



## Modelagem Sísmica Com a Equação da Onda Anti-Dispersiva

Wellington Carlos da R. Nascimento\* e Reynam C. Pestana, CPPP/UFBA, Brasil

Copyright 2009, SBGF - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 11<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, August 24-28, 2009.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 11<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGF, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

### Summary

In this paper we show that the anti-dispersion wave equation presented by Liu et al. (2008) can be derived directly from the wave equation presented by Deng and McMechan (2007). This anti-dispersion wave equation is in fact the standard wave equation with an additional anti dispersion term. Using two numerical examples we demonstrated using the anti-dispersion wave equation that the numerical dispersion presented in the standard wave equation is significantly attenuated. Moreover, when it is solved using finite difference leading to a much more accurate scheme that works like a higher order finite difference scheme but with little additional computation effort.

### Introdução

A exploração de hidrocarbonetos com a sísmica de reflexão utiliza imagens da subsuperfície para localizar possíveis acumulações de óleo e gás. Essas imagens são obtidas a partir do processo de migração sísmica que, no caso da migração reversa no tempo, utiliza a equação da onda completa. Para solucionar a equação da onda numericamente, geralmente, utiliza-se o método das diferenças finitas que se baseia no truncamento da série de Taylor com as aproximações desejadas para as derivadas temporal e espacial.

No entanto, quase sempre, a solução numérica dessa equação vem acompanhada de erros numéricos, ou seja, dispersão numérica, que acabam por contaminar os sinais sísmicos. Contudo, é possível amenizar a dispersão numérica utilizando-se operadores de diferenças finitas de ordens elevadas ou, ainda, diminuindo-se o espaçamento da grade utilizada na simulação computacional. Entretanto, o custo computacional cresce substancialmente.

Deng e McMechan (2007) apresentaram uma equação da onda com um termo adicional que consegue compensar as perdas devido à propagação e evitar a dispersão causada pelas aproximações na descrição do modelo físico. Recentemente, Liu et al. (2008) propuseram uma nova equação da onda que foi chamada de equação da onda anti-dispersiva. Essa equação tem um novo termo e quando a solucionamos, usando esquemas de diferenças finitas, mesmo com operadores de baixa ordem, a dispersão numérica é atenuada de forma bastante significativa.

Nesse trabalho mostramos que a nova equação da onda, denominada de equação da onda anti-dispersiva, proposta recentemente por Liu et al. (2008), tem uma grande semelhança com a equação da onda apresentada por Deng e McMechan (2007). Nossas simulações numéricas demonstram que é possível diminuir consideravelmente os problemas causados pela dispersão numérica, além de tomar os algoritmos de modelagem numérica mais eficiente do ponto de vista computacional.

Utilizando operadores de diferenças-finitas apresentamos alguns resultados numéricos, obtidos a partir da solução da onda anti-dispersiva, e mostramos que a energia dispersada, relativa aos números de onda mais altos, são atenuados e, assim, resultando em um novo esquema de diferenças-finitas mais preciso e com um menor custo computacional.

### Equação da Onda Anti-Dispersiva

A equação da onda acústica com densidade constante, tradicionalmente empregada para realizar a modelagem de dados sísmicos, é dada por:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p \quad (1)$$

onde,  $p = p(x, z, t)$  é o campo de onda nas coordenadas espaciais  $(x, z)$ , no tempo  $t$  e  $v = v(x, z)$  é a velocidade de propagação da onda no meio. Aqui o operador  $\nabla^2$  representa as derivadas segundas em relação às coordenadas espaciais  $(x, z)$ .

