



Filtragem diferencial adaptativa para o cálculo de alta precisão dos gradientes e tensores de campos potenciais no domínio do espaço

Bruno Freitas Gonçalves, IGEO-CPGG/UFBA, Brasil
Edson Emanuel Starteri Sampaio, IGEO-CPGG/UFBA, Brasil

Copyright 2009, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 11th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, August 24-28, 2009.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 11th International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

We have determined adaptive differential filters (ADF) by employing Taylor's series to obtain high-precision derivatives for potential data. Initially, we tested it in algebraic functions to observe its behavior and accuracy compared to analytical derivatives. Then, we applied it to 3D synthetic models of the magnetic field and compared the results for components of the gradients and tensors obtained both analytically and employing Fourier transforms. We concluded that the use of finite difference, with more coefficients of the Taylor's series, in the form of a convolution filter and covering the entire numerical domain furnishes satisfactory results.

Introdução

O cálculo de derivadas de campos potenciais, gradiente no caso de primeira ordem e tensor no caso de segunda, é um procedimento indispensável e consagrado na geofísica. Através dele, é possível assinalar feições não detectadas em mapas brutos, tais como: características estruturais, contatos, direções, mergulhos e estimativa das profundidades de corpos geológicos próximos à superfície. Podemos usar os componentes do gradiente em análises de contorno (Blakely, 1996) e em procedimentos mais avançados, tais como no cálculo da amplitude, fase e profundidade do Sinal Analítico 2D e 3D (Nabighian, 1972, 1974, 1984; Roest, 1992; Blakely, 1996) e na Deconvolução de Euler (Thompson, 1982; Reid *et al.*, 1990; Nabighian and Hansen, 2001). O cálculo dos tensores encontra aplicação em campos potenciais para aperfeiçoar e delimitar lateralmente as fontes potenciais (Stanley, 1977). Derivadas de altas ordens também são úteis, mas devemos usá-las com cautela, pois amplificam ainda mais comprimentos de onda curto.

Inicialmente, faremos uma revisão sobre diferenças finitas, mostrando como generalizar suas fórmulas e também como se trata de um procedimento de convolução. Em seguida, descreveremos o filtro diferencial adaptativo (FDA) como aplicá-lo, suas vantagens e suas limitações em relação a filtros diferenciais comuns. Mostraremos um exemplo de aplicação de FDA em uma função polinomial e em uma trigonométrica e, por fim, mostraremos a aplicação em um modelo magnético sintético 3D.

Método das Diferenças Finitas (DF)

Há várias formas de calcular derivadas. Dentre elas, está o método das diferenças finitas. O processo de cálculo das derivadas de uma função qualquer por DF, quando aplicado a mais de um ponto nos dados, torna-se um processo de convolução. Portanto, trata-se de um filtro, que transforma o dado de entrada em um dado de saída com o tamanho reduzido.

A fórmula geral da expansão de Taylor é dada por:

$$f(x \pm ih) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm i)^n \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \quad (1)$$

Onde $h=x_{i+1}-x_i$ é o espaçamento, e i é um inteiro positivo. O termo infinito do somatório na equação (1) se torna finito de valor L , quando avaliamos a derivada de ordem d e tomamos a expansão de Taylor até a ordem p (Eberly, 2008). Empregaremos os três tipos de derivadas com diferenças finitas: *progressivas*, *regressivas* e *centrais*. O valor de L , mostrado na tabela (1), determina a quantidade de pontos vizinhos que serão necessários para fazer a diferença finita.

Diferença	d ímpar	d par
progressiva	$L = d + p - 1$	$L = d + p - 1$
regressiva	$L = d + p - 1$	$L = d + p - 1$
central	$L = d + 2p - 1$	$L = d + 2p - 2$

Tabela 1: Valores de L para os três tipos de diferença finita e para diferentes ordens de d e p .

