



## Aplicação da curva L e da curva $\theta$ para a escolha do parâmetro ótimo de regularização de ordem um em tomografia eletromagnética de tempos de trânsito

Rafael Rodrigues Manenti, IGEO – Universidade Federal da Bahia  
Amin Bassrei, CPGG/IGEO – Universidade Federal da Bahia & INCT – Geofísica de Petróleo

Copyright 2011, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 12<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, August 15-18, 2011.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 12<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

### Abstract

Since inverse problems are usually ill-posed it is necessary to use some method to reduce their deficiencies. The method that we choose is the regularization by derivative matrices. When a first derivative matrix is used the have the first order. Then, second order regularization is when the matrix is formed by second order differences, and order zero means that the regularization matrix is the identity. There is a crucial problem in regularization, which is the selection of the regularization parameter  $\lambda$ . We used the L-curve as a tool for the selection of  $\lambda$ , which was reintroduced in the literature of inverse problems by Hansen (1992). Also we used a more recent approach, the  $\Theta$ -curve suggested by Santos et al. (2006) and Santos & Bassrei (2007). The application was in geophysical traveltimes electromagnetic tomography in the cross-hole acquisition geometry. The goal is to obtain the 2-D velocity distribution from the measured values of the traveltimes. We present several simulation results with synthetic data, for the first order regularization. We validate the necessity of some kind of regularization, as well as the feasibility of both parameter selection approaches.

### Introdução

Os problemas inversos geofísicos são geralmente mal-postos, pois sua solução pode não ser única, o que caracteriza a ambigüidade, e por vezes a solução pode até mesmo não existir. Um método de inversão em Geofísica de Exploração bastante conhecido em outras áreas é a tomografia. A tomografia foi inicialmente utilizada para imageamento médico, e por lidar com o fenômeno ondulatório ela pode empregar ondas mecânicas (acústica ou elasticidade) ou ondas eletromagnéticas. Do ponto de vista da informação de entrada utilizada no procedimento inverso, a tomografia pode ser agrupada em duas classes: tomografia cinemática, que utiliza apenas os tempos de trânsito entre fonte e receptor, e a tomografia dinâmica ou de

forma de onda, que utiliza a intensidade da onda recebida. Neste trabalho utilizamos a tomografia eletromagnética de tempos de trânsito para o imageamento da subsuperfície em aplicações com o nível de detalhamento necessário em Geofísica de Reservatórios. A inversão matemática propriamente dita é efetuada pela técnica da decomposição em valores singulares, ou SVD do inglês *singular value decomposition*. O SVD apresenta problema dos pequenos valores singulares cuja participação na construção da matriz pseudo-inversa compromete a solução do problema. O efeito dos pequenos valores singulares será compensado pela aplicação de uma técnica de regularização, chamada de regularização por matrizes de derivadas, mais conhecido na literatura de regularização de Tikhonov. A regularização implica na utilização de um fator ou parâmetro de regularização, usualmente designada pela letra grega lambda  $\lambda$ , cuja escolha já constitui um importante problema. Para auxiliar nessa escolha dos valores singulares, utilizaremos a já clássica curva L (Hansen, 1992) e também a mais recente curva  $\Theta$  sugerido por Santos et al. (2006) que aplicaram essas metodologias em tomografia acústica de tempos de trânsito. Santos & Bassrei (2007) utilizaram as mesmas metodologias em tomografia acústica de difração. A extração do parâmetro ótimo da curva L por vezes é complicada conforme mostrado por Terra et al. (2007), que a partir de uma dada curva L, comparou três abordagens que tem essa finalidade. Existem outras alternativas que se propõem a fornecer o parâmetro ótimo, como por exemplo, a validação cruzada generalizada, ou GCV do inglês generalised cross validation. Oliveira e Bassrei (2009) utilizaram o GCV em tomografia eletromagnética de tempos de trânsito.

No presente trabalho apresentamos resultados simulações computacionais. A geometria do sintético é proveniente do trabalho de Irving et al. (2007). Göktürkler & Balkaya (2010) utilizaram a curva L em tomografia eletromagnética de tempos de trânsito. Eles utilizaram três modelos sintéticos, inclusive o modelo de Irving et al. (2007). Neste trabalho nos repetimos o procedimento da curva L de Göktürkler & Balkaya (2010) e também empregamos a curva  $\Theta$ . Nós confirmamos a necessidade de se empregar algum tipo de regularização nesse problema inverso mal-posto, assim como a eficácia da regularização por matrizes de derivadas. As duas abordagens para a seleção do parâmetro de regularização ótimo proporcionaram resultados satisfatórios, sendo que a curva  $\Theta$  proporcionou um  $\lambda$  melhor que o sugerido pela curva L.