No trabalho de Deng e McMechan (2007) a equação da onda apresentada tem a seguinte forma:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\Psi g}{v} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2)$$

onde,

$$g = \frac{2pf}{vQ} \quad (3)$$

é o coeficiente de absorção,  $f$  a frequência de referência,  $Q$  um fator relacionado às perdas e  $\Psi$  ao tipo de propagação. No domínio de Fourier a equação (2) torna-se:

$$\frac{1}{v^2}(-w^2)\hat{p} = -k^2\hat{p} - \frac{\Psi g}{v}(iW)\hat{p} \quad (4)$$

onde  $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ . Após algumas manipulações algébricas, lembrando-se que  $w = 2pf$ , a equação (4), depois de aplicar a transformada de Fourier inversa, será dada por:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p + \frac{I\Psi}{2pvQ} \frac{\partial(\nabla^2 p)}{\partial t} \quad (5)$$

A equação proposta por Liu et al. (2008), denominada de equação anti-dispersiva, é dada por:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \nabla^2 p + \frac{s}{v} \frac{\partial(\nabla^2 p)}{\partial t} \quad (6)$$

Se considerarmos que:

$$s = \frac{I\Psi}{2pQ} \quad (7)$$

então percebemos, facilmente, que a equação (5) é exatamente igual à equação (6).

#### Solução de onda plana

A solução da equação (1) é a seguinte solução de onda plana:

$$p(\mathbf{k}, t) = ae^{i(wt + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + be^{i(wt - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (8)$$

Então, pode ser provado que a função definida abaixo (Liu et al. 2008)

$$\bar{p}(\mathbf{k}, t) = e^{-\frac{sk^2 vt}{2}} \{ae^{i(jt + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} + be^{i(jt - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}\} \quad (9)$$

será uma solução da equação (6). Aqui

$$j(k) = w \sqrt{1 - \frac{S^2 k^2}{4}} \quad (10)$$

No caso de  $S$  ser um número pequeno, podemos considerar  $j = w$  e a equação (9) se reduz a:

$$\bar{p}(\mathbf{k}, t) = e^{-\frac{sk^2 vt}{2}} p(\mathbf{k}, t) \quad (11)$$

Agora, podemos aproximar a exponencial da equação (11) usando série de Taylor e, assim, temos:

$$\bar{p}(\mathbf{k}, t) = \left\{1 - \frac{(Svt)}{2}k^2 + \frac{(Svt)^2}{2 \cdot 2!}k^4 - \dots\right\} p(\mathbf{k}, t) \quad (12)$$

Considerando-se apenas os primeiros termos e aplicando a transformada inversa de Fourier, podemos expressar a equação (12) como:

$$\bar{p}(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}, t) - \frac{Svt}{2} [F^{-1}(k_x^2 + k_z^2)F] p(\mathbf{x}, t) + \dots \quad (13)$$

onde os operadores  $F$  e  $F^{-1}$  são as transformadas de Fourier direta e inversa, respectivamente.

Sendo assim, percebemos que a equação da onda anti-dispersiva tem como primeiro termo a solução da equação da onda (1) mais os termos onde o operador Laplaciano é ponderado pela constante  $S$ .

#### Solução da equação da onda anti-dispersiva por diferenças finitas

A equação (1) e a equação (6) podem ser solucionadas pelo método explícito de diferenças finitas. Tomando-se o campo de onda na sua forma discreta:

$$p_{i,j}^n = p(i\Delta x, j\Delta z, n\Delta t) \quad (14)$$

então a equação (6) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{1}{v_{i,j}^2} \frac{\partial^2 p_{i,j}^n}{\partial t^2} = \nabla^2 p_{i,j}^n + \frac{s}{v_{i,j}} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 p_{i,j}^n) \quad (15)$$

A primeira derivada temporal na equação (15) pode ser calculada utilizando-se uma aproximação de segunda ordem. Sendo assim, a equação (15) passa a ter a seguinte forma:

$$\frac{1}{v_{i,j}^2} \frac{\partial^2 p_{i,j}^n}{\partial t^2} = \nabla^2 p_{i,j}^n + \frac{s}{v_{i,j}} \left( \frac{\nabla^2 p_{i,j}^n - \nabla^2 p_{i,j}^{n-1}}{\Delta t} \right) \quad (16)$$

Em seguida, usando as seguintes definições

$$b_{i,j} = \frac{s}{v_{i,j} \Delta t} \quad (17)$$

e

$$a_{i,j} = 1 + b_{i,j} \quad (18)$$

então, a equação (16) pode ser reescrita na forma:

$$p_{i,j}^{n+1} = 2p_{i,j}^n - p_{i,j}^{n-1} + r_{i,j} [a_{i,j} \nabla^2 p_{i,j}^n - b_{i,j} \nabla^2 p_{i,j}^{n-1}] \quad (19)$$

