



## Comparação da modelagem sísmica usando teoria do raio, aproximação de Kirchhoff e superposição de feixes gaussianos limitados à primeira zona Fresnel projetada

Glauco Lira Pereira, IFPA, Brazil

João Carlos Ribeiro Cruz, UFPA, Brazil

Carlos Augusto Sarmiento Ferreira, ANP, Brazil

Copyright 2011, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica.

This paper was prepared for presentation at the Twelfth International Congress of the Brazilian Geophysical Society, held in Rio de Janeiro, Brazil, August 15-18, 2011.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the Twelfth International Congress of The Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

### Abstract

**Seismic modeling is a major step for generation of synthetic seismograms as to assist in seismic inversion. In this paper, we discuss the seismic modeling using different approaches based on asymptotic ray theory. The first simulation of a seismogram uses the standard ray theory. Already, the second simulation uses the Kirchhoff scattering approach, that is the basis for a number of important techniques for computing synthetic seismograms. The last approach is based on the simulation of wave field by a system of reflected Gaussian beams, where each beam is continued independently through an arbitrary velocity medium, so the wave field in a receiver is then obtained by a superposition integral of all Gaussian beams arriving in the vicinity of the receiver, which in this paper is limited by the first projected Fresnel zone.**

### Introdução

A modelagem sísmica é uma das etapas mais importantes para geração de sismogramas sintéticos, bem como para auxiliar na inversão sísmica. Em particular, a modelagem sere de base para construção de técnicas de imageamento sísmico. Para construir um dado sintético é necessário definir o modelo de velocidade e a geometria de aquisição, para em seguida de decidir o método utilizado para calcular o campo de onda sísmica. Neste trabalho aplicaremos três tipos de procedimentos baseados na teoria assintótica do raio.

O método do raio (Červený, V., 2001) corresponde a uma solução aproximada da equação da onda, conhecida como solução assintótica válida para altas frequências. Fornece tanto os tempos de percurso das ondas refletidas, como os coeficientes de reflexão e se desejado, permite incorporar o efeito de espalhamento geométrico no cálculo das amplitudes. Esse método tem sido amplamente empregado para a modelagem das ondas sísmicas em diversas aplicações, entretanto possui uma limitação significativa para meios não homogêneos. Sua aplicação só é válida se as variações espaciais forem suaves, o que significa que qualquer variação espacial das propriedades

do meio devem ser maiores do que comprimento de onda dominante das ondas sísmicas. Uma das características de métodos de raios é que os cálculos não são realizados diretamente em termos das coordenadas espaciais do meio. Para que os cálculos sejam feito em qualquer outro sistema de coordenadas deve-se levar em conta as devidas transformações. Apesar das equações de raios sísmicos são derivadas da equação da onda elástica, porém as equações de raios não compartilham o mesmo domínio computacional. A equação da onda é uma equação diferencial parcial para o deslocamento em função das coordenadas espaciais. As equações cinemática do raio (Bleistein et al, 2000), por outro lado, são equações para a posição de raios como uma função de um único parâmetro como o tempo ou comprimento de arco, conhecido como o parâmetro de fluxo. O raio descritos por estas equações é uma linha de fluxo aproximado de energia das ondas em alta frequência.

O Princípio de Huygens, primeiramente descrito por Christiaan Huygens no final do século XVII, é mencionado com maior frequência no contexto das ondas luminosas e na teoria do raio óptico, mas é aplicável a qualquer problema de propagação da onda. Se considerarmos uma frente de onda plana que propaga em um meio homogêneo, podemos ver como a mesma pode se propagar através da interferência construtiva de ondas secundárias. Esta idéia simples, fornece, pelo menos no sentido qualitativo, uma explicação para o comportamento das ondas quando elas passam por uma abertura estreita. Uma tratamento mais rigoroso do princípio de Huygens foi dado por Kirchhoff e constitui a base para uma série de técnicas importantes para a computação de sismogramas sintéticos. A teoria de Kirchhoff foi desenvolvido em óptica, como mostrado em Goodman (2002), que a partir de uma equação de onda em função do espaço e independente do tempo, conhecida como equação de Helmholtz, e usando o teorema de Green pode-se chegar a integral de um campo de onda de difração.

