

## Modelagem acústica da onda P em meios TTI usando uma nova equação diferencial de segunda ordem no tempo

Diego F. Barrera Pacheco<sup>1</sup>, Flor A. Vivas<sup>2</sup> e Reynam da Cruz Pestana<sup>1</sup>, <sup>1</sup>Universidade Federal da Bahia, Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia (CPGG) e <sup>2</sup>Universidad de Pamplona (Colômbia)

Copyright 2011, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica.

This paper was prepared for presentation at the Twelfth International Congress of the Brazilian Geophysical Society, held in Rio de Janeiro, Brazil, August 15-18, 2011.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the Twelfth International Congress of The Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

### Abstract

**The anisotropy in seismic data has been observed in several areas of exploration. Normally, the conventional methods of migration are insufficient in this areas. Many works introduce equations with acoustic approximation for VTI and TTI media, due to the need for ever better seismic imaging of subsurface, both for scientific purposes and for the hydrocarbons industry.**

**We propose a new P wave equation for TTI media, starting from the exact equation in function of phase velocity of Tsvankin (1996), which is a fourth order differential equation, reducing this to a differential equation of second order in time, thus facilitating its computational implementation, and separating the waves P to the SV.**

### Introdução

O processamento sísmico convencional quando é aplicado em dados sísmicos provenientes de regiões de alta complexidade geológica e com variações direcionais das propriedades físicas do meio, não consegue produzir imagens em profundidade adequadas para a interpretação sísmica. Desta forma, para se produzir imagens sísmicas de boa qualidade, faz-se necessário a aplicação de técnicas de migração sísmica pré-empilhamento com anisotropia (Yilmaz, 1987).

A anisotropia sísmica é definida como a variação direcional das propriedades sísmicas, por exemplo, a velocidade, a amplitude, a polarização (Li et al., 2007). A anisotropia pode se apresentar em razão do fraturamento, tipo de rocha (geralmente as camadas de folhelho induzem anisotropia (Li et al., (2007))), variação lateral e vertical de faces (fatores na deposição da rocha), entre outras. Cada um desses casos precisa ser abordado de uma forma especial no procesamento sísmico pré-empilhamento, a depender do tipo de anisotropia presente no meio.

A anisotropia em meios com isotropia transversalmente inclinada (TTI) é definida como a variação das propriedades físicas de um meio ao longo do eixo de simetria das camadas, rotacionado de ângulo  $\phi$ , com respeito a um eixo de simetria vertical (Figura 1c). A isotropia transversal

vertical (VTI) é um caso particular da anisotropia TTI, definida como a variação das propriedades físicas de um meio ao longo de um eixo de simetria vertical (Figura 1a). Para meios onde o eixo de simetria é horizontal o tipo de anisotropia é chamada isotropia transversal horizontal (HTI) (Figura 1b). Para representar o meio geológico mais corretamente, vários autores, como Thomsen (1986), Tsvankin (1996), Alkhalifah (2000), Zhou et al. (2006) e Du et al. (2008) desenvolveram equações de onda que simulam com melhor precisão a propagação de ondas sísmicas em meios VTI e de forma mais geral para meios TTI. Desta forma, levando em conta a dependência da velocidade com o ângulo, a focalização e posicionamento dos refletores é melhorada, pois a migração pré-empilhamento é muito mais sensível às velocidades de propagação.