## Metodologia

Para ser feita a inversão de dados, foi utilizado o método de decomposição em valores singulares, o SVD, sendo a matriz a ser invertida denominada de matriz tomográfica. Como o problema é mal-posto, isto é, não possui solução única, não depende continuamente dos dados de entrada ou sua solução não existe, sua matriz é mal condicionada, pois as soluções obtidas são sensíveis aos dados de entrada, o que significa que uma pequena perturbação nos dados poderá não implicar necessariamente em uma pequena perturbação no modelo, sendo assim o problema considerado mal-posto.

Neste trabalho, para realizarmos a inversão, utilizamos o Método dos Mínimos Quadrados Amortecidos, onde é necessário fazer o uso de parâmetro de regularização, que garantirá que a matriz tomográfica será inversível. Para obter resultados, foram feitas simulações com vários parâmetros  $\lambda$ , de modo a se construir a curva L e a curva  $\Theta$ . O joelho da curva L e o mínimo da curva  $\Theta$ , indicam os melhores valores de  $\lambda$ . A título de certificação construímos uma terceira curva, que é a erro RMS do modelo em função do parâmetro de regularização  $\lambda$ .

A tomografia eletromagnética consiste em selecionarmos uma dada área de estudo e separarmos em pequenas células de mesma dimensão, e fazermos um estudo das propriedades físicas da área selecionada. A tomografia clássica requer distribuição das fontes dos receptores em torno do objeto a ser imageado. Como a tomografia de tempos de trânsito utiliza os tempos de trânsito entre fontes e receptores como vetor de dados observados na inversão, desprezando a forma da onda. A reconstrução tomográfica permite estimar uma função utilizando integrais de linha da mesma, haja vista que a propagação de energia através de um meio pode ser escrita por uma integral de parâmetros:

$$t_{\text{raio}} = \int_{\text{raio}} s(x, z) dl.$$

A propagação dessas ondas eletromagnéticas pode ser modelada através de traçado de raios. Estes raios, que percorrerão a distância entre fonte e receptor, perpendicular à frente de onda, aliados à separação do meio em células, irão discretizar o meio o qual estão percorrendo. Esta análise é válida somente para meios isotrópicos. Neste trabalho, foi utilizado um modelo onde o contraste de velocidades é baixo, fazendo com que o ângulo de transmissão do raio seja considerado constante, tendo então uma abordagem utilizando raios retos, e não curvos, como ocorre na realidade. Com isso está pronto então o sistema linear a ser resolvido, sendo  $\mathbf{t}$  como o vetor de dados coletados,  $G$  a matriz que discretiza o caminho percorrido pelos raios, ou matriz tomográfica, e  $\mathbf{s}$  o vetor vagarosidade,

$$\mathbf{t} = G\mathbf{s}.$$

Neste trabalho a matriz tomográfica  $G$  têm dimensões de  $2025 \times 704$ , ou seja, o sistema a ser resolvido possui 2025 equações e 704 incógnitas, sendo então um classificado como um sistema sobredeterminado.

## Regularização

A regularização introduz termos referentes à suavidade do modelo na função objetivo para a resolução do problema (Santos, 2006). Sendo a função objetivo:

$$\varphi(\mathbf{s}) = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$

onde  $\mathbf{e} = \mathbf{d} - G\mathbf{s}$ .

A introdução dos parâmetros de regularização nos permite escolher entre soluções com maior erro e menor suavidade e soluções com menor erro e maior suavidade. Por isso é necessário um critério para a seleção de um parâmetro  $\lambda$ .

O tratamento matemático utilizado no trabalho foi a regularização por matrizes de derivada, também chamado de suavização. A função objetivo passa a ser então:

$$\varphi(\mathbf{s}) = \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \lambda(D_n \mathbf{s})^T D_n \mathbf{s},$$

sendo  $(D_n \mathbf{s})^T D_n \mathbf{s}$  a aproximação da derivada de ordem  $n$ . Derivando a função  $\varphi$ , obtemos então a equação dos mínimos quadrados amortecidos:

$$\mathbf{s}^{\text{est}} = (G^T G + \lambda D_n^T D_n)^{-1} G^T \mathbf{t}.$$

Caso  $n = 0$ , então a equação se resume ao método dos mínimos quadrados. A proposta deste trabalho é a utilização da curva L e da curva  $\Theta$  como critérios de seleção do parâmetro de regularização ótimo.