Um outro procedimento utilizando a teoria assintótica do raio para a computação do campo de ondas em um determinado meio físico é proposto neste trabalho. Tal procedimento é baseado na simulação do campo de ondas por um sistema de feixes gaussianos (Hill, 1990; Červený, 2001; Nowack 2003; Bleistein, 2007; Popov et al, 2010). Cada feixe é continuado independentemente, através de uma determinada estrutura. O campo de ondas, em um receptor, é então obtido através de uma integral de superposição de todos os feixes gaussianos que chega a alguma vizinhança do receptor. Diferentemente de Popov et al (2010), introduzimos transformações

de coordenadas de modo a descrever o operador em termos de coordenadas na zona de Fresnel projetada sobre a superfície de aquisição dos dados sísmicos. A correspondente fórmula integral é válida em várias regiões singulares onde os métodos da teoria do raio de ordem zero encontram dificuldades em simular o campo de ondas sísmico, por exemplo, zonas onde predominam o aparecimento de cáusticas (cruzamento de raios) e em zonas de sombra, onde o raio não pode ser traçado numericamente, como próximo a flancos de domos ou até mesmo abaixo dessas estruturas.

Não existe uma única “melhor maneira” para computar sismogramas sintéticos. Cada método tem suas próprias vantagens e desvantagens. O método de escolha vai depender do problema particular a ser resolvido e o poder computacional disponível.

### Teoria do Raio

Considera-se que o campo de ondas sísmicas satisfaz a equação da onda para um meio acústico que em coordenadas cartesianas é expressa por:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

Sendo,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ ,  $v = v(\mathbf{x})$  é a velocidade de propagação da onda acústica e  $u = u(\mathbf{x}, t)$  é o campo de ondas, com  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  e  $t$  é o tempo.

Segundo a teoria assintótica do raio, a solução da equação da onda 1 pode ser expressa pela série polinomial em potências inversa de  $\omega$ :

$$u(\mathbf{x}, \omega) \sim \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(i\omega)^n} U^{(n)}(\mathbf{x}) \right) e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \quad (2)$$

Na maioria das situações práticas se considera apenas o termo de ordem zero da série, ou seja:

$$u(\mathbf{x}, \omega) \sim A e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \quad (3)$$

Onde,  $A \equiv U^0$  representa o termo da amplitude do campo de onda,  $\omega\tau(\mathbf{x})$  a função fase e  $\tau$  o tempo de trânsito.

Substituindo o termo de ordem zero na equação 1 e considerando a propagação de onda em um meio acústico, isotrópico e não-homogênea, encontramos a equação iconal e equação do transporte, dadas por:

$$\nabla\tau \cdot \nabla\tau = \frac{1}{v^2(\mathbf{x})} \quad (4)$$

$$2(\nabla\tau \cdot \nabla A)v + v^2 \nabla A^2 \tau + A(\nabla\tau \cdot \nabla v^2) = 0 \quad (5)$$

A etapa essencial da teoria assintótica do raio é a solução da equação iconal usando o método das características, que tem a vantagem de substituir a equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, geralmente mais fáceis de resolver, resultando nas chamadas equações cinemáticas do raio (Bleistein, 1984), expressas por:

$$\frac{dx_i}{d\sigma} = p_i \quad (6)$$

$$\frac{dp_i}{d\sigma} = -\frac{1}{v^3} \frac{\partial v}{\partial x_i} \quad (7)$$

Sendo,  $i = 1, 2, 3$  e  $\sigma$  é um parâmetro que representa uma função monótona ao longo de toda a trajetória do raio calculada por:

$$\sigma = \sigma_0 + \int_{s_0}^s v(s) ds = \sigma_0 + \int_{\tau_0}^{\tau} v^2(s) d\tau \quad (8)$$

Onde  $s$  representa a dimensão do comprimento de arco ao longo de um raio.

Desprezando o termo que inclui gradiente de velocidade, fazendo uso da igualdade  $\frac{dx}{d\sigma} = \mathbf{p}$  e do lema de Smirnov (Portugal, 2002), a equação de transporte 5 pode ser transformada na equação diferencial ordinária expressa por:

$$\frac{d}{d\sigma} \ln [A^2] = \frac{d}{d\sigma} \ln \left[ \frac{v}{J} \right] \quad (9)$$

Onde  $J$  é o chamado Jacobiano do raio. Integrando-se ambos os lados da equação 9 em relação a  $\sigma$ , tem-se a seguinte solução da equação de transporte:

$$A(\sigma) = A(\sigma_0) \sqrt{\frac{v(\sigma)J(\sigma_0)}{v(\sigma_0)J(\sigma)}} \quad (10)$$

O significado físico do Jacobiano está relacionado à densidade de raios, ou espalhamento geométrico, e pode ser representado por:

$$J = \frac{1}{v} \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\sigma, \gamma_1, \gamma_2)} \right| \quad (11)$$

Sendo,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  os parâmetros de partida que descrevem um raio especial e  $\sigma$  indica uma posição de um ponto neste raio (Figura 1).