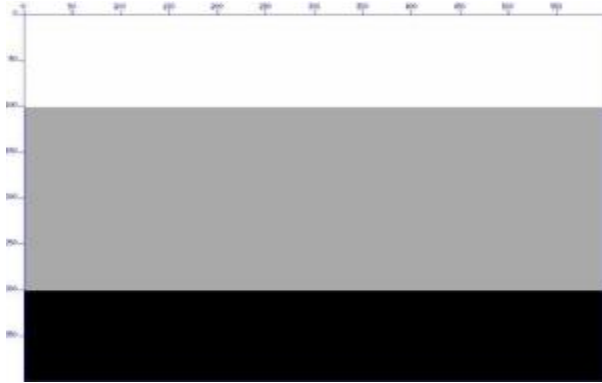
onde  $r_{i,j} = (v_{i,j} \Delta t)^2$ .

A equação (19) é a equação da onda anti-dispersiva na qual utilizamos operadores de diferenças finitas de segunda ordem para a derivada segunda no tempo. Podemos notar que se  $b$  for igual a zero, a equação (19) é a solução também por diferenças finitas de segunda ordem no tempo para a equação da onda convencional dada pela equação (1).

#### Resultados Numéricos

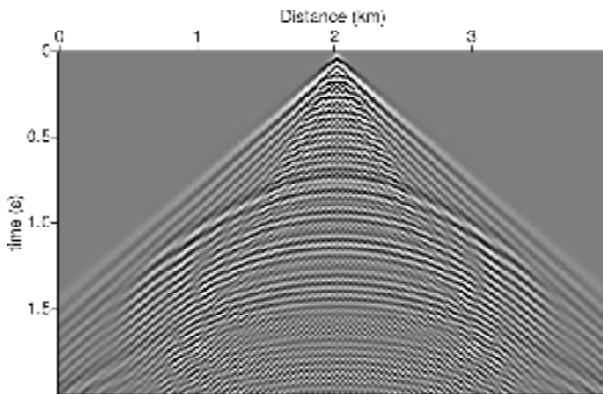
As soluções numéricas da equação da onda convencional, dada pela equação (1), e da equação da

onda anti-dispersiva, dada pela equação (6), foram obtidas utilizando-se o método das diferenças finitas. Os esquemas de diferenças finitas usados foram testados considerando-se dois modelos sintéticos. No modelo 1, mostrado na Figura 1, temos um modelo de três camadas com velocidades constantes de 1500 m/s, 2500 m/s e 4500 m/s do topo para a base, respectivamente.



**Figure 1:** Modelo 1 de velocidades com três camadas com velocidades de 1500 m/s, 2500 m/s e 4500 m/s.

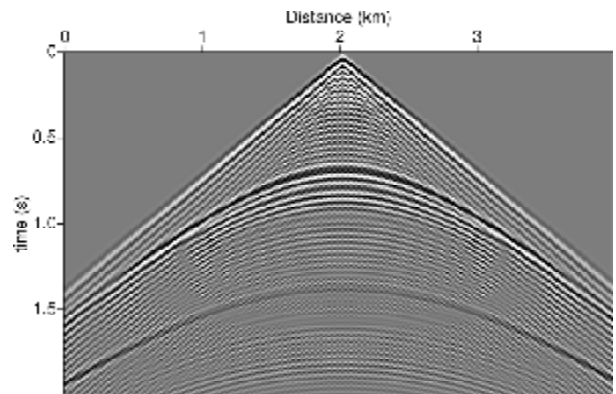
A solução numérica para o modelo 1, dado pela Figura 1, utilizando a equação da onda convencional, é mostrada na Figura 2. Nesse caso, utilizamos a equação (19) com  $b = 0$ . Para os operadores Laplacianos da equação (19) consideramos uma aproximação de diferenças finitas de 2ª ordem. O resultado, como bem mostra a Figura 2, é um sismograma com muita dispersão numérica.



**Figure 2:** Família de tiros para o modelo 1 utilizando a equação da onda convencional com uma aproximação de diferenças finitas de 2ª ordem para o Laplaciano.

