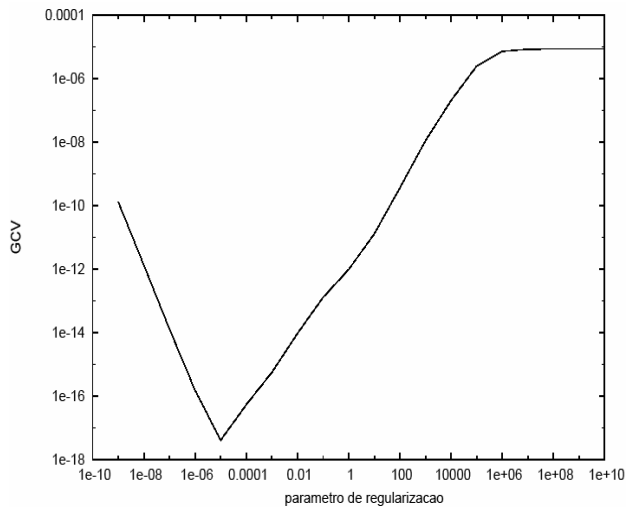
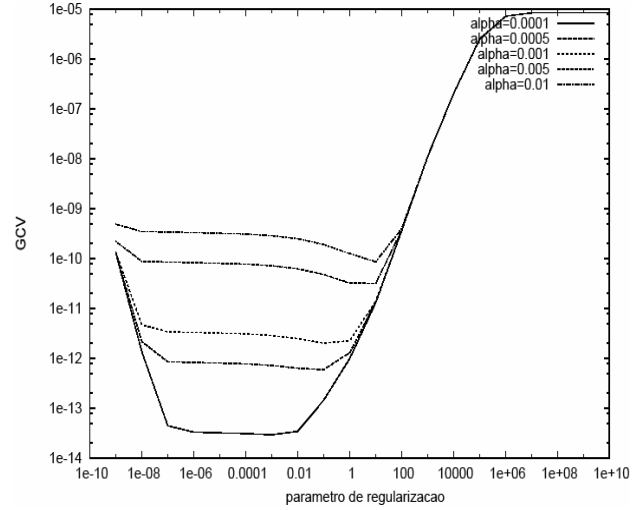


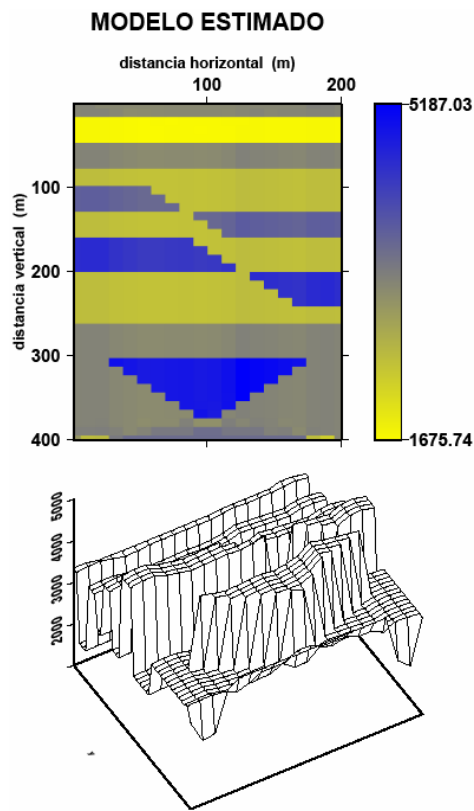
Figura 1: Modelo verdadeiro. Velocidades em m/s.