## Critério da Curva L

O nome dessa curva é dado pela semelhança, na teoria, que a curva tem com a letra L, mas na prática a forma pode ser um pouco diferente, às vezes muito diferente. O critério de seleção do parâmetro de regularização chamado de Curva L consiste em fazermos diversas simulações numéricas, sendo cada cálculo feito com um valor de  $\lambda$  diferente, e após todos os cálculos, construímos um gráfico com os valores da suavidade dos modelos obtidos versus os erros RMS entre a vagarosidade estimada e a vagarosidade real. O parâmetro mais adequado ao sistema será encontrado no joelho da curva, caracterizando-se em um valor que possua uma boa suavidade e um erro estimado relativamente baixo.

## Critério da Curva $\Theta$

A curva  $\Theta$  se baseia nos dados provenientes da curva L. Esta curva é utilizada para que possamos encontrar em qual dos valores de  $\lambda$  existe um ângulo maior entre o  $\lambda$  anterior e o  $\lambda$  posterior. Este método é utilizado para curvas onde o joelho da curva L não está tão bem definido, tornando mais difícil a escolha do  $\lambda$  ótimo. A construção dessa curva se dá com os valores dos cossenos dos valores  $\theta$ , ficando estes valores englobados

entre 0 e 1. Os valores de  $\theta$  mais próximos de  $0^\circ$  terão co-senos com valores próximos de 1, e valores de  $\theta$  mais próximos de  $90^\circ$  terão co-seno com valores próximos de 0. Com isso, escolheremos na curva  $\Theta$  o parâmetro  $\lambda$  com o valor mais baixo, estando obviamente de acordo com a curva L, pois poderá haver valores baixos que não correspondem com a curva L, sendo então descartados.

### Simulações Numéricas

Para este trabalho, foi utilizado um modelo geológico sintético, dividido em 704 blocos quadrados iguais, com lado de 10 metros, sendo organizados em um retângulo de 16 blocos na horizontal e 44 blocos na vertical. A aquisição de dados possui uma geometria poço à poço, sendo 45 fontes, espaçadas em 9,9 metros, no poço esquerdo e 45 receptores, espaçados em 9,9 metros no poço direito, totalizando em 2025 raios ou 2025 equações. Por este trabalho estar utilizando ondas eletromagnéticas, as velocidades serão muito altas, e com isso, os tempos de trânsito, muito baixos. No modelo poderemos ver uma velocidade de *background* com valor de 0,060 m/ns e algumas outras camadas e corpos variando entre altas e baixas velocidades, de 0,057 e 0,064 m/ns (Figura 1). O método de inversão empregado neste trabalho foi o SVD sem fazer uma seleção muito criteriosa de valores singulares, eliminando apenas aqueles com valor inferior a  $10^{-20}$ . O processo empregado neste trabalho foi a partir deste modelo geológico, e a utilização da equação dos métodos dos mínimos quadrados amortecidos, fizemos um cálculo de vagarosidade com o seu respectivo  $\lambda$ . Ao fim do cálculo desta vagarosidade, obtemos então o valor do erro RMS entre a vagarosidade verdadeira e a estimada e o valor da suavidade do modelo. Repetiremos então os cálculos para cada  $\lambda$  trabalhado. Quando todos estes cálculos são terminados, construímos então uma curva  $|\epsilon| \times |D_r|s$  para cada  $\lambda$  utilizado. Ao terminarmos esta plotagem, iremos então calcular os ângulos existentes entre o  $\lambda$  e questão e o  $\lambda$  anterior e o  $\lambda$  em questão e o  $\lambda$  posterior e calcularemos o co-seno desses ângulos, e plotarmos uma curva  $\cos(\theta) \times \lambda$ . Após e selecionaremos aquele  $\lambda$  que se encontrar ao joelho da curva, guardando então os melhores valores de suavidade e erro do modelo.