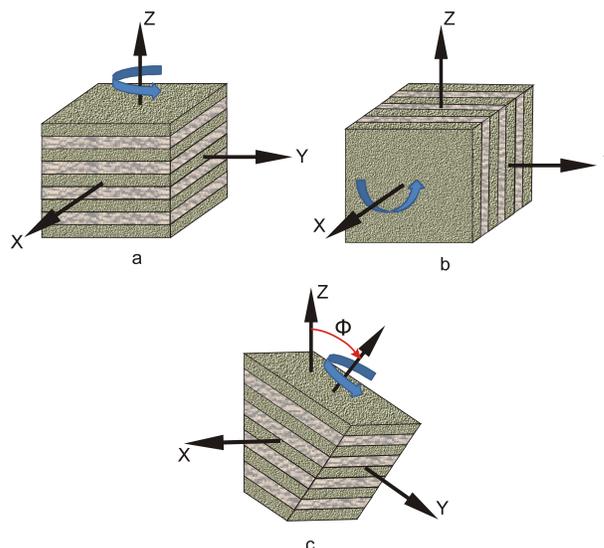


Figure 1: (a) Meio com isotropia transversal vertical (VTI), (b) meio com isotropia transversal horizontal (HTI) e (c) meio com isotropia transversal inclinada (TTI).

Alkhalifah (2000) propõe uma equação pseudoacústica para meios com isotropia VTI, mas a equação é de quarta ordem no tempo e no espaço, portanto, mais difícil de ser implementada computacionalmente. Du et al., (2008), partindo das equações de Alkhalifah (2000), e usando uma função auxiliar, conseguem diminuir a ordem, obtendo duas equações diferenciais parciais de segunda ordem, que são mais facilmente implementadas computacionalmente, mas com o problema de que a onda P é contaminada com o efeito da onda SV (Figura 2). Liu et al., (2009) propõem um método de separação das

ondas P e SV para meios VTI usando as equações de Alkhalifah (2000). Eles apresentam as equações para as ondas P e SV, mas obtêm uma equação para a onda SV que fisicamente não é propagante.

Neste trabalho apresentamos o desenvolvimento de uma equação para a propagação da onda P em meios com anisotropia TTI, partindo da equação de onda em função da velocidade de fase (Tsvankin, 1996), que é uma equação diferencial de quarta ordem no tempo e, assim, conseguimos reduzir esta a uma equação de segunda ordem, facilitando assim sua implementação computacional e separando a onda P da onda SV.

### Equação da onda P em meios TTI

Para obtermos uma equação da onda P num meio TTI, partimos da equação de Tsvankin (1996) para meios VTI. Após a aplicação de uma rotação, esta equação passa ter a seguinte forma:

$$\frac{v^2(\theta, \phi)}{v_p^2} = 1 + \varepsilon \sin^2(\theta - \phi) - \frac{f}{2} \pm \frac{f}{2} \left[ \left( 1 + \frac{2\varepsilon \sin^2(\theta - \phi)}{f} \right)^2 - \frac{2(\varepsilon - \delta) \sin^2 2(\theta - \phi)}{f} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

onde  $\phi$  é o ângulo de rotação do eixo de simetria,  $\theta$  é o ângulo de fase,  $f = 1 - \frac{v_s^2}{v_p^2}$ ,  $\varepsilon$  e  $\delta$  são os parâmetros de Thomsen, sendo esta equação exata.

Partindo da equação (1) e considerando as seguintes relações para as funções seno e cosseno:

$$\sin \theta = \frac{v^2(\theta, \phi) k_x}{\omega},$$

$$\cos \theta = \frac{v^2(\theta, \phi) k_z}{\omega},$$

e, agora, tomando  $f = 1$ , substituímos os termos anteriores na equação (1) e obtemos a equação (2). Esta equação também foi apresentada no trabalho de Zhang et al. (2005):

$$v_{p0}^4(\varepsilon - \delta) \left( \frac{1}{2} \sin^2 2\phi k_z^4 - \sin 4\phi k_x k_z^3 - \sin^2 2\phi k_x^2 k_z^2 - 2 \cos^2 2\phi k_x^2 k_z^2 + \sin 4\phi k_x^3 k_z + \frac{1}{2} \sin^2 2\phi k_x^4 \right) + v_{p0}^2 \omega^2 [2\varepsilon \sin 2\phi k_x k_z - (1 + 2\varepsilon \sin^2 \phi) k_z^2 - (1 + 2\varepsilon \cos^2 \phi) k_x^2] + \omega^4 = 0, \quad (2)$$

A equação (2) é uma equação de quarta ordem no tempo, apresentando a mesma dificuldade com a presença do artefato da onda SV ("diamond artefact"), como tem sido mostrado nos trabalhos de Du et al. (2008) e Zhou et al. (2006).