Truncando a equação (1) até uma ordem p e reagrupando os termos, podemos chegar a uma forma generalizada dada por (Eberly, 2008):

$$\frac{\partial^d f_p(x)}{\partial x^d} = \frac{d!}{h^d} \sum_{n=0}^L \left(\sum_{i=a}^b i^n C_i \right) \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + O(h^p) \quad (2)$$

Onde d é a ordem da derivada, p a ordem da expansão de Taylor, a e b valem, respectivamente 0 e L para a diferença progressiva, $-L$ e 0 para a diferença regressiva e $-L/2$ e $+L/2$ para a diferença central. O termo $O(h^p)$ denota o erro de truncamento de grau p da derivada numérica, relativo ao truncamento da série de Taylor. Isto quer dizer que a diferença finita foi avaliada para todas as ordens até p . Logo, quanto maior este valor, maior a precisão da derivada numérica de $f(x)$. Para a diferença central este valor vale o dobro, pois a diferença central aproxima melhor o cálculo das derivadas do que as diferenças progressivas e regressivas. Entretanto, ela

precisa do dobro de pontos de observação em relação às outras (caso d seja ímpar). C_i são os coeficientes modelo da DF. Para determiná-los é necessário resolver o sistema linear:

$$\sum_{i=a}^b i^n C_i = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq l \text{ e } n \neq d \\ 1, & n=d \end{cases} \quad (3)$$

Substituindo C_i e a equação (1) na equação (2) :

$$\frac{\partial^d f_p(x)}{\partial x^d} = \sum_{i=a}^b K_i f(x + ih) + O(h^p) \quad (4)$$

Onde:
$$K_i = \frac{d!}{h^d} C_i$$

A equação (4) é uma convolução de K_i com $f(x)$. Na forma geral matricial compacta, temos:

$$(\mathbf{F}_p^d)_{t \times 1} = (\mathbf{K})_{t \times m} (\mathbf{F})_{m \times 1} \quad (5)$$

Podemos estender os resultados acima para o caso de funções bivariáveis. As derivadas primeiras e segundas são idênticas às derivadas univariáveis, exceto a derivada cruzada, que é determinada por:

$$\otimes = \sum_{i=a}^b \sum_{j=a}^b K_{i,j}^{x,y} f(x + ih, y + jk) + O(h^{px}, h^{py}) \quad (6)$$

Onde:

$$\otimes = \frac{\partial^{dx}}{\partial x^{dx}} \frac{\partial^{dy}}{\partial y^{dy}} [f(x, y)] \text{ e } K_{i,j}^{x,y} = K_i^x K_j^y$$

Finalmente, na forma geral matricial compacta:

$$(\mathbf{F}_{px,py}^{dx,dy})_{s \times t} = (\mathbf{K}^x)_{s \times m} (\mathbf{F})_{m \times n} (\mathbf{K}^y)_{n \times t} \quad (7)$$

O tamanho dos vetores de entrada nas equações (5) e (7) é maior do que o tamanho dos vetores de saída, um efeito normal da convolução.

Filtro Diferencial Adaptativo (FDA)

O FDA é um filtro que faz os três tipos de diferenças finitas: progressiva, regressiva e central (podendo também usar duas: a progressiva e a regressiva). Ele emprega diferentes ordens da expansão de Taylor para preservar o tamanho dos dados e tornar o cálculo das derivadas mais preciso. Para este efeito não ocorrer, é necessário adaptar o filtro da equação (5) para que ele determine diferentes tipos de coeficientes \mathbf{K} a depender do ponto.

A tabela (2) traz seis tipos de FDA para a primeira derivada em um vetor com 5 pontos. Considere os termos P , C e R , uma referência às diferenças progressiva, central e regressiva, e sobrescrito em cada um deles representando d e os subscritos representando, respectivamente, p e L .