### Resultados

Foram geradas para cada configuração, a curva L e a curva  $\Theta$ , e com essas curvas pode-se fazer uma seleção do melhor parâmetro de regularização e assim recuperar os modelos com certa precisão. Primeiramente foi feita uma recuperação sem ruído, para testar o método, após o teste, para testar a eficácia do método, adicionamos ruído aos dados de entrada. Para este trabalho, foi introduzido aos dados de entrada um ruído aleatório, com valores de  $\alpha = 0,005$  e  $\alpha = 0,01$ .

Podemos ver que na “quina” da curva há uma concentração de pontos, sendo para ponto um valor diferente de  $\lambda$ , mostrando que há uma região de valores de  $\lambda$  podem satisfazer o sistema de equações para o modelo sem ruído. Com a adição de ruído foi visto que as curvas continuaram com a mesma característica, tendo a

recuperação dos dados com ruído gerado modelos com imagem satisfatória, com algumas perturbações, garantindo então a validade da técnica. Os resultados foram organizados do seguinte modo:

A curva L que resulta das simulações pode ser vista na Figura 2 e a curva  $\Theta$  na Figura 3. Com o  $\lambda$  associado ao mínimo desta última curva, no caso  $\lambda = 0,01$ , obtivemos o melhor modelo recuperado que pode ser visto na Figura 4. Esse modelo foi recuperado a partir de dados livres de ruído.

Para as próximas simulações utilizaremos dados com ruído, isto é, o tempo de trânsito será contaminado com uma seqüência quase-aleatória. Alguns valores de tempo de trânsito serão maiores que os originais e outros serão menores. Eventualmente em alguns pontos o valor de ruído será bem pequeno, próximo de zero. A magnitude de ruído será função do fator  $\alpha$ . Nesse trabalho utilizamos  $\alpha = 0,005$  e  $\alpha = 0,01$ .

A Figura 5 mostra a curva L para a recuperação do modelo com a adição de ruído com  $\alpha = 0,005$ . Para o mesmo nível de ruído a curva  $\Theta$ , que forneceu  $\lambda = 10$ , pode ser vista na Figura 6. Podemos ver que houve uma certa perturbação, mas o modelo recuperado, conforme pode ser visto na Figura 7, ainda guardou as feições do modelo original.  $\lambda$

Considerando agora a adição de ruído com  $\alpha = 0,01$ , a curva L pode ser vista na Figura 8. Para o mesmo nível de ruído a curva  $\Theta$ , que forneceu  $\lambda = 100$ , pode ser vista na Figura 9. Podemos ver que houve um pouco mais de perturbação em relação ao caso anterior, mas o modelo recuperado, conforme pode ser visto na Figura 10, ainda guardou as feições do modelo original.

Nesses três conjuntos de simulações numéricas a curva  $\Theta$  se mostrou mais eficaz que a curva L. Para validar esses resultados, construímos as curvas do erro RMS do modelo versus o parâmetro de regularização  $\lambda$ . Esse erro é o erro RMS entre os parâmetros de modelo verdadeiro e os parâmetros de modelos estimados (ou simplesmente modelo recuperado). Esse critério é bastante artificial e não poderia ser utilizado no imageamento de dados reais, uma vez que o conceito de modelo verdadeiro não existe. Porém, como nesse trabalho desejamos validar a metodologia proposta e estamos utilizando apenas dados sintéticos, utilizamos esse critério para fins de certificação.

A Figura 11 mostra o erro RMS do modelo versus o parâmetro de regularização  $\lambda$ , para o caso sem ruído. Para  $\alpha = 0,005$  a curva correspondente pode ser vista na Figura 12, e para  $\alpha = 0,01$  na Figura 13. Note que nos três casos, o  $\lambda$  ótimo sugerido pelas curvas  $\Theta$  correspondente se encontra num ponto de mínimo, ou pelo menos numa região de mínimo nas Figuras 11, 12 e 13.

## Conclusões

Neste trabalho, foi feita a análise da aplicabilidade da técnica da curva L e da curva  $\Theta$  para a escolha do  $\lambda$  ótimo de regularização aplicada à tomografia eletromagnética de tempos de trânsito, aplicada em um modelo sintético. Os modelos recuperados apresentam uma boa concordância com o modelo original, indicando que o parâmetro de regularização escolhido com as curvas empregadas permite recuperar de forma adequada o modelo. Este método utilizado é abordado em inversão de matrizes, sendo útil para malhas tomográficas de pequeno e médio porte. Por vezes a curva L oferece certa ambigüidade, o que é menos problemático na curva  $\Theta$ .