No intuito de fazer um análise das raízes da equação (2), introduzimos os termos  $a$  e  $b$  em função de  $\varepsilon$ ,  $\delta$ ,  $\phi$ ,  $k_x$  e  $k_z$ , na forma:

$$a = (\varepsilon - \delta) \left( \frac{1}{2} \sin^2 2\phi k_z^4 - \sin 4\phi k_x k_z^3 - \sin^2 2\phi k_x^2 k_z^2 - 2 \cos^2 2\phi k_x^2 k_z^2 + \sin 4\phi k_x^3 k_z + \frac{1}{2} \sin^2 2\phi k_x^4 \right),$$

$$b = 2\varepsilon \sin 2\phi k_x k_z - (1 + 2\varepsilon \sin^2 \phi) k_z^2 - (1 + 2\varepsilon \cos^2 \phi) k_x^2.$$

Em seguida, simplificando a equação (2) à forma:

$$av_{p0}^4 + bv_{p0}^2 \omega^2 + \omega^4 = 0. \quad (3)$$

observa-se que somente as potências pares de  $\omega$  aparecem na equação (3) e podemos ainda simplificá-la com a troca da variável  $x$  por  $\omega^2$ , ou seja:

$$av_{p0}^4 + bv_{p0}^2 x + x^2 = 0. \quad (4)$$

Da equação (4) obtemos as seguintes raízes:

$$\omega_1 = x_1 = + \sqrt{\frac{-bv_{p0}^2 + \sqrt{b^2 v_{p0}^4 - 4av_{p0}^4}}{2}},$$

$$\omega_2 = x_2 = - \sqrt{\frac{-bv_{p0}^2 + \sqrt{b^2 v_{p0}^4 - 4av_{p0}^4}}{2}},$$

$$\omega_3 = x_3 = + \sqrt{\frac{-bv_{p0}^2 - \sqrt{b^2 v_{p0}^4 - 4av_{p0}^4}}{2}},$$

$$\omega_4 = x_4 = - \sqrt{\frac{-bv_{p0}^2 - \sqrt{b^2 v_{p0}^4 - 4av_{p0}^4}}{2}}.$$

A expressão introduzida para  $a$  torna-se zero, no caso de anisotropia elíptica, isto é,  $\varepsilon = \delta$ , fazendo-se com que as frequências  $\omega_1$  e  $\omega_2$  sejam sempre nulas, o que leva a um absurdo. Assim, neste caso, o sinal negativo é o selecionado.

Em relação à  $\omega_3$  e  $\omega_4$  pode-se mostrar que somente o sinal positivo em  $\omega_3$  permite reduzi-la ao caso VTI quando  $\phi = 0$ . Portanto selecionamos a expressão de  $\omega_3$ , pois essa raiz consegue modelar, de forma correta, a propagação da onda P em meios TTI. Tomando-se o quadrado de  $\omega_3$  e fazendo-se uma expansão com termos até segunda ordem na raiz quadrada, obtemos as equações (5) e (6), respectivamente.

