



## Propagação de pulsos em meios fracamente anisotrópicos

Rubervaldo Pereira, SEDUC & CPGF/UFPA, BRASIL.

João dos Santos Protázio, SEDUC, CPGF/UFPA, PPGME/UFPA & ESMAC, BRASIL.

Jessé Carvalho Costa, CPGF/UFPA, BRASIL.

Copyright 2009, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 11<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, August 24-28, 2009.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 11<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

### Abstract

Weakly anisotropic models have been widely used to obtain information on subsurface. Therefore, we present a study of the propagation of pulses in weakly anisotropic media. First we study a summary of the achievement of linear approximations: the vertical slowness, the vector of polarization and the reflection and transmission coefficients in such media. Then adapt the exact formulation of the scattered reflected and transmitted pulses in the case of weakly anisotropic media. Finally, we present the results in the form of synthetic seismograms by comparing the exact formulation of the approximate.

### Introdução

Modelos fracamente anisotrópicos têm sido amplamente utilizados para se obter informações de subsuperfície. Por isso apresentamos neste, um estudo da propagação de pulsos em meios fracamente anisotrópicos.

O modelo exato para propagação de pulsos em meios anisotrópicos tem sido estudado recentemente em sua forma mais geral por Protázio (1994) e Pereira (2003). Já os coeficientes de reflexão linearizados em meios fracamente anisotrópicos foram apresentados e validados por Gomes (2003).

Neste trabalho apresentamos o formalismo para estudo da propagação de pulsos, considerando meios fracamente anisotrópicos. Para tanto, primeiramente fazemos um resumo do estudo da obtenção das aproximações lineares: da vagarosidade vertical, do vetor de polarização e dos coeficientes de reflexão em tais meios. Para depois, adaptamos a formulação exata dos pulsos espalhados refletidos e transmitidos para o caso de meios fracamente anisotrópicos. Finalmente, apresentamos os resultados na forma de sismogramas sintéticos, comparando a formulação exata da aproximada.

### O Espalhamento de Pulsos em Meios Anisotrópicos

Considere dois meios elásticos anisotrópicos, separados por uma interface horizontal plana  $x_3 = 0$ , com eixo  $x_3$  orientado positivamente para baixo. Em que cada meio

está caracterizado pela sua densidade e matriz de rigidez, notados por  $\rho^{(1)}$  e  $C_{ijkl}^{(1)}$  para o meio incidente e  $\rho^{(2)}$  e  $C_{ijkl}^{(2)}$  para o meio subjacente. Seja, também, um campo de deslocamento na forma de uma onda harmônica plana e unitária, com frequência  $\omega$  e vagarosidade  $\mathbf{s}$ . Finalmente, sejam:  $s_{3Q}$  as componentes verticais da vagarosidade;  $\mathbf{n}_Q$  o vetor unitário de polarização, sendo que o subscrito  $Q$  representa o tipo de onda  $P$ ,  $S$  ou  $T$  e  $\mathbf{s}_H = s_1\mathbf{e}_1 + s_2\mathbf{e}_2$  a componente horizontal da vagarosidade.

Sob estas hipóteses, o campo de onda incidente apresenta a forma (Protázio, 1994):

$$\mathbf{w}_I(\omega) = e^{-i\omega\tau} \mathbf{N}_I \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_{3I}} \mathbf{i}(\omega), \quad (1)$$

Em que  $\tau = t - \langle \mathbf{s}_H, \mathbf{x}_H \rangle$ ,  $\mathbf{S}_{3I}$  é a matriz diagonal com as componentes verticais das vagarosidades incidentes e  $\mathbf{i}(\omega) = [F_P(\omega) \ F_S(\omega) \ F_T(\omega)]^T$  é o vetor das amplitudes das ondas incidentes no domínio das frequências. Aplicando-se a transformada de Fourier, o campo incidente pode ser expresso, no domínio do tempo, como (Protázio, 1994):

$$\mathbf{w}_I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \mathbf{N}_I \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_{3I}} \mathbf{i}(\omega) d\omega. \quad (2)$$

Já o campo refletido, no domínio do tempo, é dado por Protázio (1994) como:

$$\mathbf{w}_R(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \mathbf{N}_R^U \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_{3R}} \mathbf{R}(\omega) \mathbf{i}(\omega) d\omega \quad (3)$$

Sendo:  $\mathbf{N}_R^U$  a matriz de polarização das ondas refletidas,  $\mathbf{S}_{3R}$  a matriz diagonal com as componentes verticais das vagarosidades refletidas,  $\mathbf{R}$  a matriz com os coeficientes de reflexão das ondas espalhadas refletidas.

