



## Parametrização ondaleta do campo de velocidades sísmicas relativo a um domo salino

Adriano C. Martinez, UFBA, Salvador, BA, Brasil  
Wilson M. Figueiró, CPGG-IGEO-UFBA, Salvador, BA, Brasil

Copyright 2011, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 12<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, August 15-18, 2011.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 12<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

### Abstract

In order to represent a two-dimensional seismic velocity field defined by a salt dome model, the Haar wavelet is used. It allows us to construct a basis of functions, that satisfies certain properties, and is able to decompose any piecewise continuous function in a linear combination of elements of such basis. It is proposed a strategy to reduce dimension of the basis elements, in order to simplify mathematics and save computer processing time, by the use of a one-dimensional function that works like an irregular grid on the model. As result, an image of the salt dome model is generated with a satisfactory degree of accuracy with respect to the original model.

### Resumo

A fim de representar um campo bidimensional de velocidades sísmicas definido por um modelo do domo de sal, a ondaleta Haar é usada. Ela nos permite construir uma base de funções, que satisfaz determinadas propriedades, e é capaz de decompor qualquer função contínua por partes numa combinação linear de elementos da referida base. É proposta uma estratégia para reduzir a dimensão dos elementos da base, visando simplificações matemáticas e economia de tempo de processamento computacional, através do uso de uma função unidimensional que atua como uma malha irregular sobre o modelo. Como resultado, uma imagem do modelo do domo de sal é gerada com um grau satisfatório de acurácia relativamente ao modelo original.

### Introdução

A parametrização de modelos provenientes da geologia tem sua importância na possibilidade de tornar quantitativos modelos geológicos apenas qualitativos. Isto faz com que tais modelos tornem-se passíveis de manipulações matemáticas. A tomografia é uma técnica que usufrui das facilidades oferecidas pela parametrização, pois sendo o modelo descrito por um certo número de parâmetros, seu objetivo torna-se estimar tais parâmetros a partir dos dados observados. As técnicas de representação de modelos tem evoluído ao longo do tempo de acordo com a seguinte seqüência de possibilidades parametrizadoras: blocos (Bishop et al., 1985), polinômios (Figueiró, 1994), série trigonométricas (Dos Santos & Figueiró, 2006), splines (Santana &

Figueiró, 2008) e ondaletas (Perin & Figueiró, 2010). Ondaletas são funções que possuem certas propriedades e são capazes de decompor qualquer função contínua por partes. A idéia numa decomposição usando ondaleta é aproximar uma função por combinação linear de ondaletas. As ondaletas são capazes de aproximar funções com descontinuidades e picos utilizando menos coeficientes do que seriam utilizados com a análise de Fourier, por exemplo. Esta propriedade fez com que as ondaletas fossem escolhidas para este trabalho, pois os campos de velocidades de modelos geológicos são formados por saltos nas velocidades das diferentes camadas.

### Metodologia

Na decomposição por ondaletas são consideradas dilatações, ou compressões, e translações de uma única função  $\Psi$ , também chamada de ondaleta-mãe. Podemos então considerar ondeletas como (Morentin, 1999):

$$\Psi_{a,b}(x) = |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{x-b}{a}\right), a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (1)$$

Normalmente são usados valores especiais para  $a$  e  $b$  em que  $\Psi_{j,k}(t)$  é obtida de  $\Psi(t)$  por uma dilatação  $2^j$  e uma translação de  $k2^{-j}$ ,

$$\Psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \Psi(2^j t - k), j, k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Utilizando (2) podemos aproximar qualquer função  $f(t)$  de quadrado integrável sobre  $\mathbb{R}$  por:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \Psi_{j,k}(t), \quad (3)$$

onde

$$c_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi_{j,k}(t) dt. \quad (4)$$

Vale ressaltar que a relação de Parseval também é válida neste caso, então se obtém:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \sum_j \sum_k c_{j,k}^2 \quad (5)$$

A função  $\Psi_{j,k}$  apresenta algumas propriedades tais como:

$$P1) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0;$$

$$P2) \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)| dt < \infty;$$

$$P3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty, \text{ onde } \psi(\omega) \text{ é a transformada de Fourier de } \psi(t); \text{ e}$$

P4) Os primeiros  $r - 1$  momentos de  $\psi$  anulam, isto é,  $\int_{-\infty}^{\infty} t^j \psi(t) dt = 0, j = 0, 1, \dots, r - 1$ .