filtro	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	$P_{1,1}^1$	$P_{1,1}^1$	$P_{1,1}^1$	$P_{1,1}^1$	$R_{1,1}^1$
2	$P_{1,1}^1$	$R_{1,1}^1$	$R_{1,1}^1$	$R_{1,1}^1$	$R_{1,1}^1$
3	$P_{1,1}^1$	$C_{1,2}^1$	$C_{1,2}^1$	$C_{1,2}^1$	$R_{1,1}^1$
4	$P_{2,2}^1$	$P_{2,2}^1$	$P_{2,2}^1$	$R_{2,2}^1$	$R_{2,2}^1$
5	$P_{4,4}^1$	$C_{1,2}^1$	$C_{1,2}^1$	$C_{1,2}^1$	$R_{4,4}^1$
6	$P_{4,4}^1$	$P_{3,3}^1$	$C_{2,4}^1$	$R_{3,3}^1$	$R_{4,4}^1$

Tabela 2: Seis FDAs para $d=1$ aplicados a um vetor com $m = 5$ pontos.

O filtro 1 utiliza diferenças progressivas nos 4 primeiros pontos e regressiva no último, enquanto que o filtro 2 faz a diferença progressiva apenas no primeiro ponto e a regressiva nos demais, ambos com $p=1$. Para estes dois filtros, o erro de truncamento foi de $O(h^1)$ em todos os pontos. O filtro 3 faz a diferença progressiva para o primeiro ponto, regressiva para o último, e diferenças centrais para todos os intermediários, obtendo erros de truncamento $O(h^1)$ nas bordas e $O(h^2)$ no centro. O filtro 4 mostra que é possível obter um erro de truncamento de $O(h^2)$ nos pontos de borda utilizando diferenças progressivas e regressivas, aumentando o número de pontos L . O filtro 5 mostra que é possível aumentar o erro de truncamento até $O(h^4)$ nas bordas utilizando diferenças progressivas e regressivas, enquanto que para os pontos intermediários ficam $O(h^2)$. Finalmente, o filtro 6 faz a melhor combinação possível de diferenças finitas, obtendo erros de truncamento de $O(h^4)$, $O(h^3)$, $O(h^4)$, $O(h^3)$ e $O(h^4)$ respectivamente, nos pontos x_1 , x_2 , x_3 , x_4 e x_5 . O filtro 6 pode ser chamado de FDA ótimo (FDAO), pois o grau do erro de truncamento foi máximo.

$$\begin{pmatrix} f^d(x_1) \\ f^d(x_2) \\ f^d(x_3) \\ f^d(x_4) \\ f^d(x_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & P_3 \\ C_{-2} & C_{-1} & C_0 & C_1 & C_2 \\ R_{-3} & R_{-2} & R_{-1} & R_0 & 0 \\ R_{-4} & R_{-3} & R_{-2} & R_{-1} & R_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \end{pmatrix}$$

Na forma matricial, temos:

(8)

A tabela (3) traz os FDAO de um vetor com 7 pontos para as derivadas $d=1, 2, 3$ e 4. A relação $m=2g-1$ determina o grau máximo que o FDAO pode obter quando m é ímpar (neste caso $g=4$).

d	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	$P_{6,6}^1$	$P_{5,5}^1$	$P_{4,4}^1$	$C_{3,6}^1$	$R_{4,4}^1$	$R_{5,5}^1$	$R_{6,6}^1$
2	$P_{5,6}^2$	$P_{4,5}^2$	$C_{2,4}^2$	$C_{3,6}^2$	$C_{2,4}^2$	$R_{4,5}^2$	$R_{5,6}^2$
3	$P_{4,6}^3$	$P_{3,5}^3$	$P_{2,4}^3$	$C_{2,6}^3$	$R_{2,4}^3$	$R_{3,5}^3$	$R_{4,6}^3$
4	$P_{3,6}^4$	$P_{2,5}^4$	$C_{1,4}^4$	$C_{2,6}^4$	$C_{1,4}^4$	$R_{2,5}^4$	$R_{3,6}^4$

Tabela 3: FDAO para $d = 1, 2, 3$ e 4 em um vetor com $m=7$ pontos.