Finalmente o campo transmitido é dado por Protázio (1994) como:

$$\mathbf{w}_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \mathbf{N}_T^D \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_{3T}} \mathbf{T}(\omega) \mathbf{i}(\omega) d\omega \quad (4)$$

Sendo:  $\mathbf{N}_T^D$  a matriz de polarização das ondas transmitidas,  $\mathbf{S}_{3T}$  a matriz diagonal com as componentes

verticais das vagarosidades transmitidas,  $\mathbf{T}$  a matriz com os coeficientes de reflexão das ondas espalhadas refletidas.

### Perturbação dos Parâmetros Elásticos Anisotrópicos

Seja agora, um meio elástico homogêneo isotrópico, doravante chamado de meio isotrópico de referência, ou simplesmente meio de referência, com velocidades compressional e cisalhante  $\bar{\alpha} = (\alpha^{(2)} + \alpha^{(1)}) / 2$  e  $\bar{\beta} = (\beta^{(2)} + \beta^{(1)}) / 2$ , respectivamente, e densidade  $\bar{\rho} = (\rho^{(2)} + \rho^{(1)}) / 2$ ; obtidas como as médias das velocidades compressional e cisalhante  $\alpha^{(K)}$  e  $\beta^{(K)}$ ; e densidades,  $\rho^{(K)}$ , de dois meios isotrópicos (meio  $K = 1$ : semi-espaço incidente e meio  $K = 2$ : semi-espaço subjacente) separados por uma interface plana.

As perturbações de primeira ordem no meio de referência geram dois meios isotrópicos com parâmetros elásticos:

$$\tilde{C}_{ijkl}^{(K)} = \bar{C}_{ijkl} + (-1)^{(K)} \delta(C_{ijkl}^{(K)})_{ISO}, \quad (5)$$

sendo,  $\bar{C}_{ijkl}$ , os parâmetros elásticos no meio isotrópico de referência, os quais são dados, a menos da normalização do parâmetro elástico pela densidade, por Vavryčuk & Pšenčík (1998) como

$$\bar{C}_{ijkl} = \bar{\rho} (\bar{\alpha}^2 - 2\bar{\beta}^2) \delta_{ij} \delta_{kl} + \bar{\rho} \bar{\beta}^2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (6)$$

Já as perturbações de primeira ordem de (6) são obtidas considerando a hipótese de fraco contraste na interface, assim,

$$\delta(C_{ijkl}^{(K)})_{ISO} = (-1)^{(K)} [(\bar{\alpha}\Delta Z + \bar{Z}\Delta\alpha - 2\Delta G) \delta_{ij} \delta_{kl} + \Delta G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})], \quad (7)$$

Com:  $\Delta\alpha = (\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}) / 2$  e  $\Delta\beta = (\beta^{(2)} - \beta^{(1)}) / 2$  os semi-contrastes entre as velocidades compressional e cisalhante, respectivamente, na interface os quais admite-se seguindo Thomsen (1986) como  $\alpha^{(K)} = \sqrt{C_{33}^{(K)} / \rho^{(K)}}$  e  $\beta^{(K)} = \sqrt{C_{55}^{(K)} / \rho^{(K)}}$ ;  $\Delta\rho = (\rho^{(2)} - \rho^{(1)}) / 2$  o semi-contraste entre as densidades na interface;  $\bar{Z} = \bar{\rho}\bar{\alpha}$  a impedância no meio isotrópico de referência;  $\Delta Z = (Z^{(2)} - Z^{(1)}) / 2$  o semi-contraste entre as impedâncias na interface;  $\bar{G} = \bar{\mu} = \bar{\rho}\bar{\beta}^2$  o parâmetro de cisalhamento no meio de referência e  $\Delta G = (G^{(2)} - G^{(1)}) / 2$  o semi-contraste entre os parâmetros de cisalhamento na interface.

Adicionando a contribuição anisotrópica,  $\delta(C_{ijkl}^{(K)})_{ANIS}$ , à perturbação isotrópica, obtém-se a perturbação total do parâmetro elástico em cada meio,

$$\delta C_{ijkl}^{(K)} = (-1)^{(K)} \delta(C_{ijkl}^{(K)})_{ISO} + \delta(C_{ijkl}^{(K)})_{ANIS} \quad (8)$$

$$\text{com } |\delta C_{ijkl}^{(K)}| \ll \|\bar{C}_{ijkl}^{(K)}\|_{\infty}, \text{ com } \|\bar{C}_{ijkl}^{(K)}\|_{\infty} = \max |\bar{C}_{ijkl}^{(K)}|.$$

Assim a aproximação linear dos parâmetros elásticos anisotrópico em cada meio é dada de forma geral por:

$$\tilde{C}_{ijkl}^{(K)} = \bar{C}_{ijkl}^{(K)} + (-1)^{(K)} [(\bar{\alpha}\Delta Z + \bar{Z}\Delta\alpha - 2\Delta G) \delta_{ij} \delta_{kl} + \Delta G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] + \delta(C_{ijkl}^{(K)})_{ANIS} \quad (9)$$