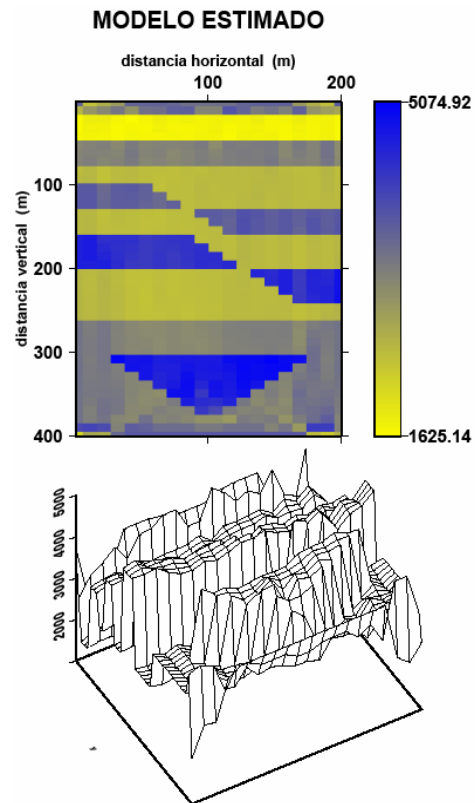
**Figura 2:** Curva GCV para regularização de ordem zero com dados livres de ruído.



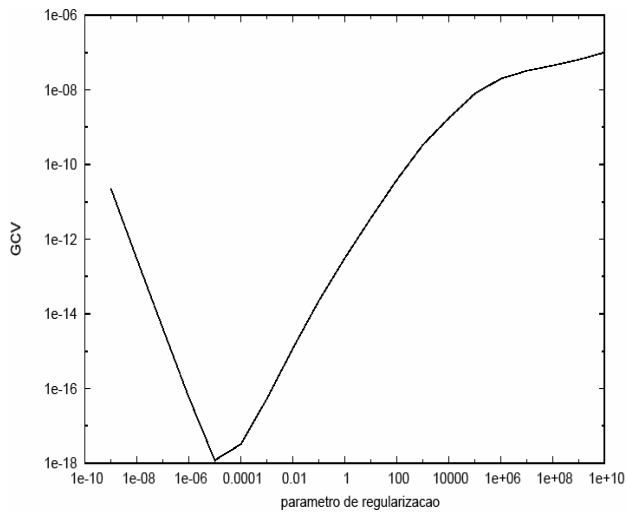
**Figura 4:** Curva GCV para regularização de ordem zero com diferentes níveis de ruído adicionado aos dados.



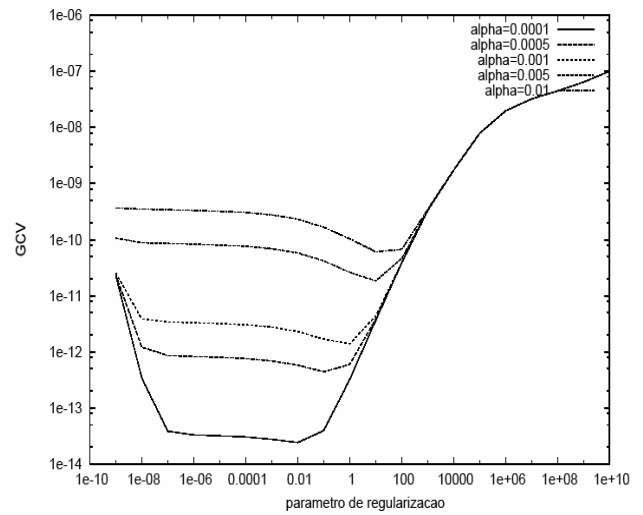
**Figura 3:** Modelo recuperado para regularização de ordem zero com dados livres de ruído.