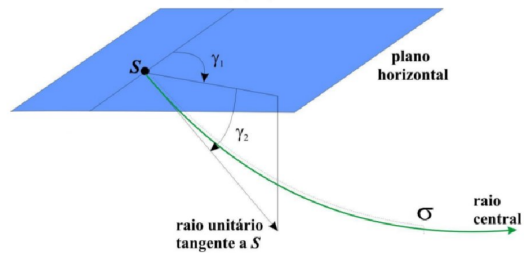


Figure 1: Sistema de coordenadas do raio para uma fonte pontual S em 3D. Os ângulos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  determinam as coordenadas do raio e o iconal  $\sigma$  especifica a posição de um ponto no mesmo.

**Aproximação de Kirchhoff**

O princípio de Huygens (Figura 2) pode ser aplicado na sismica de reflexão, imaginando que cada ponto em um refletor gera uma fonte secundária, em resposta ao campo de onda incidente, chamado de refletor explosivo.

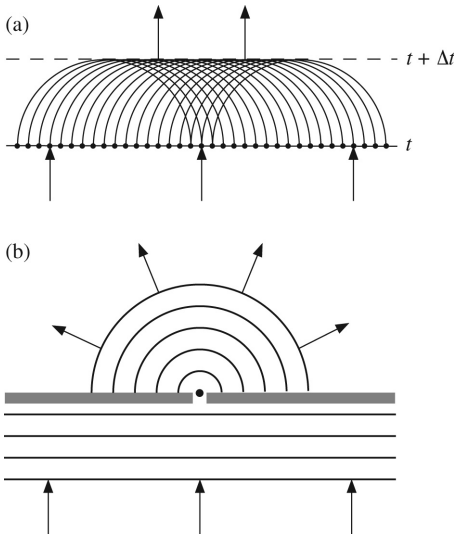


Figure 2: Ilustrações do princípio de Huygens. (a) Uma onda plana no instante  $t + \Delta t$  pode ser modelada como a soma coerente das frentes de onda esféricas emitidas por fontes pontuais na frente de onda no tempo  $t$  (b) Uma pequena abertura em uma barreira às ondas incidentes irão produzir uma frente de onda difratada se a abertura é pequena comparada ao comprimento de onda.

Considerando que o campo de ondas refletido pode ser calculado assintoticamente a partir da superposição de difrações em uma limitada região da interface refletora, a formulação integral do espalhamento proposta por Kirchhoff (Goodman, 2002) é utilizada como base para uma série de técnicas importantes para a computação de sismogramas sintéticos, que para um meio acústico e homogêneo é dado por:

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{t-r/v} - u \Big|_{t-r/v} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{rv} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t-r/v} \right] dS \quad (12)$$

Para uma aplicação sísmica a integral 12 é representada numa forma mais apropriada pela expressão dada por Shearer (2009).

$$u_P = \frac{1}{4\pi v} \int_S \delta \left( t - \frac{r+r_0}{v} \right) \frac{R(\theta_0)}{rr_0} (\cos\theta + \cos\theta_0) dS * f'(t) \quad (13)$$

Onde  $R(\theta_0)$  é o coeficiente de reflexão,  $\theta_0$  é o ângulo entre o raio incidente e o vetor normal a superfície, e  $\theta$  é o ângulo entre o raio espalhado e o vetor normal a superfície (ver Figura 3).

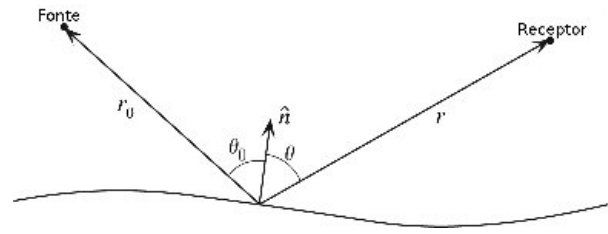


Figure 3: Ângulos dos raios em relação ao vetor normal a superfície para uma geometria de onda refletida.