Finalmente, na equação (9) os parâmetros  $\delta(C_{ij}^{(K)})_{ANIS}$  são definidos de forma tal que satisfaçam os critérios das medidas de anisotropia de Thomsen (1986), ou seja: (1) simplificar equações; (2) serem adimensionais; e (3) na ausência desta perturbação, que sejam anulados e cada meio torne-se um isotrópico. Assim:

$$\delta(C_{11}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{11}^{(K)} - \rho^{(K)} (\alpha^{(K)})^2}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2};$$

$$\delta(C_{12}^{(K)} + 2C_{66}^{(K)})_{ANIS} = \frac{(C_{12}^{(K)} + 2C_{66}^{(K)}) - \rho^{(K)} (\alpha^{(K)})^2}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2};$$

$$\delta(C_{13}^{(K)} + 2C_{55}^{(K)})_{ANIS} = \frac{(C_{13}^{(K)} + 2C_{55}^{(K)}) - \rho^{(K)} (\alpha^{(K)})^2}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2};$$

$$\delta(C_{22}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{22}^{(K)} - \rho^{(K)} (\alpha^{(K)})^2}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2};$$

$$\delta(C_{23}^{(K)} + 2C_{44}^{(K)})_{ANIS} = \frac{(C_{23}^{(K)} + 2C_{44}^{(K)}) - \rho^{(K)} (\alpha^{(K)})^2}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2} \quad (10)$$

$$\delta(C_{33}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{33}^{(K)} - \rho^{(K)} (\alpha^{(K)})^2}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2};$$

$$\delta(C_{44}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{44}^{(K)} - \rho^{(K)} (\beta^{(K)})^2}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2};$$

$$\delta(C_{55}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{55}^{(K)} - \rho^{(K)} (\beta^{(K)})^2}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2};$$

$$\delta(C_{14}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{14}^{(K)}}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2}; \quad \delta(C_{15}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{15}^{(K)}}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2};$$

$$\delta(C_{16}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{16}^{(K)}}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2}; \quad \delta(C_{24}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{24}^{(K)}}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2};$$

$$\delta(C_{25}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{25}^{(K)}}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2}; \quad \delta(C_{26}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{26}^{(K)}}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2};$$

$$\delta(C_{34}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{34}^{(K)}}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2}; \quad \delta(C_{35}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{35}^{(K)}}{\bar{\rho}\bar{\alpha}^2};$$

$$\delta(C_{36}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{36}^{(K)}}{\rho\alpha^2}; \delta(C_{45}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{45}^{(K)}}{\rho\alpha^2};$$

$$\delta(C_{46}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{46}^{(K)}}{\rho\alpha^2} \text{ e } \delta(C_{56}^{(K)})_{ANIS} = \frac{C_{56}^{(K)}}{\rho\alpha^2}.$$

Feito isto, definem-se os semi-contrastes entre as perturbações anisotrópicas na interface, ou seja,

$$\Delta C_{ijkl} = \left( \delta(C_{ijkl}^{(2)})_{ANIS} - \delta(C_{ijkl}^{(1)})_{ANIS} \right) / 2. \quad (11)$$

### Linearização da Matriz de Christoffel

Seja então, primeiramente, uma onda plana incidente  $P$ , incidindo a um ângulo  $\theta$  em relação à direção vertical  $x_3$ .

Usando-se coordenadas esféricas  $(\theta, \varphi = 0)$ , as componentes do vetor de vagarosidade desta onda são dadas por:  $s_1 = \sin \theta / \bar{\alpha}$ ;  $s_2 = 0$ ;  $s_3 = \cos \theta / \bar{\alpha}$ .

Considere-se, também, a matriz de Christoffel do meio isotrópico de referência,  $\bar{\Gamma} - \bar{\rho}\bar{\mathbf{I}}$ . A perturbação da matriz de Christoffel,  $\Delta(\Gamma - \rho\mathbf{I})$ , gera a matriz de Christoffel aproximada, ou seja:

$$(\tilde{\Gamma} - \tilde{\rho}\mathbf{I}) = (\bar{\Gamma} - \bar{\rho}\mathbf{I}) + \Delta(\Gamma - \rho\mathbf{I}). \quad (12)$$

Neste texto, seguindo Gomes (2003), explicita-se  $\Delta(\Gamma - \rho\mathbf{I})$  utilizando-se as aproximações dos parâmetros elásticos obtidas no tópico anterior.