A tabela (4) traz os FDAO de um vetor com 8 pontos para as derivadas $d = 1, 2, 3, 4$ e 5 . A relação $m=2g-2$ determina o grau máximo que o FDAO pode obter quando m é par (neste caso $g=5$).

d	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
1	$P_{7,7}^1$	$P_{6,6}^1$	$P_{5,5}^1$	$C_{3,6}^1$	$C_{3,6}^1$	$R_{5,5}^1$	$R_{6,6}^1$	$R_{7,7}^1$
2	$P_{6,7}^2$	$P_{5,6}^2$	$P_{4,5}^2$	$C_{3,6}^2$	$C_{3,6}^2$	$R_{4,5}^2$	$R_{5,6}^2$	$R_{6,7}^2$
3	$P_{5,7}^3$	$P_{4,6}^3$	$P_{3,5}^3$	$C_{3,6}^3$	$C_{3,6}^3$	$R_{3,5}^3$	$R_{4,6}^3$	$R_{5,7}^3$
4	$P_{4,7}^4$	$P_{3,6}^4$	$P_{2,5}^4$	$C_{2,6}^4$	$C_{2,6}^4$	$R_{2,5}^4$	$R_{3,6}^4$	$R_{4,7}^4$
5	$P_{3,7}^5$	$P_{2,6}^5$	$P_{1,5}^5$	$C_{1,6}^5$	$C_{1,6}^5$	$R_{1,5}^5$	$R_{2,6}^5$	$R_{3,7}^5$

Tabela 4: FDAO para $d = 1, 2, 3, 4$ e 5 em um vetor com $m = 8$ pontos.

O FDAO depende simplesmente da ordem de diferenciação (d), do tamanho e da paridade de m . Entretanto, há um limite computacional para o cálculo do FDAO, que pode ser observado claramente na equação (3). O termo (i^n) torna-se muito grande, pois n depende de d e de p . Apesar disso, FDAs podem ser modelados de forma estável quando o tamanho do vetor é muito grande. Este resultado pode ser estendido para funções bivariáveis seguindo o raciocínio da equação (7).

Resultados em funções algébricas

Representamos duas funções algébricas em um vetor com $m=41$ pontos espaçados de 0.5:

$$H(x) = x^4 - 2x^3 - 75x^2 + 76x + 1120$$

$$T(x) = \cos^2(x) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

Determinamos 7 filtros de derivada de primeira ordem para avaliar a precisão em relação às derivadas analíticas $H(x)$ e $T(x)$. Os filtros 1, 2 e 3 fazem, respectivamente as diferenças progressivas, regressivas e centrais de primeira ordem. O vetor de saída é diminuído de um para as derivadas progressivas e regressivas e diminuído de dois para a central. Os quatro filtros posteriores são FDAs que aplicaram diferenças progressivas do 1° ao 10° ponto (Faixa F1), diferenças centrais do 11° ao 31° ponto (Faixa F2) e diferenças regressivas do 32° ao 41° ponto (Faixa F3). Sendo P_p, C_p e R_p , respectivamente, as diferenças progressiva, central e regressiva de ordem p . Temos então, para as faixas F1, F2 e F3: o filtro 4 faz P_1, C_1, R_1 ; o filtro 5 faz P_2, C_2, R_2 ; o filtro 6 faz P_3, C_3, R_3 e o filtro 7 faz P_4, C_3, R_4 . O erro de truncamento $O(h^p)$ é de ordem p para as diferenças progressivas e regressivas, e $2p$ para a central.

A figura 1 mostra quatro gráficos: os dois primeiros contêm curvas da derivada analítica, do filtro 1, do filtro 2 e do filtro 3 para o $H(x)$ e $T(x)$, respectivamente. Os dois inferiores mostram os erros médios quadráticos (RMS) relativos para os 7 filtros, dado por:

$$E(\%) = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} [g'_i - f'_i]^2}}{(f'_i)_{max} - (f'_i)_{min}} \tag{9}$$

Onde g'_i e f'_i são, respectivamente, a derivada dos filtros e a deriva analítica no ponto i .

