



Parametrização de campo bidimensional de velocidades sísmicas usando ondaletas.

Helcio Moreira Perin* (UFBA), Wilson Mouzer Figueiró (CPGG-UFBA)

Copyright 2011, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 12th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, August 15-18, 2011.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 12th International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

The aim of this work is the representation (parameterization) of compressional seismic velocity field model of two dimensional geological structure by means of orthogonal functions known as wavelets more specifically, those so-called Haar wavelet. Some comparative numerical experiments are performed among wavelet series with and without the use of scale function. The velocity field approximation, obtained by such technique, depends on the indices values used in the series, these have influence on the quality of the model representation. It is observed that the proposed parameterization offers a good accuracy for representation of the used field, however it is just advantageous the use of the scale function in the wavelet series with lower indices values.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo a representação (parametrização) de modelo bidimensional de campo de velocidades sísmicas compressoriais de uma estrutura geológica, através da utilização de funções ortogonais conhecidas por ondaletas ou *wavelets*, mais especificamente, aquelas denominadas ondaletas de Haar. São feitos experimentos comparativos entre as séries ondaleta com e sem o uso da função escala. A aproximação do campo de velocidade, obtida por essa técnica, depende dos valores de índices usados nas séries, os quais influenciam a qualidade da representação do modelo. Observou-se que a parametrização proposta oferece uma boa acurácia na representação do campo utilizado, sendo que a utilização da função escala na série ondaleta só é vantajosa para índices com baixos valores.

Introdução

Alguns tipos de parametrização de campos de velocidades sísmicas são alvo de estudo por parte de alguns autores. Dos Santos e Figueiró (2006), definem dois deles: divisão do modelo em células ou blocos (tipo tradicional de parametrização usada na modelagem e

inversão sísmica, Bishop et al., 1985), e a polinomial trigonométrica (no qual o modelo é representado por uma única série trigonométrica).

O modelo de campo considerado é parametrizado pela ondaleta de Haar, que é definida como:

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0,5 \\ -1, & 0,5 \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (1)$$

que é também conhecida por ondaleta-mãe. Segundo Lima (2002), por definição, ondaleta é uma função

$\psi(t) \in L^1(R) \cap L^2(R)$, tal que a família de funções

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in Z \quad (2)$$

é uma base ortonormal para $L^2(R)$, espaço das funções quadrado integrável. As funções em (2) são conhecidas por ondaletas-filhas. Substituindo-se (2) em (1), temos:

$$\psi_{j,k}(t) = \begin{cases} 2^{j/2}, & 2^{-j} \cdot k \leq t < 2^{-j} (k+1/2) \\ -2^{j/2}, & 2^{-j} (k+1/2) \leq t < 2^{-j} (k+1) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3)$$

A expressão (3) foi obtida a partir da ondaleta de Haar, por uma *dilatação binária* 2^j e uma *translação diádica* $k2^{-j}$ (Morentin, 2004).

Pode-se, então, representar uma função tal como:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t) \quad (4)$$

Onde:

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad (5)$$

Um fator de grande importância para a obtenção de uma boa aproximação é a introdução da função escala de Haar (ondaleta-pai), representada por:

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Tal como em (3), temos:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}, \quad 2^{-j} \cdot k \leq t \leq 2^{-j} \cdot (k+1) \quad (6)$$

Considerando um sistema ortonormal das funções $\psi(t)$ e $\phi(t)$, pode-se fazer uma aproximação de $f(t)$, como segue:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{j,k} \psi_{j,k}(t) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) \quad (7)$$

Onde:

$$d_{j_0,k} = \langle f, \phi_{j_0,k} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi_{j_0,k}(t) dt \quad (8)$$

Para finalidades práticas, os somatórios que aparecem em (4) e (7) devem ser finitos. Portanto, deve-se escolher um conjunto de valores inteiros dentro do qual j e k variam. A aproximação de $f(t)$ por ondaletas depende fortemente do número de coeficientes j e k utilizados (inteiros e arbitrários); quanto maior o intervalo de valores utilizados para j e k , melhor será a aproximação. O índice j_0 é denominado *escala de resolução* e deve ser igual ou maior ao valor inicial do valor de j escolhido.