$$\omega_3^2 = - \frac{v_{p0}^2 b}{2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4a}{b^2}} \right], \quad (5)$$

$$\omega^2 = v_{p0}^2 \left( \frac{a - b^2}{b} \right). \quad (6)$$

Substituindo-se as expressões de  $a$  e  $b$  na equação (6), obtemos a expressão que modela a onda P em meios TTI, na forma:

$$\omega^2 = v_{p0}^2 \left\{ (\varepsilon - \delta) \left[ \frac{1}{2} \sin^2 2\phi k_z^4 - \sin 4\phi k_x k_z^3 - \sin^2 2\phi k_x^2 k_z^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cos^2 2\phi k_x^2 k_z^2 + \sin 4\phi k_x^3 k_z + \frac{1}{2} \sin^2 2\phi k_x^4 \right] \right. \\ \left. - \left[ 2\varepsilon \sin 2\phi k_x k_z - (1 + 2\varepsilon \sin^2 \phi) k_z^2 - (1 + 2\varepsilon \cos^2 \phi) k_x^2 \right]^2 \right\} / \\ \left[ 2\varepsilon \sin 2\phi k_x k_z - (1 + 2\varepsilon \sin^2 \phi) k_z^2 - (1 + 2\varepsilon \cos^2 \phi) k_x^2 \right]. \quad (7)$$

Assim, a equação (7) é uma equação de segunda ordem no tempo e se reduz ao caso VTI, como esperado da expressão de  $\omega_3$ , fazendo  $\phi = 0$ , ou seja:

$$\omega^2 = v_{p0}^2 \left\{ \frac{-2(\varepsilon - \delta) k_x^2 k_z^2}{k_z^2 + k_x^2 + 2\varepsilon k_x^2} + (k_z^2 + k_x^2 + 2\varepsilon k_x^2) \right\}. \quad (8)$$

Tanto a equação (7) como a (8), por serem equações de segunda ordem no tempo, devem separar de forma correta a onda P da componente da onda SV, presente na modelagem que utilizam equações de quarta ordem no tempo.

Num desenvolvimento apresentado por Zhan et al., (2011), onde uma matriz de rotação é utilizada sobre as equações VTI, rotação com um ângulo equivalente ao aplicado ao eixo de simetria, obtém-se também equações de segunda ordem para meios TTI, mostrando que a separação de onda P e SV é completa. Como mostraremos na seguinte seção, a equação (7) também consegue produzir a propagação apenas da onda P, sem a presença da onda SV, que normalmente aparece na solução da onda P, quando modelada a partir das equações de quarta ordem no tempo.

### Modelagem numérica

A modelagem numérica utilizando a equação (7) é implementada através do Método de Expansão Rápido (em inglês, REM) para a parte temporal e o método pseudo-espectral para as derivadas espaciais.

O método REM foi proposto por Pestana e Stoffa (2010) e consiste em obter uma solução exata para a equação da onda no tempo, utilizando-se a expansão em polinômios de Chebychev (Tal-Ezer et al., 1987). Através do REM, o campo de onda pode ser calculado, a partir do campo de onda registrado, para qualquer tempo de propagação e com qualquer ordem de aproximação para a derivada segunda no tempo.

Inicialmente apresentamos os resultados numéricos obtidos para o caso VTI, onde a modelagem através da equação (8) permite separar completamente a onda P da SV. Na Figura 2, observa-se que a aproximação de quarta

ordem conserva o efeito diamante, associado à onda SV, que não é eliminado pelo simples fato de fazer  $v_s = 0$  na equação de Tsvankin (1996). Já a modelagem, através de uma equação de segunda ordem no tempo, proposta por Pestana et al. (2011), esse efeito é completamente eliminado.