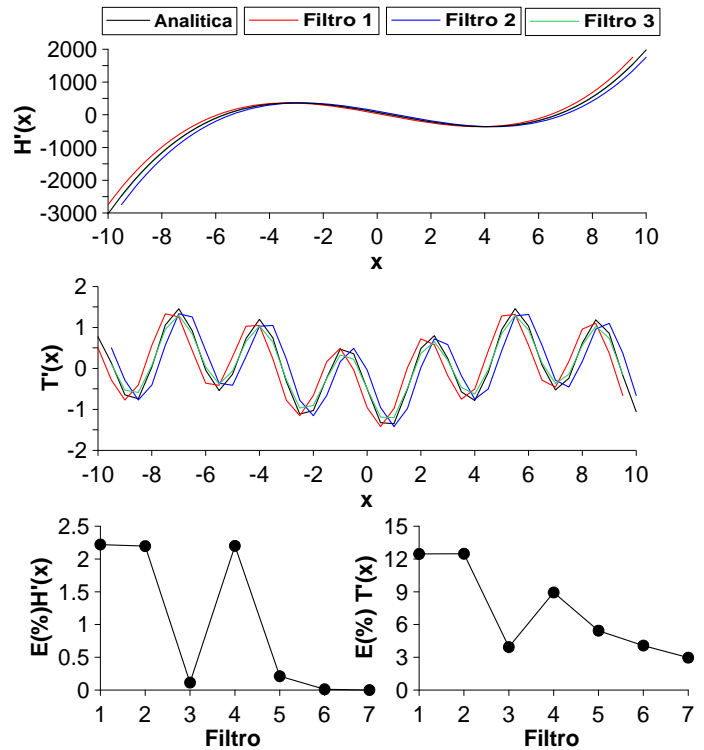


Figura 1: Os dois gráficos superiores ilustram as curvas da derivada analítica e dos filtros 1, 2 e 3 de $H(x)$ e $T(x)$, respectivamente. Os dois gráficos inferiores ilustram os erros RMS relativos para os 7 filtros na função $H(x)$ e na função $T(x)$, respectivamente.

O erro RMS do filtro 3 foi menor que dos filtros 4 e 5 pois este filtro utiliza unicamente diferenças centrais com erros de truncamento $O(h^4)$, diferentemente dos filtros 4 e 5. Na função $H(x)$, o erro RMS foi nulo no filtro 7, pois todos os erros de truncamento foram da ordem de $O(h^4)$, que é igual ao grau da função. O erro RMS jamais será nulo na função $T(x)$, por tratar-se de uma função transcendental. De qualquer forma, a FDA obteve erros progressivamente menores.

Resultados em um modelo magnético sintético

O modelo magnético sintético utilizado possui fontes magnéticas 3D representadas por três esferas sólidas em uma malha de 32 km x 32 km pontos, equi-espçados de 1 km em ambas as direções em um campo magnético ambiente com magnitude de 24.700 nT, declinação $da = -23^\circ$, inclinação $ia = -30^\circ$. As coordenadas do centro (x,y,z) , raio (r), susceptibilidade magnética (s), inclinação (ie) e declinação (de) da magnetização de cada esfera estão definidos na tabela (5).

Esf.	x(km)	y(km)	z(km)	r(km)	s(SI)	ie(°)	de(°)
1	16	6	5	3	0.05	ia	da
2	16	16	7	3	0.08	ia	da
3	16	26	5	3	0.05	0°	30°

Tabela 5: Parâmetros magnéticos e geométricos das esferas sólidas utilizadas na modelagem 3D.

Para avaliar o cálculo dos gradientes D_x e D_y e dos tensores D_{xx} , D_{yy} , D_{xy} e D_{zz} , aplicamos um algoritmo FFT e três FDAs para avaliar a precisão dos cálculos também com a variação de p . O cálculo do tensor D_{zz} pelo FDA foi feito com base na equação de Laplace para campos potenciais: $D_{zz} = -(D_{xx} + D_{yy})$. Os filtros FDA foram modelados para calcular da seguinte forma: diferenças progressivas aplicadas nos 5 primeiros pontos (Faixa F1), diferenças centrais aplicadas a todos os pontos centrais (Faixa F2) e diferenças regressivas aplicadas nos 5 últimos pontos (Faixa F3). Seguindo o padrão descrito anteriormente nas funções algébricas, o FDA 1 faz P_2, C_1, R_2 para o cálculo dos gradientes e P_8, C_1, R_8 para o cálculo dos tensores. O FDA 2 faz P_4, C_2, R_4 para o cálculo dos gradientes e P_4, C_2, R_4 para o cálculo dos tensores. O FDA 3 faz P_8, C_4, R_8 para o cálculo dos gradientes e P_2, C_4, R_2 para o cálculo dos tensores.