**Integral de superposição da feixes gaussianos**

A equação da onda parabólica em coordenadas centradas no raio  $(s, q_1, q_2)$  tem uma solução harmônica paraxial local assintótica, localizada na vizinhança de um raio central, denominada aproximação de Feixe Gaussiano, matematicamente expressa por (Červený, 2001; Popov et al., 2010):

$$\hat{u}(s, q_1, q_2; \omega) = \frac{\exp \left[ i\omega \left( \tau_0(s) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 M_{jk} q_j q_k \right) \right]}{\sqrt{v_p \rho_0 \det(\mathbf{Q})}} \quad (14)$$

A equação 14 representa a aproximação paraxial de feixes gaussianos do campo de onda sísmica na vizinhança de um raio central de direção dada pelo vetor unitário  $\hat{\mathbf{i}}$ , a partir de uma fonte pontual tridimensional. Nesta solução, considera-se uma congruência de raios com parâmetros dados por coordenadas esféricas  $(\theta, \varphi)$ , onde um raio central é definido por  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s, \theta, \varphi)$ , sendo  $s$  o comprimento de arco ao longo do raio. As funções  $v_p = v_p(s)$ ,  $\rho_0 = \rho_0(s)$  e  $\tau_0(s)$  representam os valores de velocidade, densidade e tempo de trânsito ao longo do raio central, respectivamente. Os elementos  $M_{jk}$ , com  $j, k = 1, 2$ , são os elementos da matriz  $2 \times 2$  definida por:

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{-1} \quad (15)$$

Onde, as matrizes  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  são soluções do sistema de equações dinâmicas do raio com condições iniciais complexas:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{Q}}{ds} = \mathbf{v}\mathbf{P} \\ \frac{d\mathbf{P}}{ds} = -\frac{1}{v^2}\mathbf{v}\mathbf{Q} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Q_{1,1} &= \frac{\partial q_1}{\partial \gamma_1} \Big|_{q_1, q_2=0} & Q_{1,2} &= \frac{\partial q_1}{\partial \gamma_2} \Big|_{q_1, q_2=0} \\ Q_{2,1} &= \frac{\partial q_2}{\partial \gamma_1} \Big|_{q_1, q_2=0} & Q_{2,2} &= \frac{\partial q_2}{\partial \gamma_2} \Big|_{q_1, q_2=0} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 P_{1,1} &= \left. \frac{\partial p_1}{\partial \gamma_1} \right|_{q_1, q_2=0} & P_{1,2} &= \left. \frac{\partial p_1}{\partial \gamma_2} \right|_{q_1, q_2=0} \\
 P_{2,1} &= \left. \frac{\partial p_2}{\partial \gamma_1} \right|_{q_1, q_2=0} & P_{2,2} &= \left. \frac{\partial p_2}{\partial \gamma_2} \right|_{q_1, q_2=0}
 \end{aligned} \quad (18)$$

$$V_{ik} = \left. \frac{\partial^2 v}{\partial q_i \partial q_k} \right|_{q_1, q_2=0}$$

Que sob condições iniciais complexas apresentam as seguintes propriedades:

1.  $\det(\mathbf{Q}) \neq 0$ : Esta condição garante a regularidade do feixe gaussiano ao longo de todo o raio, por exemplo, amplitudes finitas em cáusticas;
2.  $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$ : A matriz complexa avaliada  $\mathbf{M}$  é simétrica
3. A parte imaginária de  $\mathbf{M}$  é positiva definida.

Para determinar o campo de ondas  $U(P_o, \omega)$  em um determinado ponto de referência  $P_o$ , onde o mesmo se encontra na vizinhança paraxial de um ponto  $P_r$  localizado ao longo de um raio, utiliza-se a integral de superposição de feixes gaussianos (Červený, 2001), expressa por:

$$U(P_o, \omega) = \int_D d\gamma_1 d\gamma_2 \Phi(\gamma_1, \gamma_2) u_o(\gamma_1, \gamma_2) e^{i\omega\tau(P_o, P_r)} \quad (19)$$

Onde  $U(P_o, \omega)$  representa o campo de onda acústico em  $P_o$ ,  $D$  denota a região de integração,  $\Phi(\gamma_1, \gamma_2)$  é uma função peso determinada de forma assintótica (Bleistein, 2000) ou pelo método da diagonalização simultânea (Červený, 2001),  $u_o(\gamma_1, \gamma_2)$  representa amplitude complexa do campo de onda no ponto  $P_r$  do raio central e  $\tau(P_o, P_r)$  é o tempo de trânsito paraxial complexo em  $P_o$  estimado a partir do tempo de trânsito ao longo do raio de referência  $P_r$ . A integral da equação 19 superpõe todas as contribuições de todos os raios centrais contento seus respectivos pontos de referência  $P_r$ , pertencente à vizinhança paraxial de  $P_o$  usando de tempo de trânsito paraxial quadrático complexo.