Metodologia

Consideremos um modelo geológico hipotético, constituído de cinco camadas irregulares e uma intrusão (Figura 01). Trata-se de um modelo em que a velocidade compressional V depende da distancia horizontal x (0 a 9 km) e da profundidade z (0 a 3 km).

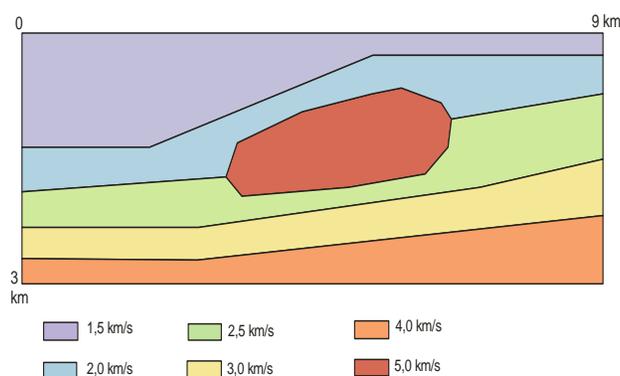


Figura 01 – Velocidade sísmica compressional de modelo geológico hipotético.

Observa-se, porém, que as expressões (3), (4), (5), (6), (7) e (8) são úteis na representação unidimensional, tal como desenvolvido por Perin & Figueiró (2010) na parametrização de um modelo geológico com interfaces horizontais, representado por série ondaleta de Haar, sendo $f(t)$ substituído por $V(z)$. Nesse caso a velocidade dependia apenas da profundidade z .

No modelo acima (Figura 01), o campo velocidade depende de x e z , então $V(x,z)$ não pode ser representado diretamente através de tais expressões. Com o objetivo de parametrizar o modelo bidimensional por série ondaleta de Haar, foi desenvolvida uma estratégia para representar o modelo por uma curva discretizada unidimensional. Tal curva foi obtida através da função auxiliar $z = -3x$ com período igual a 1 km a partir da origem. Essa função, sobreposta ao modelo, permite a leitura dos valores de V , utilizando-se um espaçamento regular de x .

Fazendo-se a leitura da velocidade V nas interseções de x com a função auxiliar, obtém-se um conjunto de pontos que descreve uma curva unidimensional em que a velocidade depende apenas de x . Trata-se de uma

curva discretizada $V(x)$, não explicitada por uma expressão específica, mas que pode ser tratada como unidimensional para fins de parametrização por ondaleta de Haar. A curva obtida por esse método no modelo em questão é mostrada nas figuras 02, 03, 04 e 05 (em vermelho).

Com base na experiência obtida na parametrização para modelo unidimensional (Perin & Figueiró, 2010), foi desenvolvido um programa de computador na linguagem FORTRAN, adaptado a curvas discretizadas. O uso do programa é indispensável devido à grande quantidade de cálculo, principalmente dos coeficientes $c_{j,k}$ e $d_{j_0,k}$.

Os valores dos índices j , k e j_0 , são dados de entrada do programa, sendo valores inteiros e arbitrários. Optou-se por utilizar valores iniciais e finais de j e k iguais em valor absoluto, por facilidade de interpretação. Foram testados vários valores de entrada para esses índices e escolhidos quatro exemplos que contemplam de forma resumida as várias situações possíveis. Tal procedimento permitiu a análise da influência desses índices, bem como da função escala.

A partir dos dados de saída obtidos na execução do programa, fez-se os gráficos (Figuras 02, 03, 04 e 05) que ilustram os resultados obtidos nos experimentos numéricos realizados. A aproximação foi feita ponto a ponto, com espaçamento em x (Δx) de 0,01 km, ou seja, a curva discretizada que representa o modelo geológico possui 900 pontos.