Em primeiro lugar, a perturbação isotrópica da matriz de Christoffel,  $\Delta(\Gamma - \rho\mathbf{I})_{ISO}$ , é obtida dos parâmetros elásticos aproximados em (9), somente com a contribuição isotrópica, os quais são substituídos na matriz  $\bar{\Gamma} - \bar{\rho}\bar{\mathbf{I}}$  para, com isso, obter a contribuição isotrópica da matriz de Christoffel perturbada cujos elementos são:

$$\Delta(\Gamma_{11} - \rho)_{ISO} = \bar{\rho} \left[ \sin^2 \theta \left( \frac{\Delta Z}{\bar{Z}} + \frac{\Delta \alpha}{\bar{\alpha}} \right) + \kappa^2 \cos^2 \theta \frac{\Delta G}{\bar{G}} - \frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}} \right];$$

$$\Delta(\Gamma_{12})_{ISO} = 0;$$

$$\Delta(\Gamma_{13})_{ISO} = \bar{\rho} \left[ \sin \theta \cos \theta \left( \frac{\Delta Z}{\bar{Z}} + \frac{\Delta \alpha}{\bar{\alpha}} - \kappa^2 \frac{\Delta G}{\bar{G}} \right) \right];$$

$$\Delta(\Gamma_{22} - \rho)_{ISO} = \bar{\rho} \left[ \kappa^2 \frac{\Delta G}{\bar{G}} - \frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}} \right];$$

$$\Delta(\Gamma_{23})_{ISO} = 0;$$

$$\Delta(\Gamma_{33} - \rho)_{ISO} = \bar{\rho} \left[ \cos^2 \theta \left( \frac{\Delta Z}{\bar{Z}} + \frac{\Delta \alpha}{\bar{\alpha}} \right) + \kappa^2 \sin^2 \theta \frac{\Delta G}{\bar{G}} - \frac{\Delta \rho}{\bar{\rho}} \right]. \quad (13)$$

A seguir, a contribuição anisotrópica da perturbação de primeira ordem da matriz de Christoffel,  $\Delta(\Gamma - \rho\mathbf{I})_{ANIS}$ , bem como a perturbação da vagarosidade vertical,  $\Delta S_{3P}$ , é obtida da matriz de Christoffel,  $\Gamma_{ik} = c_{ijkl} s_l s_j$ , cujos elementos são (Gomes, 2003):

$$\Delta\Gamma_{ii} = \Delta C_{ijkl} s_j s_l + C_{ijkl} \Delta s_j s_l + C_{ijkl} s_j \Delta s_l. \quad (14)$$

### Perturbação da Componente Vertical da Vagarosidade

De posse da matriz  $\Delta(\Gamma - \rho\mathbf{I})$ , resolve-se o problema de autovalor para obtenção das contribuições isotrópica e anisotrópica da perturbação  $\Delta S_{3P} / \bar{S}_{3P}$ , ou seja,

$$\frac{\Delta S_{3P}}{\bar{S}_{3P}} = \left( \frac{\Delta S_{3P}}{\bar{S}_{3P}} \right)_{ISO} + \left( \frac{\Delta S_{3P}}{\bar{S}_{3P}} \right)_{ANIS}. \quad (15)$$

ou de forma explicita como:

$$\left( \frac{\Delta S_{3P}}{\bar{S}_{3P}} \right)_{ISO} = -\sec^2 \theta \frac{\Delta \alpha}{\bar{\alpha}}, \quad (16)$$

e

$$\left( \frac{\Delta S_{3P}}{\bar{S}_{3P}} \right)_{ANIS} = - \left( \sin^2 \theta \tan^2 \theta \frac{\Delta C_{11}}{2} + \sin^2 \theta \Delta(C_{13} + 2C_{55}) + 2 \sin^2 \theta \tan \theta \Delta C_{15} + 2 \sin \theta \cos \theta \Delta C_{35} + \cos^2 \theta \frac{\Delta C_{33}}{2} \right)$$

Para incidências ( $\theta$ ) e azimutes ( $\varphi$ ) arbitrários as perturbações dos parâmetros elásticos da equação (17) devem ser rotacionadas (Helbig, 1994) de forma tal que fique com a forma geral.

De posse destes resultados, a componente vertical linear do vetor de vagarosidade da onda espalhada  $P$ , para os dois meios anisotrópicos é definida fazendo-se:

$$\tilde{S}_{3P}^{(K)} \approx \frac{\Delta S_{3P}}{\bar{S}_{3P}} \left( 1 + (-1)^{(K)} \frac{\Delta S_{3P}}{\bar{S}_{3P}} \right). \quad (18)$$

sendo  $\bar{S}_{3P} = \bar{\alpha} / \cos(\theta)$  a componente da onda espalhada  $P$  da vagarosidade vertical de uma onda incidente  $P$  no meio de referência.