A região de integração da integral na equação 19 neste trabalho é limitada pela zona de Fresnel projetada (Schleicher et al., 2007), que serve para limitar o número de raios paraxiais na construção do sismograma sintético. Para tanto utiliza-se uma transformação de coordenadas de parâmetros do raio para coordenadas cartesianas locais na equação 19, que é modificada por Ferreira e Cruz (2009) e reescrita como:

$$\begin{aligned}
 U(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{i\omega}{2\pi} \int_{Z_f} \int dr_1^P dr_2^P \sqrt{\det \mathbf{H}_P(\mathbf{r}^P)} \\
 \Psi(\mathbf{r}^P, \omega) D(\mathbf{r}^P, \mathbf{L}) \exp \left[ i\omega \Re \left\{ \tau(\mathbf{r}^P, \mathbf{r}^o) \right\} \right] & \quad (20)
 \end{aligned}$$

Onde  $\tau(\mathbf{r}^P, \mathbf{r}^o) = \tau_{P_r}(\mathbf{r}) + \mathbf{p}(\mathbf{r}^P - \mathbf{r}) + \frac{1}{2}(\mathbf{r}^P - \mathbf{r})^T \mathbf{H}_P(\mathbf{r})(\mathbf{r}^P - \mathbf{r})$  representa o tempo de trânsito paraxial calculado com referência ao tempo de trânsito de reflexão  $\tau_{P_r}(\mathbf{r})$ ,  $P$  é coordenadas cartesianas locais dentro da zona de fresnel que serve para localiar os pontos de emergencia dos raios centrais,  $Z_f$  é a zona de Fresnel projetada na superfície,  $\mathbf{p}$  é o vetor vagarosidade do raio central após projeção no respectivo plano cartesiano,  $\mathbf{H}_P(\mathbf{r}^P)$  é a matriz da zona de Fresnel projetada,  $\Psi(\mathbf{r}^P, \omega)$  é a amplitude do campo de onda no raio central obtido dentro da zona de Fresnel projetada,  $D(\mathbf{r}^P, \mathbf{L})$  representa a parte imaginária do tempo de trânsito paraxial complexo, sendo  $\mathbf{L}$  a matriz da meia-largura efetiva do feixe, e  $\Re\{\tau(\mathbf{r}^P, \mathbf{r}^o)\}$  é parte real do tempo de trânsito parabólico.

### Exemplo

Para efeito de ilustração mostra-se na Figura 4 um exemplos simples da parte real de um feixe gaussiano propagando-se em um meio com velocidade da onda constante.

| $\tau_0$ | $s_0$ | $n_0$ | $v_0$  | $\omega$ | $f$   |
|----------|-------|-------|--------|----------|-------|
| 0        | 0     | 0     | 2 km/s | $2\pi f$ | 30 Hz |

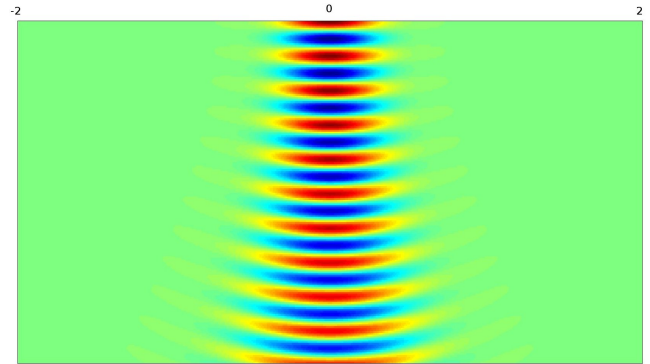


Figure 4: Representação esquemática da propagação de um feixe gaussiano em um meio Homogêneo.

Considerando um modelo hipotético com uma camada de 3000 m/s e outra de 4000 m/s dividida por uma interface curva, como mostra a Figura 5. O dado foi obtido com um par de fonte e geofone deslocando-se 50 m em uma região de 1550 m na superfície do modelo. Cada traço possui 512 amostras de tempo, com 2 ms de intervalo de amostragem. Os resultados para diferentes tipos de abordagens podem ser vistos nas Figuras 6-8.