Exemplos

Fazendo-se a parametrização através da ondaleta de Haar, conforme a metodologia descrita, apresentamos a seguir, alguns exemplos desenvolvidos a partir de situações distintas. As curvas foram obtidas considerando-se apenas a expressão (4), referente à ondaleta mãe (em azul, nos gráficos das figuras 02, 03, 04 e 05) e considerando-se a expressão (7) completa, na qual aparece a ondaleta pai (em verde). Em todos os exemplos os cálculos foram efetuados via programa computacional.

Exemplo 01 - Inicialmente, optou-se por fazer variações de -5 a 5, tanto para valores de j quanto para valores de k , referentes à ondaleta mãe. Para a primeira parte da série, referente à ondaleta pai, foi utilizado j_0 igual ao valor inicial de j , ou seja, -5. Nesse caso, foi necessário o cálculo de 121 coeficientes $c_{j,k}$ e 11 coeficientes $d_{j_0,k}$.

Com esses valores a resolução fica prejudicada na medida em que foram utilizados poucos coeficientes, embora a influência da função escala seja significativa, com uma boa aproximação no início da curva. A Figura 02 ilustra o Exemplo 01 sem a influência da função escala, considerando-se apenas $\psi(z)$, e com influência da mesma, considerando-se $\psi(z)$ e $\phi(z)$, para j_0 igual a -5.

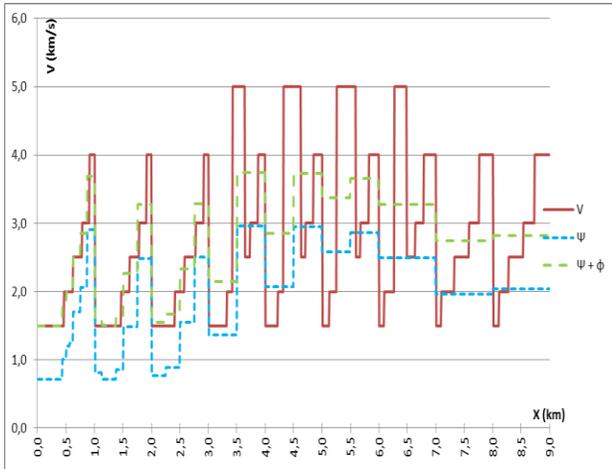


Figura 02 – Modelo $V(x)$ parametrizado por ondaleta de Haar sem e com a consideração de $\phi(z)$ para $-5 \leq j \leq 5$, $-5 \leq k \leq 5$ e $J_0 = -5$, $j, k \text{ e } j_0 \in \mathbf{Z}$

Exemplo 02 - O gráfico a seguir (Figura 03) mostra a estrutura geológica representada, utilizando-se j variando de -15 a 15, k variando de -15 a 15 e j_0 igual a -15 (cálculo de 992 coeficientes).

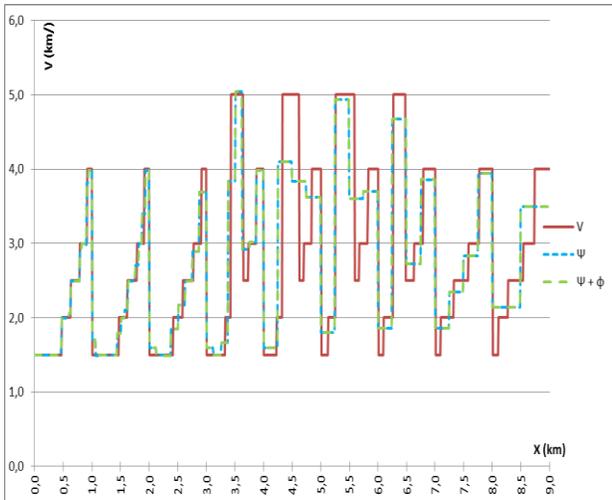


Figura 03 – Modelo $V(x)$ parametrizado por ondaleta de Haar sem e com a consideração de $\phi(z)$ para $-15 \leq j \leq 15$, $-15 \leq k \leq 15$ e $J_0 = -15$, $j, k \text{ e } j_0 \in \mathbf{Z}$

Comparado com o exemplo anterior, percebe-se que não há diferença visível entre as séries com e sem a função escala. Essa diferença é inferior a 0.01 e, portanto, pouco significativa na aproximação nesse caso.