### Perturbação do Vetor de Polarização

Seguindo a metodologia de se separar a perturbação em termos isotrópico e anisotrópico espera-se que a perturbação do vetor de polarização tenha a forma:

$$\Delta \mathbf{n}_P = (\Delta \mathbf{n}_P)_{ISO} + (\Delta \mathbf{n}_P)_{ANIS} \quad (19)$$

Para tanto, considere o sistema de equações de Christoffel no meio de referência  $(\bar{\Gamma} - \bar{\rho}\mathbf{I}) \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{0}$ . A

aproximação de primeira ordem desta equação matricial é:

$$\Delta(\mathbf{r} - \rho\mathbf{l})\bar{\mathbf{n}}_p + (\bar{\mathbf{r}} - \bar{\rho}\mathbf{l})\Delta\mathbf{n}_p = \mathbf{0} \quad (20)$$

sendo:  $\bar{\mathbf{n}}_p = (n_{1P}, n_{2P}, n_{3P})^T = (\sin\theta, 0, \cos\theta)^T$  o vetor da polarização da onda incidente  $P$  no meio de referência.

Após as devidas substituições, o vetor  $\Delta\mathbf{n}_p$  apresenta as perturbações isotrópicas e anisotrópicas das suas componentes, ou seja:

$$\begin{aligned} (\Delta n_{1P})_{ISO} &= \frac{\Delta\alpha}{\alpha} \sin\theta, \quad (\Delta n_{2P})_{ISO} = 0 \text{ e} \\ (\Delta n_{3P})_{ISO} &= -\frac{\Delta\alpha}{\alpha} \sin\theta \tan\theta \end{aligned} \quad (21)$$

e

$$\begin{aligned} (\Delta n_{1P})_{ANIS} &= \frac{1}{(1-\kappa^2)} \left\{ \sin^3\theta \left[ 2 - (1+\kappa^2)\sin^2\theta \right] \frac{\Delta C_{11}}{2} + \right. \\ &\sin^2\theta \cos\theta \left[ 3 - 2(1+\kappa^2)\sin^2\theta \right] \Delta C_{15} + \\ &\sin\theta \cos^2\theta \left[ 1 - (1+\kappa^2)\sin^2\theta \right] \Delta(C_{13} + 2C_{55}) - \\ &\cos^3\theta \left[ 1 - 2(1+\kappa^2)\sin^2\theta \right] \Delta C_{35} - \\ &\left. \sin\theta \cos^4\theta (1+\kappa^2) \frac{\Delta C_{33}}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (\Delta n_{2P})_{ANIS} &= \frac{1}{(1-\kappa^2)} \left\{ \Delta C_{16} \sin^3\theta + \right. \\ &\Delta(C_{14} + 2C_{56}) \cos\theta \sin^2\theta + \\ &\Delta(C_{36} + 2C_{45}) \cos^2\theta \sin\theta + \\ &\left. \Delta C_{34} \cos^3\theta \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

e

$$(\Delta n_{3P})_{ANIS} = -(\Delta n_{1P})_{ANIS} \tan\theta. \quad (24)$$

Para ângulos arbitrários de incidência,  $\theta$ , e azimutal,  $\varphi$ , as perturbações dos parâmetros elásticos nas equações (22), (23) e (24) devem ser rotacionadas para se obter a fórmula geral da contribuição anisotrópica das perturbações das componentes do vetor de polarização da onda  $P$ .

### Amplitudes Refletidas e Transmitidas Linearizadas

Considerando apenas meios anisotrópicos sujeitos as hipóteses iniciais de nosso trabalho, Gomes (2003), usando as equações de Zoeppritz generalizadas,

$$\begin{cases} \mathbf{N}\mathbf{i} + \mathbf{N}_R\mathbf{r} = \mathbf{N}_T\mathbf{t} \\ \mathbf{Z}\mathbf{i} + \mathbf{Z}_R\mathbf{r} = \mathbf{Z}_T\mathbf{t}. \end{cases} \quad (25)$$

que tem como uma das soluções explícita,

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (\mathbf{Z}_T - \mathbf{Z}_R \mathbf{N}_R^{-1} \mathbf{N}_T)^{-1} (\mathbf{Z}_I - \mathbf{Z}_R \mathbf{N}_R^{-1} \mathbf{N}_I) \mathbf{i} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{N}_R^{-1} (\mathbf{N}_T \mathbf{t} - \mathbf{N}_I \mathbf{i}). \end{aligned} \quad (26)$$

linearizou (29):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{N}}_R \Delta \mathbf{r} - \bar{\mathbf{N}}_T \Delta \mathbf{t} &= 2 \Delta \mathbf{N} \mathbf{i} \\ \bar{\mathbf{Z}}_R \Delta \mathbf{r} - \bar{\mathbf{Z}}_T \Delta \mathbf{t} &= 2 \Delta \mathbf{Z} \mathbf{i}, \end{aligned} \quad (27)$$