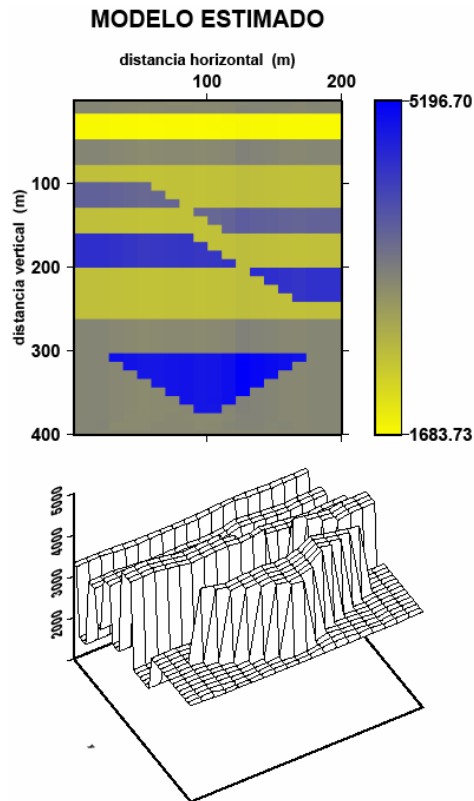
**Figura 5:** Modelo recuperado para regularização de ordem um com ruído  $\alpha = 0,001$  adicionado aos dados.



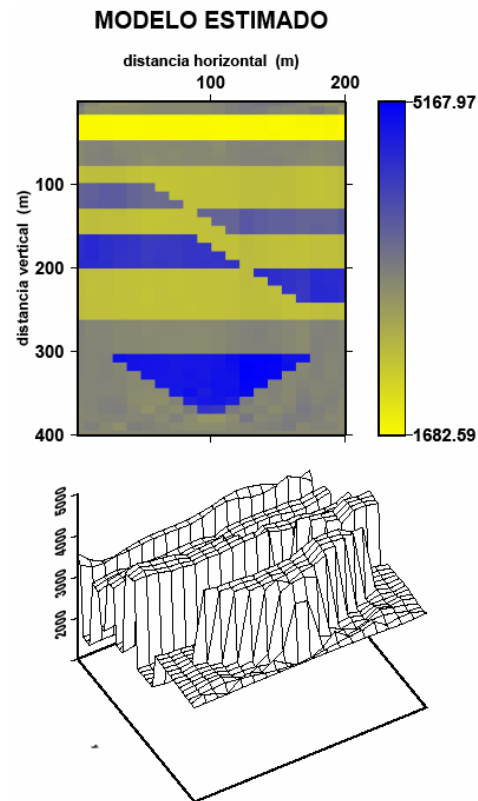
**Figura 6:** curva GCV para regularização de ordem um com dados livres de ruído.



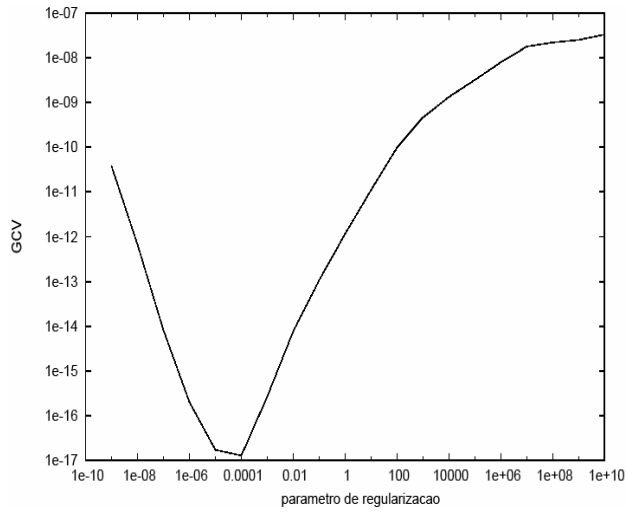
**Figura 8:** Curva GCV para regularização de ordem um com diferentes níveis de ruído adicionado aos dados.