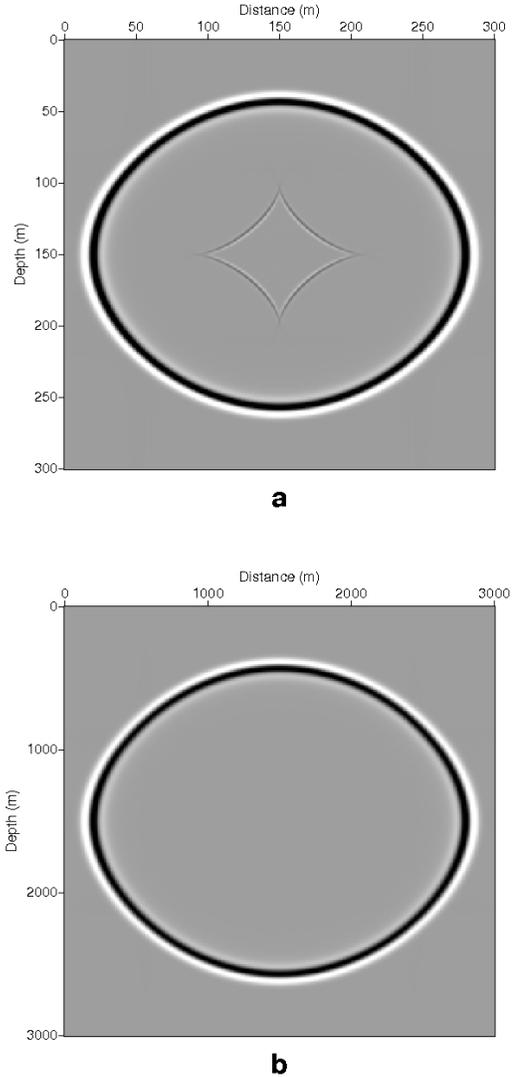
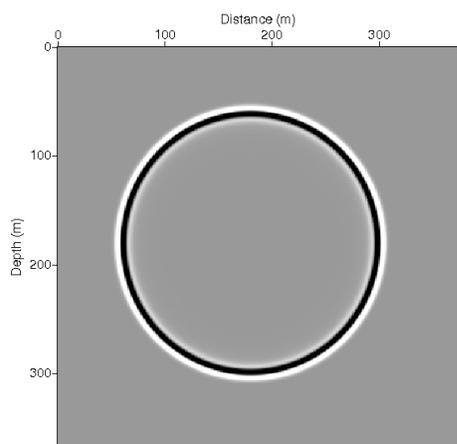


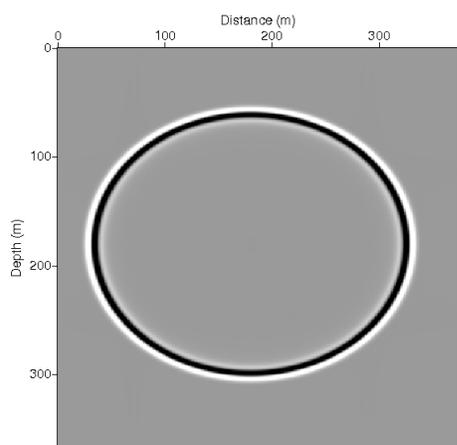
Figure 2: Frente de onda P obtido pela modelagem a través de: (a) equação de Du et al. (2008)., (b) equação de Pestana et al. (2011).

Na Figura 3, apresentamos a resposta da onda P gerado a partir de uma fonte impulsiva. A modelagem foi feita usando a equação proposta (7). Com esta mesma equação, realizamos a modelagem do caso isotropico, VTI e TTI. Destaca-se, nesses resultados, a completa separação da onda P e da componente em forma de diamante da onda S que se obtém com as equações de quarta ordem no tempo. Consideramos a necessidade de estudar a estabilidade em relação às mudanças abruptas no ângulo de rotação do eixo de simetria em meios complexos, bem como a aproximação obtida com esta

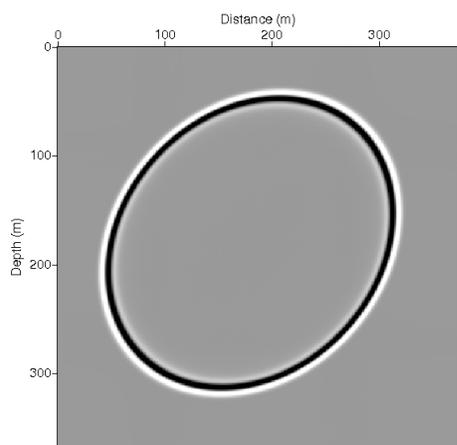
equação das velocidades de propagação quando são comparadas com a equação exata de Tsvankin (1996).