e obteve as soluções:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{R} &= +2 (\bar{\mathbf{Z}}_R - \bar{\mathbf{Z}}_T \bar{\mathbf{N}}_T^{-1} \bar{\mathbf{N}}_R)^{-1} (\Delta \mathbf{Z} - \bar{\mathbf{Z}}_T \bar{\mathbf{N}}_T^{-1} \Delta \mathbf{N}) \mathbf{i} \\ \Delta \mathbf{T} &= -2 (\bar{\mathbf{Z}}_T - \bar{\mathbf{Z}}_R \bar{\mathbf{N}}_R^{-1} \bar{\mathbf{N}}_T)^{-1} (\Delta \mathbf{Z} - \bar{\mathbf{Z}}_R \bar{\mathbf{N}}_R^{-1} \Delta \mathbf{N}) \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (28)$$

para a perturbação dos coeficientes de reflexão e transmissão na interface. Sendo que  $\mathbf{i}$  corresponde à amplitude da onda incidente;  $\Delta \mathbf{N} = (\delta \mathbf{N}_T - \delta \mathbf{N}_I) / 2$  e

$\Delta \mathbf{Z} = (\delta \mathbf{Z}_T - \delta \mathbf{Z}_I) / 2$  os respectivos contrastes médios entre as matrizes de polarização e de impedância dos meios; as matrizes  $\bar{\mathbf{N}}_K$  e  $\bar{\mathbf{Z}}_K$  são as matrizes de polarização e impedância, respectivamente, no meio isotrópico de referência. O subscrito  $K = R$  ou  $T$  indica o tipo de onda se refletido ( $R$ ) ou transmitido ( $T$ ). As matrizes de impedância são da forma:  $\bar{\mathbf{Z}}_K = \mathbf{B} \bar{\mathbf{N}}_K + \mathbf{C} \bar{\mathbf{N}}_K \bar{\mathbf{S}}_{3K}$ .

Assim, as equações aproximadas para coeficientes de reflexão  $R_{pp}$  e transmissão  $T_{pp}$  são escritos como função das chamadas: flutuação da impedância,  $\Delta Z / \bar{Z}$ , flutuação da velocidade da onda  $P$ ,  $\Delta\alpha / \bar{\alpha}$ , e flutuação do módulo de cisalhamento,  $\Delta G / \bar{G}$ , (Margrave & Stewart, 2001). Explicitamente, as contribuições isotrópicas destes coeficientes são:

$$(R_{PP})_{ISO} = \Delta Z + \Delta\alpha \tan^2(\theta) - 4\kappa^2 \Delta G \sin^2(\theta) \quad (29)$$

e

$$(T_{PP})_{ISO} = 1 - \Delta Z + \Delta\alpha \tan^2(\theta). \quad (30)$$

As formas explícitas para as contribuições anisotrópicas da aproximação dos coeficientes de reflexão,  $R_{pp}$ , e transmissão,  $T_{pp}$ , para azimute,  $\varphi = 0$  são:

$$\begin{aligned} (R_{PP})_{ANIS} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \Delta C_{11} \sin^2\theta \tan^2\theta + \right. \\ &\left[ \Delta(C_{13} + 2C_{55}) - 4\Delta C_{55} \right] \sin^2\theta + \\ &\left. \frac{1}{2} \Delta C_{33} \cos^2\theta \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

e

<sup>1</sup> Não confundir  $\Delta Z$  com  $\Delta \mathbf{Z}$ .

$$\begin{aligned}
 (T_{PP})_{ANIS} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \Delta C_{11} (2 + \cos 2\theta) \sin^2 \theta \tan^2 \theta + \right. \\
 & \Delta (C_{13} + 2C_{55}) \cos 2\theta \sin^2 \theta + \\
 & \frac{1}{2} \Delta C_{33} (-2 + \cos 2\theta) \cos^2 \theta \\
 & \left. + 4(\Delta C_{15} - \Delta C_{35}) \cos \theta \sin^3 \theta \right\}.
 \end{aligned} \quad (32)$$

Para ângulos arbitrários de incidência,  $\theta$ , e azimutal,  $\varphi$ , as perturbações dos coeficientes de reflexão e transmissão (31) e (32) devem ser rotacionadas para obtenção da fórmula geral.

### O Espalhamento de Pulsos em Meios Anisotrópicos

Sejam agora dois meios elásticos fracamente anisotrópicos, separados por uma interface horizontal plana em  $x_3 = 0$ , de fracos contrastes entre as propriedades dos meios. Cada meio caracterizado pela sua densidade e matriz de rigidez, notados por  $\rho^{(1)}$  e  $C_{ijkl}^{(1)}$  para o semi-espaço incidente e  $\rho^{(2)}$  e  $C_{ijkl}^{(2)}$  para o semi-espaço subjacente. Convenciona-se que o eixo  $x_3$  está orientado positivamente para baixo. Sejam também, os campos de onda incidente, refletido e transmitido no domínio do tempo, como apresentados em (1), (2) e (3), respectivamente.