## Agradecimentos

Os autores agradecem ao LAGEP/CPGG/UFBA pela utilização dos recursos computacionais, à FINEP pelo apoio à Rede CT-PETRO de Geofísica de Exploração – Rede 01 e ao CNPq e PETROBRAS pelo apoio ao INCT – Geofísica de Petróleo. Rafael Manenti agradece ao PIBIC/UFBA/CNPq pela bolsa de Iniciação Científica. Amin Bassrei agradece à PETROBRAS pelo apoio aos projetos “Investigação do uso da Tomografia Interpoços como Ferramenta para Caracterização de Reservatórios Complexos” e “Tomografia Sísmica Aplicada ao Problema do Monitoramento do Armazenamento Geológico do CO<sub>2</sub>” e também ao CNPq pelo projeto 308.875/2007-9 (bolsa de pesquisa).

## Referências

**Göktürkler, G., Balkaya, Ç.,** 2010, Travelttime tomography of crosshole radar data without ray tracing, *Journal of Applied Geophysics*, vol. 72, 213-224.

**Hansen, P. C.,** 1992, Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve. *Society for Industrial and Applied Mathematics Review*, vol. 34, 561-580.

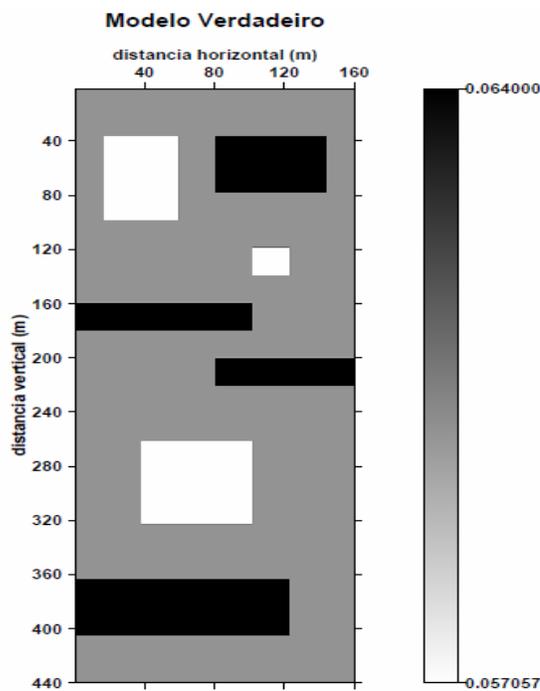
**Irving, J. D., Knoll, M. D., Knight, R. J.,** 2007, Improving crosshole radar velocity tomograms: a new approach to incorporating high-angle travelttime data, *Geophysics*, vol. 72, J31–J41.

**Oliveira, N. P., e Bassrei, A.,** 2009, Critério da validação cruzada generalizada na escolha do parâmetro ótimo: aplicação em tomografia linear de tempos de trânsito, 11º Congresso Internacional da Sociedade Brasileira de Geofísica, Salvador, BA, Brasil, 24 a 28 de agosto de 2009, CD-ROM, 6 pp.

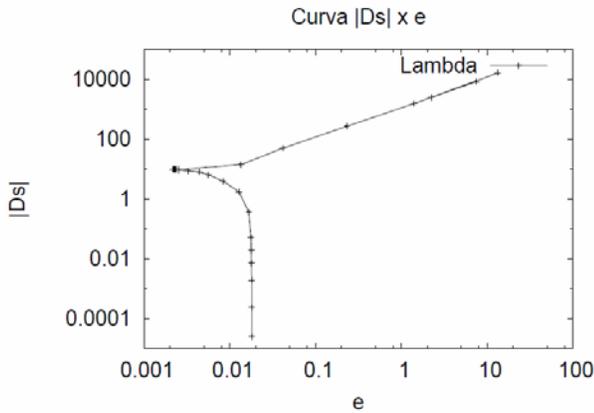
**Santos, E. T. F., Bassrei, A., and Costa, J.,** 2006, Evaluation of L-curve and  $\Theta$ -curve approaches for the selection of regularization parameter in anisotropic travelttime tomography, *Journal of Seismic Exploration*, vol. 15, 245-272.

**Santos, E. T. F., Bassrei, A.,** 2007, L- and  $\Theta$ -curve approaches for the selection of regularization parameter in geophysical diffraction tomography, *Computers & Geosciences*, vol., 33, 618-629.