A quantidade de coeficientes define a sensibilidade da aproximação, ou seja, quanto maior for essa quantidade melhor será a aproximação da função. Entretanto, para avaliar-se a qualidade dos coeficientes faz-se necessário utilizar a análise ondaleta através de sua transformada, sobre a qual não tratamos no presente trabalho.

Nem todas as ondaletas geram sistemas ortogonais, como, por exemplo, o chapéu mexicano. Podemos gerar uma família ortonormal de ondaletas em  $L^2$  (espaço das funções quadrado integrável) a partir da função escala, também chamada de ondaleta-pai, definida como a solução da equação:

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k l_k \phi(2t - k), \quad (6)$$

onde

$$l_k = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \phi(2t - k) dt. \quad (7)$$

Tal função  $\phi$  gera a seguinte família ortonormal de funções:

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), j, k \in Z. \quad (8)$$

A função  $f(t)$  pode então ser escrita em série ondaleta na seguinte forma:

$$f(t) = \sum_k c_{j_0,k} \phi_{j_0,k}(t) + \sum_{j \geq j_0} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(t), \quad (9)$$

onde  $j_0$  é a escala de resolução mais baixa,

$$c_{j_0,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi_{j_0,k}(t) dt \quad (10)$$

e

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{j,k}(t) dt. \quad (11)$$

O exemplo mais simples de ondaleta unidimensional é a função de Haar:

$$\psi^{(H)}(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (12)$$

A partir de  $\psi^{(H)}(t)$  é possível obter  $\psi_{j,k}^{(H)}(t)$ .

$$\psi_{j,k}^{(H)}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & 2^{-j}k \leq t < 2^{-j}(k + \frac{1}{2}) \\ -2^{\frac{j}{2}}, & 2^{-j}(k + \frac{1}{2}) \leq t < 2^{-j}(k + 1) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (13)$$

A representação gráfica da Eq. (13) pode ser vista na Figura 1.

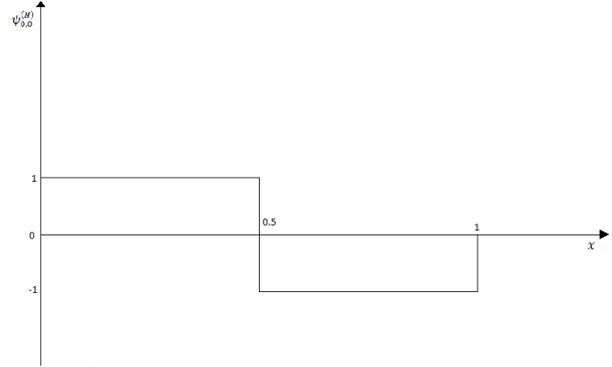


Figura 1: Gráfico da função Haar definida no intervalo  $0 \leq t \leq 1$ .

A base, descrita pela Eq. (8), foi utilizada neste trabalho para decompor as funções que aqui serão apresentadas. Mas para que esta base unidimensional seja capaz de representar modelos bidimensionais faz-se necessário usar um artifício capaz de representar uma função de duas variáveis como sendo de uma única, através do estabelecimento de uma relação de dependência entre as duas mencionadas variáveis. Para tanto, utilizou-se uma malha senoidal na qual seus pontos relacionam-se do seguinte modo:

$$y = k \text{sen}(nx), \quad (14)$$

Com isto podemos representar as velocidades sísmicas,  $v(x, y)$ , em função de apenas um parâmetro  $x$ . Além disso, a função seno é bem maleável dando a oportunidade de ajustar tanto o tamanho da malha quanto a quantidade de pontos a ser utilizada no intervalo desejado. Com esta ferramenta organizamos uma tabela com os pontos e as suas velocidades sísmicas correspondentes. A partir desta tabela a função a ser representada em uma série ondaleta é  $v(x)$ .

### Exemplos

Primeiramente foram utilizadas funções unidimensionais para serem decompostas por ondaletas, como pode ser visto na Figura 2, onde a função  $\text{sen}(x)$  foi representada pela ondaleta Haar no intervalo  $(-2, 2)$ .