Fazendo-se uso das grandezas linearizadas, ou seja: da componente da onda  $P$  espalhada da vagarosidade vertical,  $\tilde{s}_{3P}$ ; do vetor da polarização aproximado da onda espalhada  $P$ ,  $\tilde{n}_P$ , e do coeficiente de reflexão linearizado,  $R_{PP}$ , apresentarei aproximações para os pulsos refletido e transmitido.

Substituindo na equação (2) as grandezas linearizadas supracitadas, a aproximação do campo refletido espalhado de uma onda incidente  $P$ , no domínio do tempo, é obtida, cuja forma é:

$$\begin{aligned}
 w_{R_P}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \tilde{n}_P e^{i\omega x_3 \tilde{s}_{3P}} R_{PP} \mathbf{i}(\omega) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \tilde{n}_P R_{PP} F_P e^{-i\omega \tilde{s}_{3P} x_3} d\omega
 \end{aligned} \quad (34)$$

Sendo,  $F_P$  componente  $P$  da amplitude da onda incidente.

De forma semelhante, adaptando a equação (3) obtém-se a aproximação para o campo transmitido de uma onda espalhada  $P$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
 w_{T_P}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \mathbf{n}_P e^{i\omega x_3 \tilde{s}_{3P}} T_{PP} \mathbf{i}(\omega) d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \mathbf{n}_P T_{PP} F_P e^{-i\omega \tilde{s}_{3P} x_3} d\omega
 \end{aligned} \quad (35)$$

Com isto podemos modelar todo o espalhamento dos pulsos de uma onda plana  $P$  em uma interface plana, de fracos contrastes, que separa dois semi-espaços fracamente anisotrópicos.

### Experimentos

Sob as hipóteses deste texto, são gerados sismogramas sintéticos de ondas planas como experimentos para validação das equações. Estes sismogramas são computados no domínio  $(s_1, s_2, \omega)$ , sendo os resultados transformados para o domínio  $(s_1, s_2, t)$  e apresentados

no domínio  $(t, s)$ , com:  $s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$ ;

$s_1 = \sin \theta \cos \varphi / \bar{\alpha}$ ;  $s_2 = \sin \theta \sin \varphi / \bar{\alpha}$  e  $\bar{\alpha}$ , a velocidade compressional do meio de referência. A assinatura no tempo  $t$  do pulso incidente é dada pela função  $f(t) = \sin(\omega_c t)$ , sendo  $\omega_c$  a frequência do pulso, que nos experimentos é tomada como 25Hz.

O modelo usado (Vavrycuk e Psencik, 1998) é formado por uma interface plana separando dois semi-espaços sendo, o semi-espaço sobrejacente isotrópico com parâmetros:  $\rho = 2,65g/cm^3$ ,  $\alpha = 4km/s$  e  $\beta = 2,31km/s$ ; e o semi-espaço subjacente um HTI fraturado "dry crack" (Hudson, 1881) com anisotropia de aproximadamente 20% ( $\epsilon \times 100\%$  seguindo Thomsen (1986)) e parâmetros:  $\rho = 2,6g/cm^3$ ,  $\alpha = 4km/s$  e  $\beta = 2,31km/s$  para a rocha não fraturada, porém com densidade de fratura de 0,05 e relação entre eixos de  $10^{-4}$ . A matriz de parâmetros elásticos para o referido modelo é dada por:

$$\begin{pmatrix}
 31,1 & 10,35 & 10,35 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
 & 40,43 & 12,68 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
 & & 40,43 & 0,0 & 0,0 & 0,0 \\
 & & & 13,87 & 0,0 & 0,0 \\
 & & & & 12,38 & 0,0 \\
 & & & & & 12,38
 \end{pmatrix} (km/s)^2.$$

Os parâmetros para do meio isotrópico homogêneo de referência são:  $\bar{\rho} = 2,625g/cm^3$ ,  $\bar{\alpha} = 3,9718km/s$  e  $\bar{\beta} = 2,2459km/s$ .

Os sismogramas sintéticos, tanto exatos quanto aproximados, de reflexões e transmissões, foram calculados de um em um grau para ângulos de incidência,  $\theta$ , no intervalo  $[0^\circ, 40^\circ]$ ; e para azimutes

$\varphi = 15^\circ$  para exemplificar a validade dos mesmos. A interface está a uma profundidade  $h = 0,5 \text{ km}$  e os sismogramas, tanto exato (vermelho) quanto aproximado (preto) estão apresentados nas Figuras 1a e 1b. Note que os mesmos foram projetados no plano de incidência, por isso não apresentam eventos na componente  $y$ .