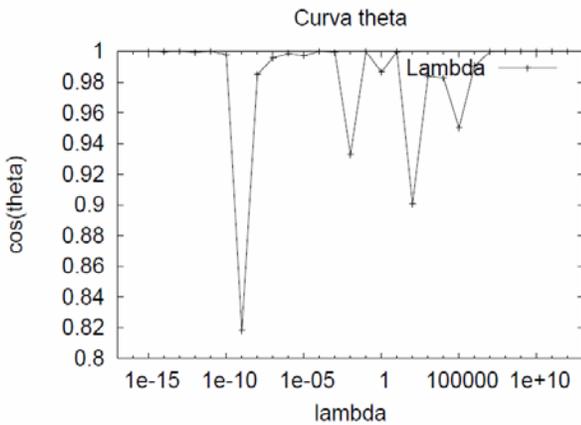
**Terra, F. A., Bassrei, A., e Santos, E. T. F.,** 2007, Metodologias de extração de parâmetro ótimo de regularização a partir da curva L: aplicação em tomografia de tempos de trânsito, 10º Congresso Internacional da Sociedade Brasileira de Geofísica, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 19 a 22 de novembro de 2007, CD-ROM, 6 pp.



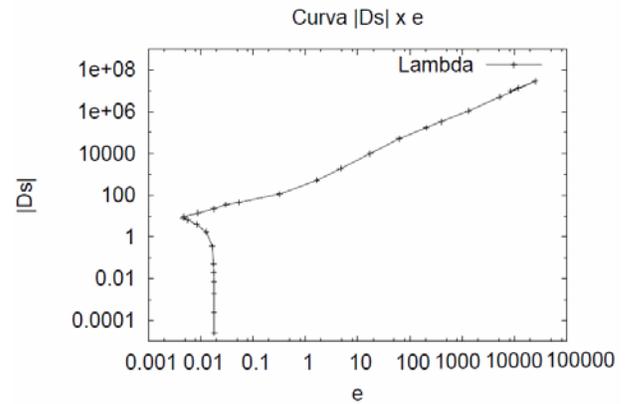
**Figura 1:** Modelo verdadeiro. A barra de cores indica a velocidade da onda eletromagnética em m/ns.



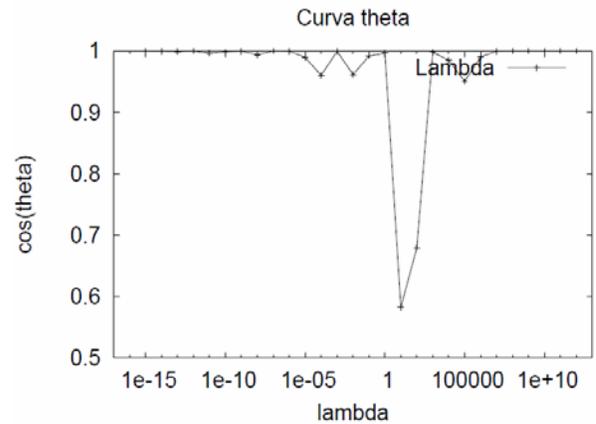
**Figura 2:** Curva L para regularização de ordem um. Dados livres de ruído.



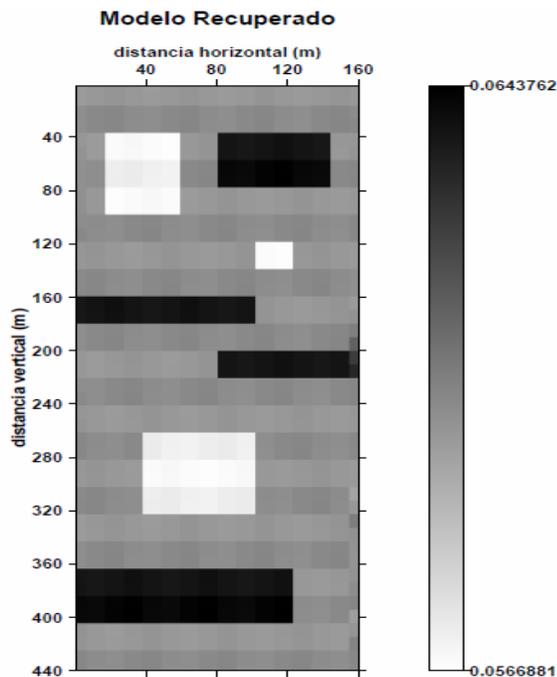
**Figura 3:** Curva  $\Theta$  para regularização de ordem um. Dados livres de ruído.