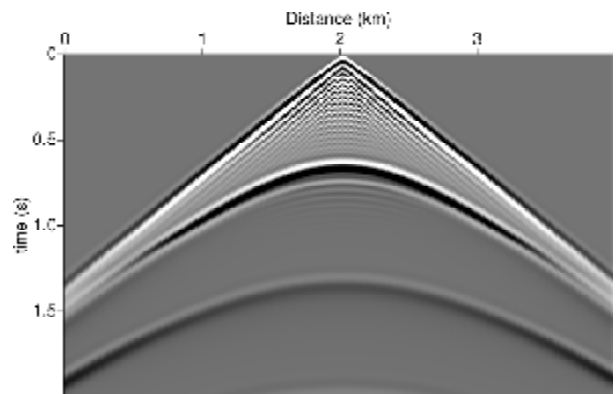
Na Figura 3 percebemos que a dispersão numérica foi levemente atenuada, porém, para tal, fizemos uma aproximação de 7ª ordem para solucionarmos a equação da onda convencional. É óbvio que para esse caso o custo computacional se eleva bastante. A atenuação pode ainda ser melhorada, se elevarmos ainda mais a

ordem dos operadores de diferenças finitas, porém o custo computacional aumenta drasticamente.



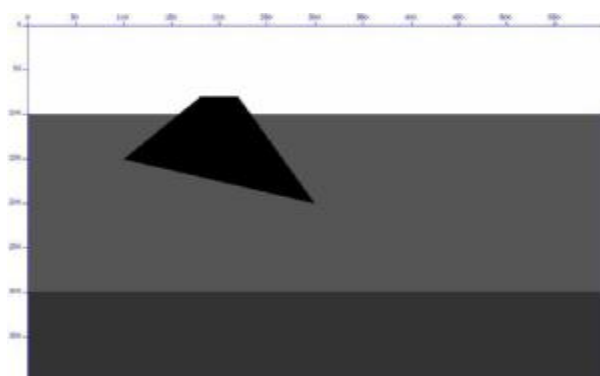
**Figure 3:** Família de tiros para o modelo 1 utilizando a equação da onda convencional com uma aproximação de diferenças finitas de 7ª ordem para o Laplaciano.

Quando utilizamos a equação da onda anti-dispersiva conseguimos atenuar de maneira bastante significativa a dispersão numérica, sem, no entanto, elevar o custo computacional. Pelo contrário, com um operador de diferenças finitas de ordem menor conseguimos um resultado muito melhor. Isso pode ser verificado na Figura 4, onde solucionamos a equação da onda anti-dispersiva, dada pela equação (19), com  $b \neq 0$ , utilizando, neste caso, uma aproximação de 4ª ordem para as derivadas espaciais.



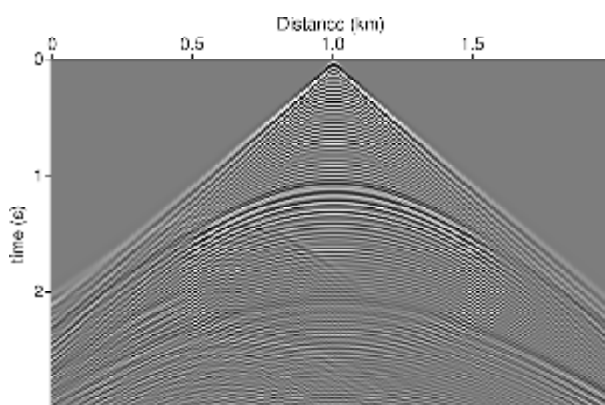
**Figure 4:** Família de tiros para o modelo 1 utilizando a equação da onda anti-dispersiva com uma aproximação de diferenças finitas de 4ª ordem para o operador Laplaciano.

Considerando agora outro modelo sintético, mostrado na Figura 5, com variação lateral e vertical de velocidade, realizamos as mesmas simulações numéricas feitas com o modelo 1.