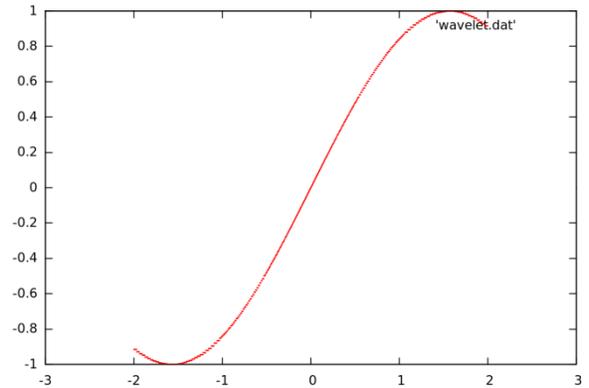


Figura 2: Função  $\text{sen}(x)$ , definida no intervalo  $-2 \leq x \leq 2$ , decomposta por ondaleta usando a base Haar.

Depois de realizados testes com funções unidimensionais, começaram os testes com funções bidimensionais. Utilizando-se a malha senoidal foi possível obter uma aproximação em série ondaleta para um parabolóide definido em  $(-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2)$ . Usando a mudança de variável proposta em (14) podemos perceber que para reduzir a função  $z(x, y) = x^2 + y^2$  a uma única variável com uma cobertura satisfatória do domínio de definição de  $z(x, y)$ , usaremos a sua equivalente  $z(x) = x^2 + (k \text{sen}(nx))^2$  com  $k = 2$  e  $n$  suficientemente grande.

Após ter representado o parabolóide por decomposição ondaleta, tal como pode ser observado na Figura 3, foi utilizado um modelo geológico conhecido visando uma aplicação prática e a preparação de terreno para futuros trabalhos de modelagens direta e inversa com modelos parametrizados por ondaletas.

O modelo escolhido é o representado na Figura 4 por ter uma estrutura bastante complexa, muitas dobras e uma intrusão de rocha salina, além de várias litologias com diferentes velocidades de propagação.

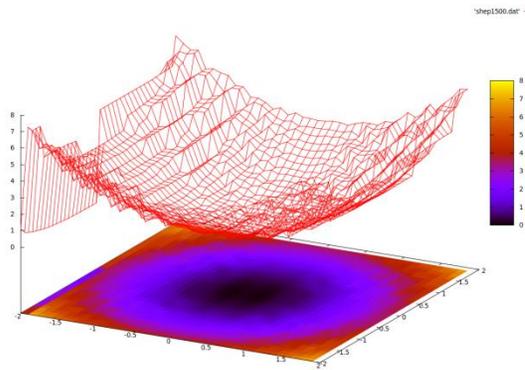


Figura 3: Parabolóide representado por série ondaleta através do uso da técnica de redução do número de variáveis da função.



Figura 4: Modelo geológico do domo de sal parametrização por ondaleta.

**Resultados**

O resultado ideal numa parametrização seria aquele em que as velocidades representassem exatamente os valores de velocidade das estruturas em subsuperfície, ou seja, teríamos uma imagem perfeita de tais estruturas. Na Figura 5, o modelo é apresentado parametrizado por blocos.

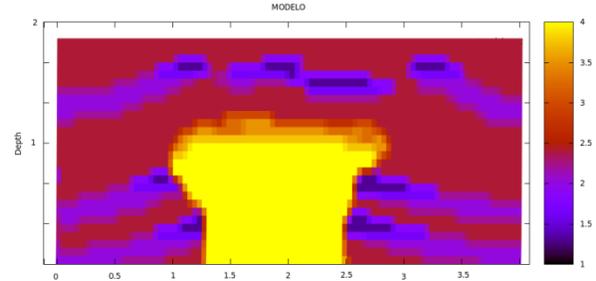


Figura 5: Modelo do domo de sal parametrizado por blocos.

A Figura 6 mostra o modelo do domo de sal parametrizado por ondaleta Haar.

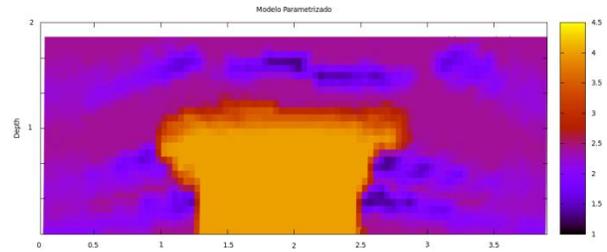


Figura 6: Modelo do domo de sal parametrizado por ondaleta Haar.