**Isotrópico**



**VTI**



**TTI**

Figure 3: Frente de onda P obtido pela modelagem através da equação (7) nos casos: (a) isotrópico; (b) VTI ( $\phi = 0$ ),  $\epsilon = 0.25$  e  $\delta = 0.25$ ; (c) TTI com  $\phi = 45$ .

### Conclusões

Apresentamos uma nova equação para a modelagem acústica da onda P para meios TTI, que é de segunda ordem no tempo, e permite apenas a modelagem da onda P, sem a presença da onda SV.

Esta equação é resolvida usando a metodologia REM para a expansão no tempo e o método pseudo-espectral para as derivadas espaciais, com resultados precisos e sem dispersão numérica.

Os resultados da modelagem mostram a separação completa da onda P e SV, porém uma melhor análise da aproximação das velocidades em relação à equação exata de Tsvankin (1996), da aproximação de anisotropia fraca e da aproximação proposta por Pestana et al., (2011), devem ser realizadas como trabalhos futuros. Esperamos também desenvolver uma análise da estabilidade com relação às mudanças abruptas do ângulo de rotação, bem como do eixo de simetria para meios complexos.

### Referências

Alkhalifah, T., 2000, An acoustic wave equation for anisotropic media: *Geophysics*, Vol. 65, p1239-1250.

Du, X., Fletcher, R. P. and Fowler, P. J., 2008, A new pseudo-acoustic wave equation for VTI media, EAGE 70 Conference & Exhibition, Roma-Italia, H033.

Li, X. Y., Liu, E. e Chapman, M., 2007, Practical aspects of seismic anisotropy.

Liu, F., Morton, S. A., Ni, L. and Leveille, J. P., 2009, Decoupled wave equations for P and SV waves in acoustic VTI media: 79th Annual Inter. Meeting, SEG, Expanded Abstracts, p2844-2848.

Pestana, R. C., Stoffa, P. L., 2010, Time evolution of the wave equation using rapid expansion method: *Geophysics*, Vol. 75, T121-T131.

Pestana, R. C., Ursin, B. and Stoffa, P. L., 2011, Separate P- and SV-wave equations for VTI media, Submitted to XXII CISBGf, Rio de Janeiro, Brazil.

Tal-Ezer, H., D. Kosloff and Koren, Z., 1987, An accurate scheme for forward seismic modeling: *Geophysical Prospecting*, Vol. 35, p479-490.

Thomsen, L., 1986, Weak elastic anisotropy: *Geophysics*, Vol. 51, p1954-1966.

Tsvankin, I., 1996, P-wave signatures and notation for transversely isotropic media: An overview: *Geophysics*, Vol. 61, p467-483.

Yilmaz, O., 1987, Seismic data processing: Society of Exploration Geophysicists, Tulsa-Oklahoma.

Zhan, G., Pestana, R. C. and Stoffa, P. L., 2011, An acoustic wave equation for Pure Pwave in 2D TTI media, Submitted to XII CISBGf, Rio de Janeiro, Brazil.

Zhang, L., Rector, J. W. and Hoversten, G. M., 2005, An acoustic wave equation for modeling in tilted TI media: 73rd Annual Inter. Meeting, SEG, Expanded Abstracts, p153-156.

Zhou, H., Zhang, G. and Bloor, R., 2006, An anisotropic acoustic wave equation for VTI media: EAGE 68

---

Conference & Exhibition, Viena-Austria, H033.

**Agradecimentos**

Diego F. Barrera P. agradece à bolsa de estudos da Agência Nacional do Petróleo (PRH-8/ANP). Os autores também agradecem ao apoio do CPGG para a realização deste trabalho. Reynam Pestana ao CNPq e Flor A. Vivas agradece à Universidad de Pamplona (Colômbia) pelo apoio para desenvolver pesquisa na área de migração sísmica.