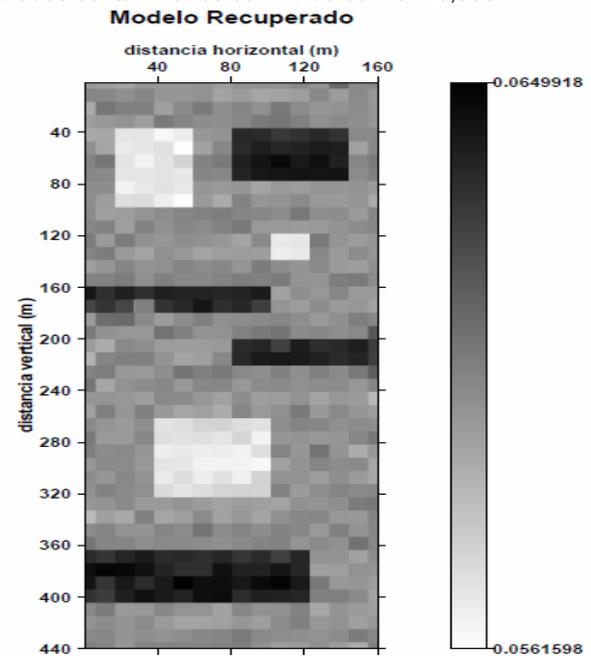
**Figura 5:** Curva L para regularização de ordem um. Dados contaminados com ruído com  $\alpha = 0,005$ .



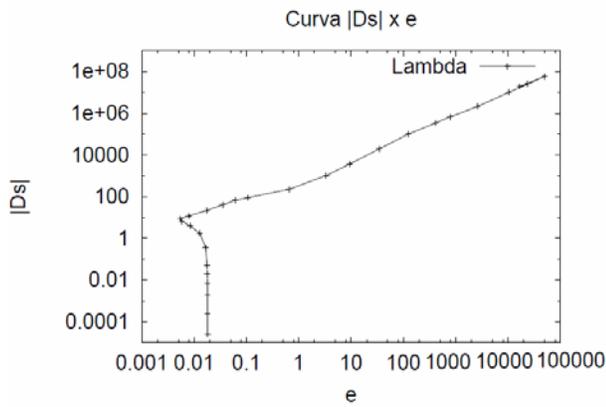
**Figura 6:** Curva  $\Theta$  para regularização de ordem um. Dados contaminados com ruído com  $\alpha = 0,005$ .



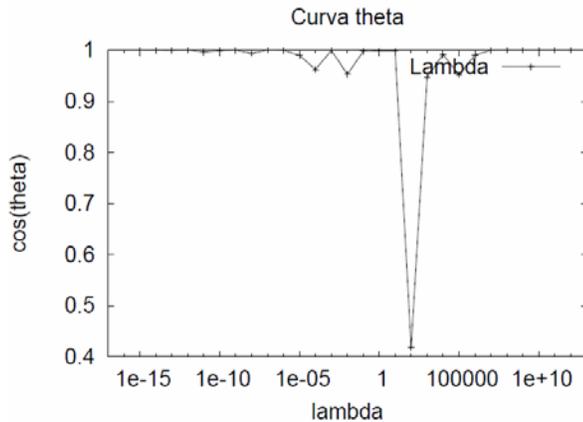
**Figura 4:** Modelo recuperado para regularização de ordem um, com parâmetro de regularização ótimo proveniente da curva  $\Theta$ . Dados livres de ruído.



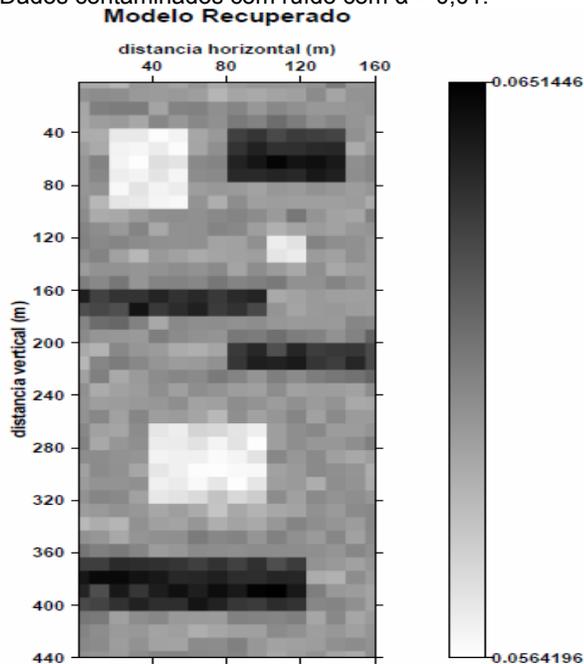
**Figura 7:** Modelo recuperado para regularização de ordem um, com parâmetro de regularização ótimo proveniente da curva  $\Theta$ . Dados contaminados com ruído com  $\alpha = 0,005$ .