**Figure 5:** Modelo 2 de velocidades.

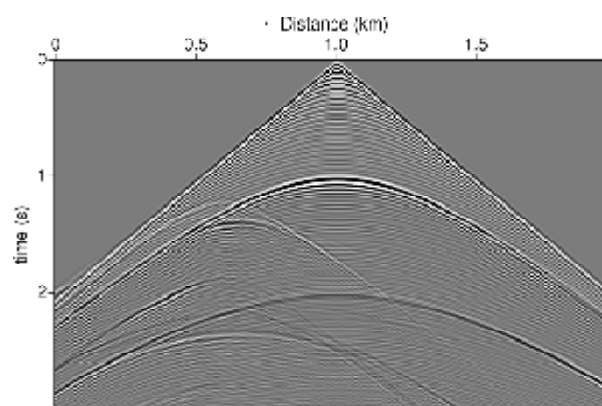
A solução numérica para o modelo 2, apresentado na Figura 5, utilizando a equação da onda convencional, é mostrada na Figura 6. Nesse caso utilizamos a equação (19) com  $b = 0$ . Para o cálculo dos operadores Laplacianos presentes da equação (19), consideramos uma aproximação de diferenças finitas de 2ª ordem. O resultado, como bem mostra a Figura 6, apresenta o sismograma com bastante dispersão numérica.



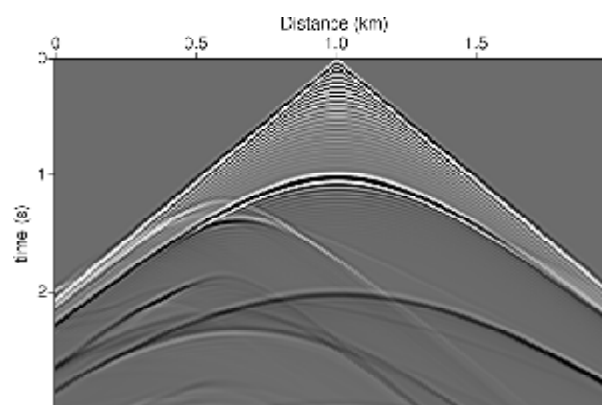
**Figure 6:** Família de tiros para o modelo 2 utilizando a equação da onda convencional com uma aproximação de diferenças finitas de 2ª ordem para o operador Laplaciano.

Já na Figura 7, nota-se que a dispersão numérica foi levemente atenuada, quando utilizamos um operador de derivada espacial com aproximação de 7ª ordem, na solução da equação da onda convencional, que exigiu um maior esforço computacional.

Utilizando agora a equação da onda anti-dispersiva, conseguimos, novamente, um resultado bem melhor. Mas, para isso, usamos um operador de diferenças finitas de menor ordem do que o utilizado para solucionar a equação da onda convencional. O resultado da modelagem com a equação da onda anti-dispersiva, dada pela equação (19), com  $b \neq 0$ , utilizando uma aproximação de 4ª ordem é mostrado na Figura 8.



**Figure 7:** Família de tiros para o modelo 2 utilizando a equação da onda convencional com uma aproximação de diferenças finitas de 7ª ordem para o operador Laplaciano.



**Figure 8:** Família de tiros para o modelo 2 utilizando a equação da onda anti-dispersiva com uma aproximação de diferenças finitas de 4ª ordem para o operador Laplaciano.

## Conclusões

Mostramos nesse trabalho duas equações da onda bem diferentes da equação da onda convencional. Essas equações, apresentadas em épocas diferentes, guardam uma semelhança muito grande. A equação mais recente, denominada de equação da onda anti-dispersiva, quando solucionada com o método das diferenças finitas, atenua de forma bastante efetiva a dispersão numérica. Através de simulações numéricas, demonstramos que, mesmo considerando operadores de ordem superior, a equação da onda convencional não atinge uma qualidade melhor do que a apresentada pela equação da onda anti-dispersiva com operadores de ordem menor.

**Agradecimentos**

Wellington C.R. Nascimento agradece o apoio da ANP pela concessão da bolsa de DsC-I através do Programa PRH-ANP/MCT.

**Referências**

**Deng, F., and McMechan, G. A.**, 2007, True-amplitude prestack depth migration, *Geophysics*, 72, S155-S166.

**Liu, F., Zhang, G., Morton, S. A.**, 2008, An anti-dispersion wave equation for modeling and reverse-time migration: Presented at the 78<sup>th</sup> Annual International Meeting, SEG.