Os resultados e a precisão das derivadas calculadas por FFT e pelos FDAs estão ilustradas no gráfico da figura 2. Note que nem sempre o aumento da ordem da expansão de Taylor permite o cálculo preciso das derivadas por diferenças finitas, observado claramente no caso do cálculo dos tensores no gráfico da figura 2. Dentre os motivos desse efeito estão: (i) amostragem feita de forma inadequada, pois a D_{yy} amplificou os comprimentos de onda curto na direção y , e como as esferas estão alinhadas N-S, a frequência é maior nesta direção do que na outra, ocasionando um efeito de *aliasing* e (ii) o campo magnético, como todo campo potencial, é uma função transcendental. O FDA 3 foi o filtro mais robusto e por isso representamos sua aplicação no cálculo do D_y e D_{zz} nas figuras 3 e 4, respectivamente, juntamente com o cálculo analítico e FFT. É claramente perceptível que o cálculo por FDA é melhor em relação ao FFT, resultando em uma imagem das derivadas mais suave.

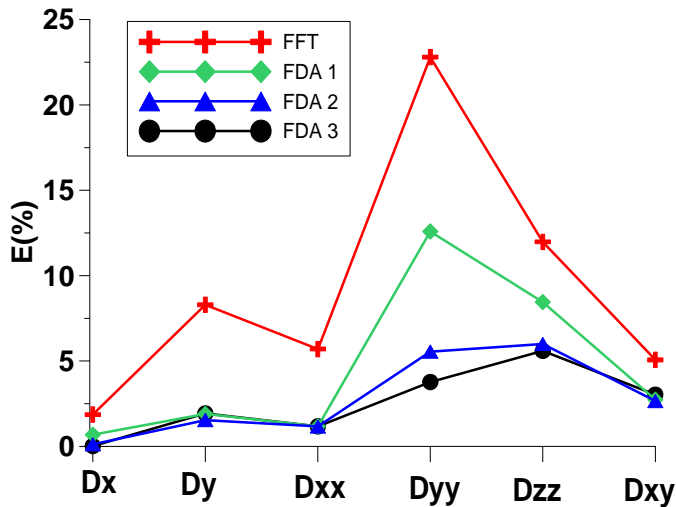


Figura 2: Gráfico dos erros RMS relativo para o cálculo dos gradientes D_x e D_y e dos tensores D_{xx} , D_{yy} , D_{zz} e D_{xy} através da FFT e dos FDA 1, FDA 2, FDA 3 em relação a derivada analítica do modelo magnético sintético 3D.