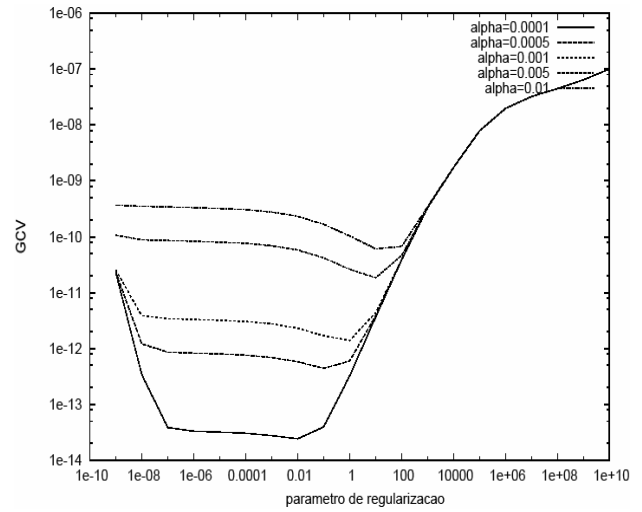
**Figura 7:** Modelo recuperado para regularização de ordem um com dados livres de ruído.



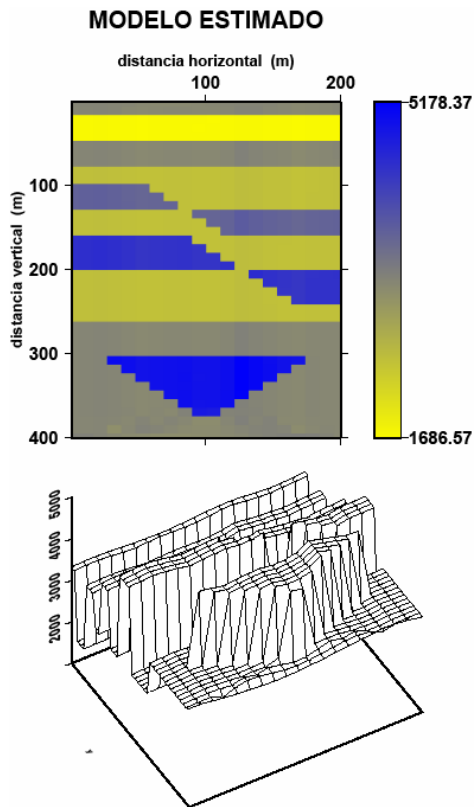
**Figura 9:** Modelo recuperado para regularização de ordem dois com ruído  $\alpha = 0,0005$  adicionado aos dados.



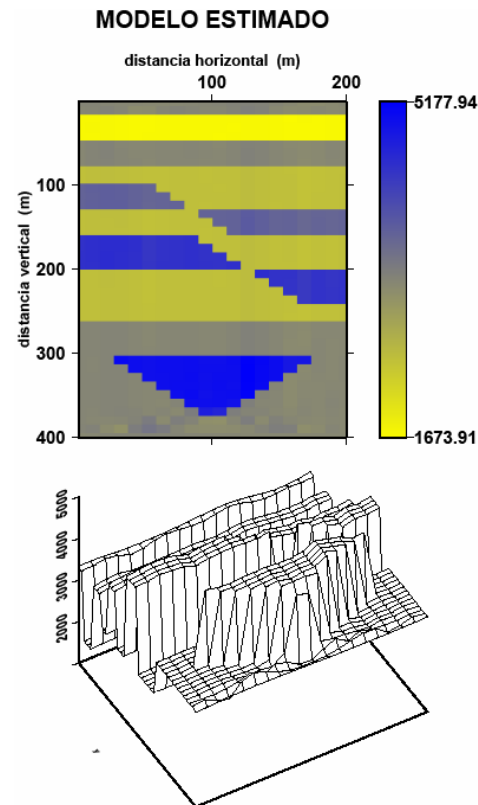
**Figura 10:** Curva GCV para regularização de ordem dois com dados livres de ruído.



**Figura 12:** Curva GCV para regularização de ordem dois com diferentes níveis de ruído adicionado aos dados.



**Figura 11:** Modelo recuperado para regularização de ordem dois com dados livres de ruído.



**Figura 13:** Modelo recuperado para regularização de ordem dois com ruído  $\alpha = 0,0001$  adicionado aos dados.