Outra forma interessante de apresentar e analisar o resultado obtido é a comparação da função representativa do modelo original e o resultado da decomposição dela em ondaleta, como mostrados nas Figuras 7 e 8.

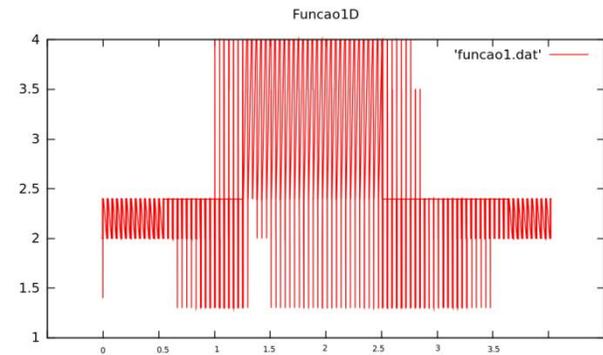


Figura 7: Função unidimensional das velocidades sísmicas lidas sobre os pontos da malha senoidal aplicada sobre o modelo geológico original.

Após a parametrização pôde ser notada algumas alterações na função, porém ainda sim existe uma boa aproximação ta função original.

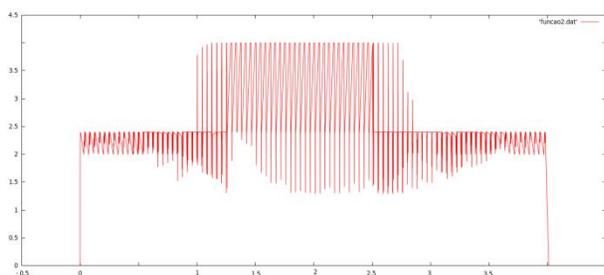


Figura 8: Função unidimensional das velocidades sísmicas calculadas sobre os pontos da malha senoidal sobre o modelo parametrizado por ondaletas.

Santana, J.L.S. & Figueiró, W.M., 2008. Diferentes parametrizações do campo de velocidades sísmicas do modelo geológico da quebra da plataforma continental. III Simpósio Brasileiro da SBGf. Belém, PA, Brasil.

Santos, R.H.M. & Figueiró, W.M., 2006. Modelagem acústica bidimensional usando diferentes parametrizações de campos de velocidades. Revista Brasileira de Geofísica. Vol. 24(1): 103-115.

## Conclusões

Pode-se notar que para funções unidimensionais e contínuas o resultado para a decomposição foi quase perfeita. Para funções bidimensionais a decomposição funcionou de forma bastante satisfatória no caso do parabolóide enquanto que para o modelo geológico, foi possível diferenciar as estruturas e posicioná-las satisfatoriamente no domínio de definição do campo de velocidades.

Para uma perfeita (ou teórica) representação de uma função, a série ondaleta possui infinitos termos. Quando a limitamos, isto é, a truncamos, o que deve ser feito visando aplicações prática, observa-se imprecisões na representação da função, tais como as discrepâncias observadas nas bordas do parabolóide e na função unidimensional representativa do modelo geológico.

O fato de a função unidimensional a ser representada apresentar algumas descontinuidades, exigiu o uso de muitos coeficientes para se obter uma boa aproximação na representação das funções consideradas no presente trabalho.

## Agradecimentos

Agradecemos ao CPGG-UFBA e a PETROBRAS pelo oferecimento de condições para a realização deste trabalho.

## Referências Bibliográficas

Bishop, T.N., Bube, K.P., Cutler, R.T., Langan, R.T., Love, P.L., Resnick, J.R., Shuey, R.T., Spindler, D.A., & Wyld, H.W., 1985. Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media. *Geophysics*, 50: 903-923.

Figueiró, W.M., 1994. Tomografia de Reflexão no caso do Refletor Curvo. Tese de Doutorado. Universidade Federal da Bahia, Salvador, BA, Brasil.

Morenttin, P.A., 1999. Ondas e Ondaletas: da Análise de Fourier à Análise de Ondaletas. EDUSP.

Perin, H. M. & Figueiró, W. M., 2010. Parametrização de campo unidimensional de velocidades sísmicas usando ondaletas. IV Simpósio Brasileiro da SBGf. Brasília, DF, Brasil.