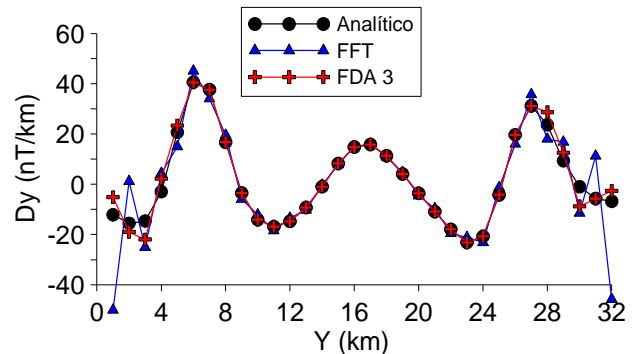
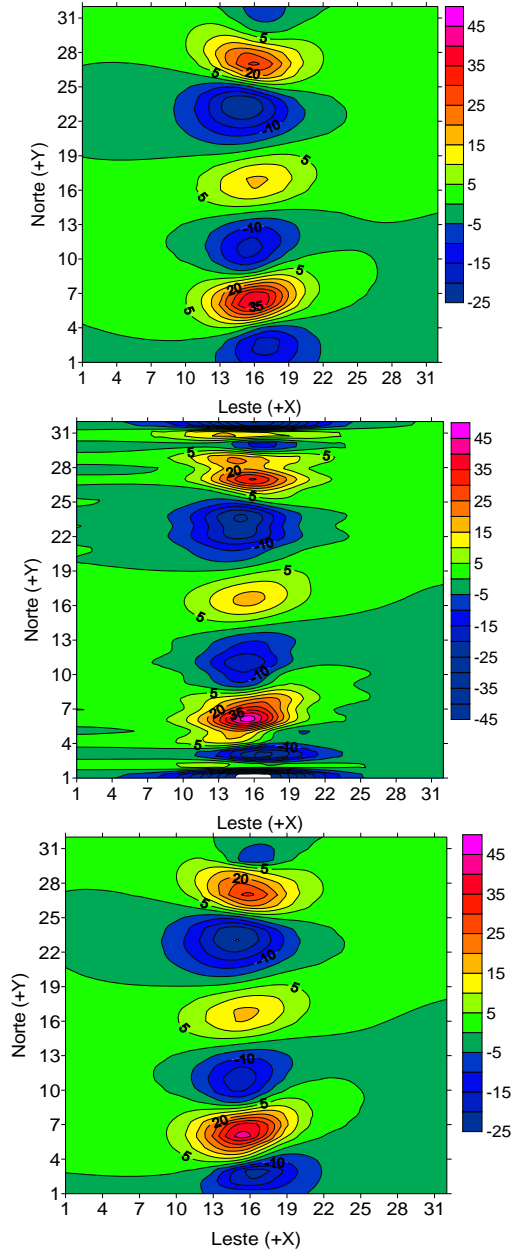


Figura 3: Mapas de anomalia magnética D_y em nT/km causada por três esferas sólidas calculada de forma analítica, por FFT e pelo FDA 3 respectivamente de cima para baixo. Abaixo: gráfico do perfil N-S em $X=16$ km cruzando o centro das esferas.