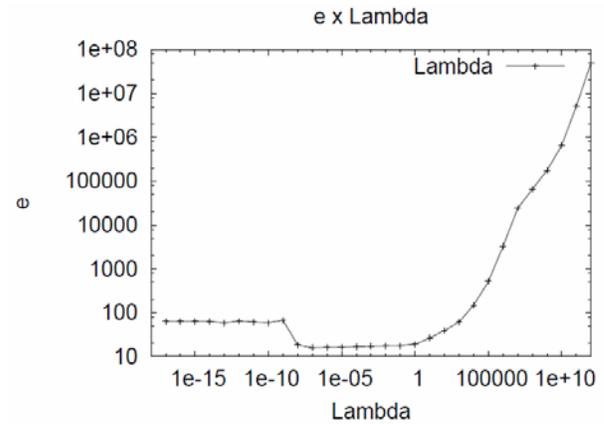
**Figura 8:** Curva L para regularização de ordem um. Dados contaminados com ruído com  $\alpha = 0,01$ .



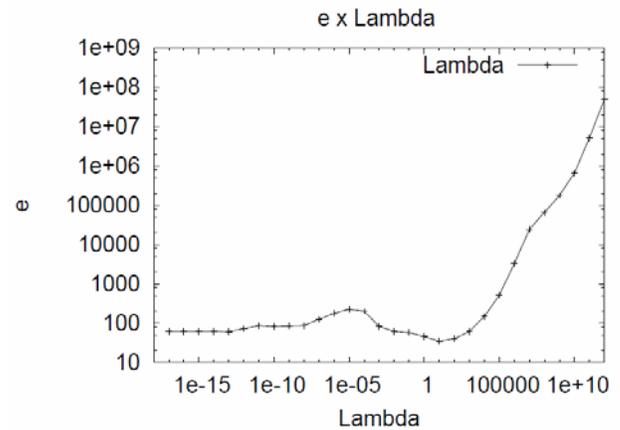
**Figura 9:** Curva  $\Theta$  para regularização de ordem um. Dados contaminados com ruído com  $\alpha = 0,01$ .



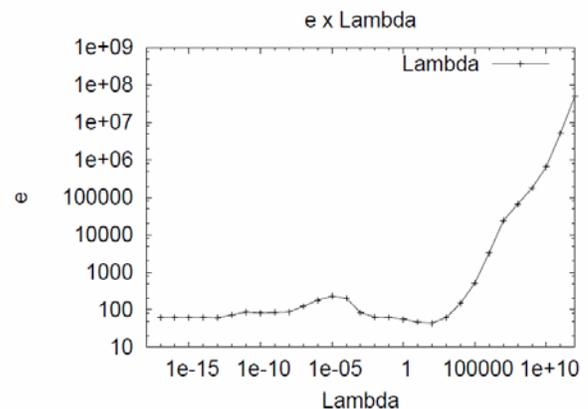
**Figura 10:** Modelo recuperado para regularização de ordem um, com parâmetro de regularização ótimo proveniente da curva  $\Theta$ . Dados contaminados com ruído com  $\alpha = 0,01$ .



**Figura 11:** Curva de erro RMS entre o modelo verdadeiro e o modelo recuperado em função do parâmetro de regularização  $\lambda$ . Regularização de ordem um com dados livres de ruído.



**Figura 12:** Curva de erro RMS entre o modelo verdadeiro e o modelo recuperado em função do parâmetro de regularização  $\lambda$ . Regularização de ordem um com dados contaminados com ruído com  $\alpha = 0,005$ .



**Figura 13:** Curva de erro RMS entre o modelo verdadeiro e o modelo recuperado em função do parâmetro de regularização  $\lambda$ . Regularização de ordem um com dados contaminados com ruído com  $\alpha = 0,01$ .