Exemplo 03 - Considerando-se j variando de -30 a 30, k variando de -30 a 30 e j_0 igual a -30, obtêm-se os resultados ilustrados no gráfico mostrado na Figura 04. Nesse caso, são calculados 3782 coeficientes.

Observa-se que as curvas relativas aos casos sem e com utilização de $\phi(z)$ são praticamente coincidentes, sendo que a diferença entre elas é da ordem de 0.0001, imperceptível no gráfico. Nesse nível de resolução, para esse exemplo, a aproximação é muito boa, diferindo apenas em alguns pontos principalmente nas extremidades superior e inferior do gráfico.

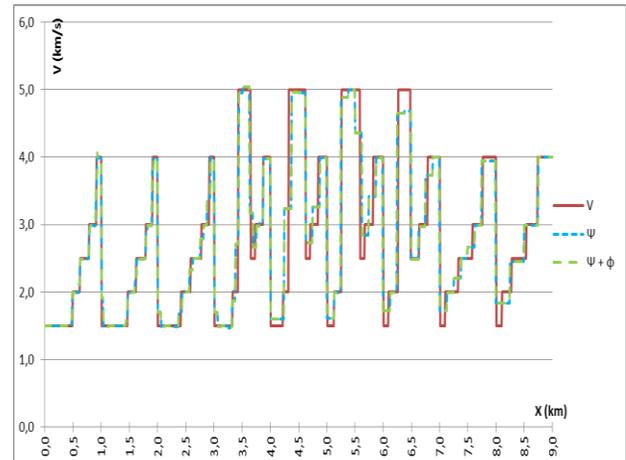


Figura 04 – Modelo $V(x)$ parametrizado por ondaleta de Haar sem e com a consideração de $\phi(z)$ para $-30 \leq j \leq 30$, $-30 \leq k \leq 30$ e $J_0 = -30$, $j, k \text{ e } j_0 \in \mathbf{Z}$

Exemplo 04 – Entrando com valores j variando de -60 a 60, k variando de -60 a 60 e j_0 igual a -60, obtêm-se os resultados ilustrados no gráfico mostrado na Figura 05. Nesse caso, são calculados 14762 coeficientes. A partir desse nível, a razão entre custo computacional e a resolução torna-se elevada, ou seja, observa-se pouca melhora na resolução com grande aumento no número de coeficientes.

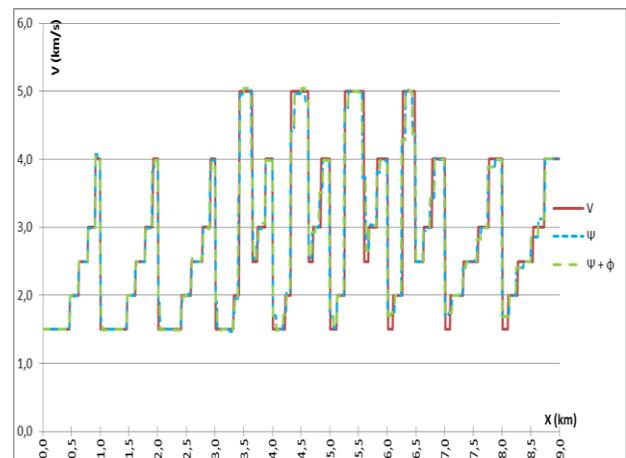


Figura 05 – Modelo $V(x)$ parametrizado por ondaleta de Haar sem e com a consideração de $\phi(z)$ para $-60 \leq j \leq 60$, $-60 \leq k \leq 60$ e $J_0 = -60$, $j, k \text{ e } j_0 \in \mathbf{Z}$

Conclusões

Utilizando-se programa de computador, pôde-se testar diferentes intervalos para valores de j e k , diferentes valores de jo , etc., de forma a se obter resultados satisfatórios.