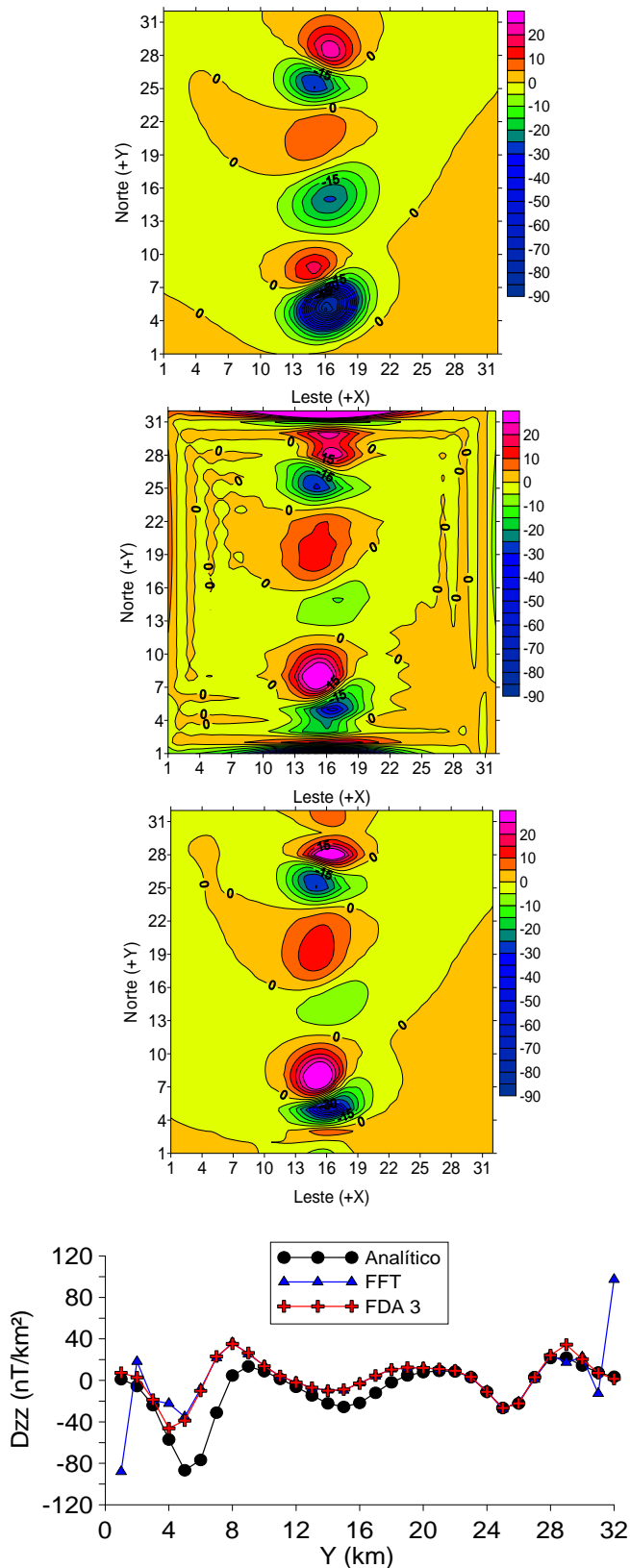


Figura 4: Mapas de anomalia magnética D_{zz} em nT/km^2 causada por três esferas sólidas calculada de forma analítica, por FFT e pelo FDA 3 respectivamente de cima para baixo. Abaixo: gráfico do perfil N-S em $X=16km$ cruzando o centro das esferas.

Conclusões

O espaçamento amostral dos pontos e comprimentos de onda curto (alta frequência) em uma dada direção influenciam no cálculo das derivadas do campo potencial. Apesar disto, os resultados obtidos nas funções algébricas e no cálculo dos gradientes e tensores em um modelo magnético 3D provaram a eficácia da Filtragem Diferencial Adaptativa (FDA) no cálculo aproximativo das derivadas, sendo inclusive melhor do que os resultados obtidos por FFT.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos recursos financeiros do ANP-PRH08 e da Petrobras-CPGG-NGB/IGEO (Projeto *RIFT*).

Referências

- Blakely, R. J.**, 1996, Potential theory in gravity and magnetic applications, Cambridge University Press.
- Eberly, D.**, 2008, Derivative Approximation by Finite Differences, Geometric Tools, LLC. Disponível em <http://www.geometrictools.com/Documentation/FiniteDifferences.pdf>
- Nabighian, M. N.**, 1972, The analytic signal of two dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section: Its properties and use for automated anomaly interpretation: *Geophysics*, **37**, 507-517.
- Nabighian, M. N.**, 1974, Additional comments on the analytic signal with two-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section: *Geophysics*, **39**, 717-722.
- Nabighian, M. N.**, 1984, Toward a three-dimensional automatic interpretation of potential field data via generalized Hilbert transforms: Fundamental relations: *Geophysics*, **49**, 780-786.
- Nabighian, M. N. and R. O. Hansen**, 2001, Unification of Euler and Werner deconvolution in three dimensions via generalized Hilbert transform: *Geophysics*, **66**, 1805-1810.
- Reid, A. B., J. M. Allsop, H. Granser, A. J. Millet, and I. W. Somerton**, 1990, Magnetic interpretation in three dimensions using Euler deconvolution: *Geophysics*, **55**, 80-91.
- Roest, W. R., Verhoef, J. Pilkington, M.**, 1992, Magnetic interpretation using 3D analytic signal: *Geophysics*, **57**, 116-125.
- Stanley, J. M.**, 1977, Simplified gravity interpretation by gradients – The geological contact: *Geophysics*, **42**, 1230-1235.
- Thompson, D. T.**, 1982. EULDPH: A new technique for making computer-assisted depth estimates from magnetic data: *Geophysics*, **47**, 31-37.