## Resultados

Observamos nos experimentos que os modelos são ótimos aproximar propagação de pulsos em meios fracamente anisotrópicos com erro bastante pequeno em relação ao modelo exato.

## Conclusões

Temos apresentado um formalismo para o estudo da propagação de pulsos, considerando meios fracamente anisotrópicos. Primeiramente fizemos um resumo do estudo da obtenção das aproximações lineares: da vagarosidade vertical, do vetor de polarização e dos coeficientes de reflexão em tais meios para depois, adaptarmos a formulação exata dos pulsos espalhados refletidos e transmitidos para o caso de meios fracamente anisotrópicos. Finalmente, apresentamos os resultados na forma de sismogramas sintéticos, comparando a formulação exata da aproximada e auferindo a robustez do modelo.

## Referencias

**Gomes, E.N.S.**, 2003. Estimativas de parâmetros elásticos de meios anisotrópicos. Belém, Universidade Federal do Pará, Centro de Geociências, Pós-Graduação em Geofísica, 76p. (Tese de Doutorado)

**Helbig, K.**, 1994. Foundations of anisotropy for exploration seismic. Amsterdam, Pergamon. 485p.

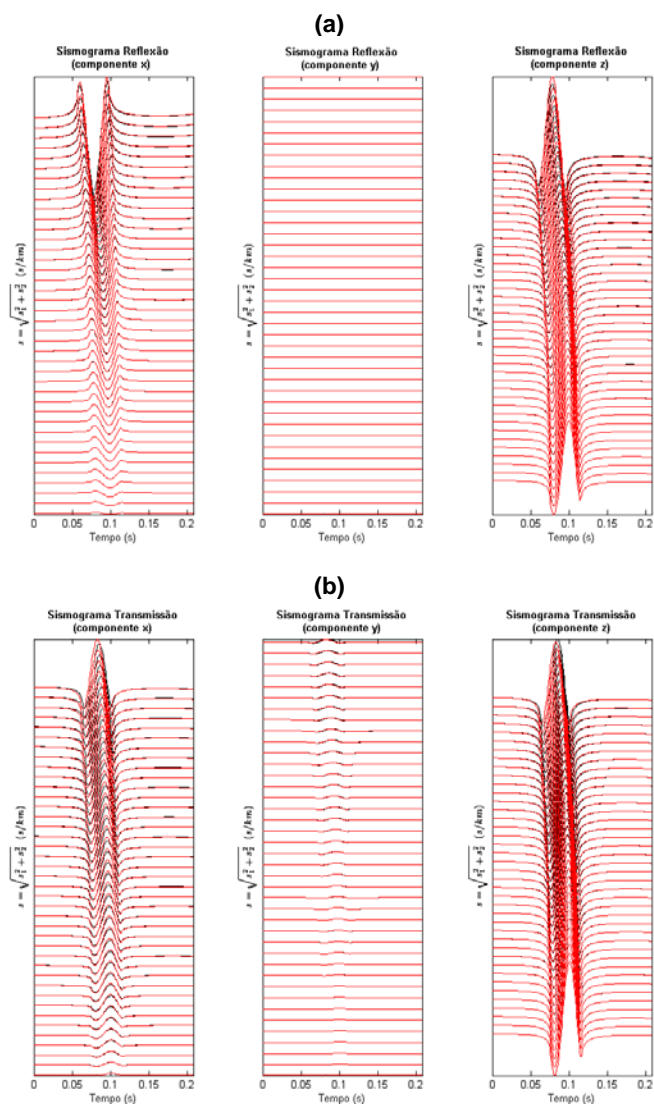
**Margrave, G.F. Stewart, R.R.**, 2001. Joint P-P and P-S seismic inversion. CREWES Research Report, Vol. 13.

**Pereira, R.M.**, 2003. Propagação de Pulsos em meios anisotrópicos. Belém, Universidade Federal do Pará, Centro de Geociências, Pós-Graduação em Geofísica, 66p. (Tese de Mestrado)

**Protázio, J.S.**, 1994. Espalhamento elástico em meios anisotrópicos estratificados. Belém, Universidade Federal do Pará, Centro de Geociências, Pós-Graduação em Geofísica, 262p. (Tese de Doutorado)

**Thomsen, L.**, 1986. Weak elastic anisotropy. Geophysics, **51**(10): 1954-1966.

**Vavryčuk, V. & Pšenčík, I.**, 1998. PP-wave reflection coefficients in weakly anisotropic elastic media. Geophysics, **63**(6): 2129-2141.



**Figura 1** Sismograma sintético exato (vermelho) e aproximado (preto) para modelo de subsuperfície isotrópico-TIV, para ângulos de incidência  $0^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$ , sendo (a) reflexão e (b) transmissão.