Para baixas resoluções (Exemplo 01), percebeu-se que a influência da função escala é muito grande, fazendo com que a aproximação seja melhor, embora não suficiente para representar o modelo de forma satisfatória. Nesses casos, a melhor escolha para o jo é fazê-lo igual ao valor inicial de j .

Entrando com valores dos índices variando de -15 a 15 (Exemplo 02) a influência da ondaleta pai deixa de ser significativa se utilizarmos jo igual ao valor inicial de j , ou seja, a influência da função escala não melhora significativamente a aproximação. Pode-se, então, utilizar um jo com valor superior ao valor inicial de j . Esse procedimento, porém, provoca um deslocamento da curva para cima, tal como ocorrido no Exemplo 01, mas não melhora a aproximação. No Exemplo 02, um valor de jo igual a -7, provoca um deslocamento da curva de aproximadamente 1,0 km/s para cima.

A vantagem de se utilizar a função escala da ondaleta, reside no fato de que para se obter aproximações equivalentes, o uso dessa função exige um número de cálculos significativamente inferior ou um custo computacional menor.

Nos Exemplos 03 e 04 as curvas obtidas possuem boa aproximação, sendo que no Exemplo 04 a representação é quase perfeita. Para esses exemplos a função escala é dispensável, não sendo necessária a utilização desses coeficientes em um trabalho de inversão, por exemplo.

Os objetivos foram alcançados, visto que a parametrização de um modelo geológico por ondaleta de Haar mostrou-se eficaz. No exemplo 03, por exemplo, em alguns segundos de processamento obteve-se uma aproximação satisfatória. Além disso, pôde-se analisar com clareza os índices j , k e jo necessários para uma boa aproximação, para esse tipo de modelo.

Em se tratando de modelos mais complexos, é de se esperar a necessidade de maiores valores para j e k . Além disso, pode-se dizer que quanto menor o espaçamento de x (Δx), melhor a precisão da curva discretizada que representa o modelo. Assim, para modelos com várias camadas finas e interfaces com grandes variações de velocidade sísmica, deve-se utilizar maiores variações dos índices e pequenos espaçamentos de x .

Outras funções auxiliares podem ser usadas para representar o modelo bidimensional por uma curva unidimensional, como, por exemplo, a função seno ou cosseno (nesse caso o espaçamento de x não seria regular), funções modulares, etc.

Com o auxílio de um programa gráfico de interpolação, pretende-se reconstruir o modelo 2D a partir dos resultados obtidos no Exemplo 04, sem o uso da função escala (curva azul), podendo-se fazer uma análise mais

apurada da aplicação dessa técnica. Os resultados obtidos serão utilizados posteriormente para modelagem e inversão geofísica.

Referências

Bishop, T.N. et al. (08 co-authors), 1985. Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media. *Geophysics*, 50: 903-923.

Morenttin, P. A., 2004. Ondas e ondaletas; da análise de Fourier à análise de ondaletas. EDUSP.

Lima, P. C., 2002. Wavelets: uma introdução. *Matemática Universitária*, N^o. 33: 13-44.

Perin, H. M. & Figueiró, W. M., 2010. Parametrização de campo unidimensional de velocidades sísmicas usando ondaletas. IV Simpósio Brasileiro da SBGF

Santos, R. H. M. & Figueiró, W. M., 2006. Modelagem acústica bidimensional usando diferentes parametrizações de campos de velocidades. *Revista Brasileira de Geofísica*. Vol. 24(1): 103-115.

Agradecimentos

À Universidade do Estado da Bahia (UNEB), pela liberação para realização do curso de doutorado.

Ao Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia (CPGG / UFBA), pelo suporte técnico, logístico e computacional.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia (FAPESB), pelo apoio financeiro através de bolsa de doutorado.