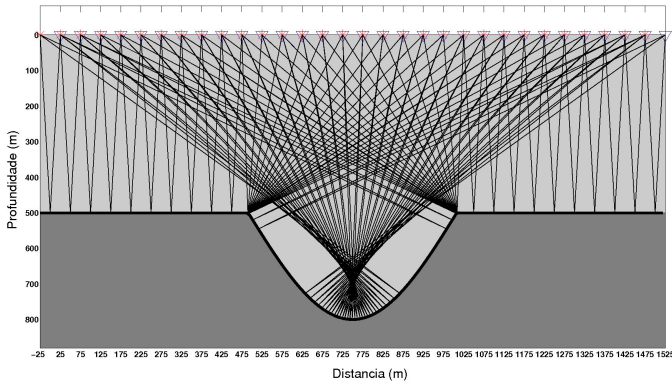


Figure 5: Modelo sinclinal de velocidades utilizado para modelagem sísmica. A primeira fonte está em  $-25m$  e o primeiro geofone em  $25m$ .

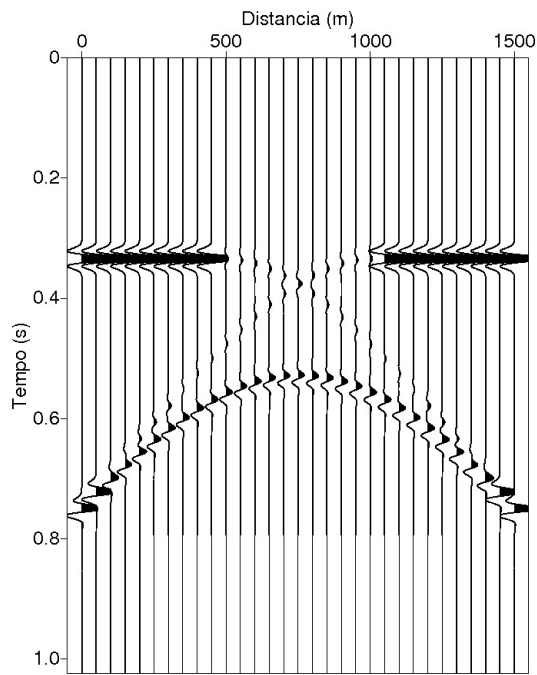


Figure 6: Resultados das modelagens sísmica usando o método do raio para o modelo e geometria de aquisição ilustrado na Figura 5.

**Conclusão**

Fazendo uma observação na Figura 6, vê-se que as amplitudes calculadas entre  $0,4s$  e  $0,5s$  são pequenas comparadas àquelas obtidas nos tempos fora do intervalo descrito, isso se deve ao fato de que a teoria do raio de ordem zero não é capaz de calcular as amplitudes na vizinhança de cústicas. Na geração dos dados utilizando a aproximação de Kirchhoff ( Figura 7), surge pontos de difração gerado pelo canto da interface do modelo 5. Por fim, comparando a Figura 8 com as Figuras 6 e 7 é fácil observar que as amplitudes foram assentuadas na região de singularidade. A regularidade da descrição

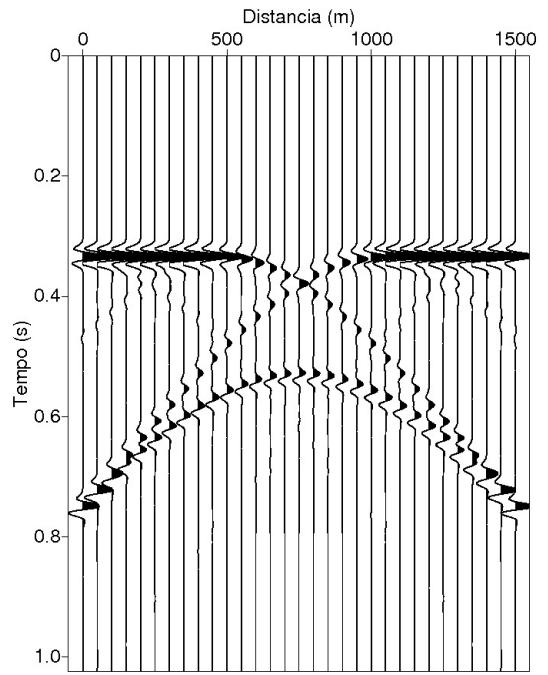


Figure 7: Resultados das modelagens sísmica Kirchhoff para o modelo e geometria de aquisição ilustrado na Figura 5.

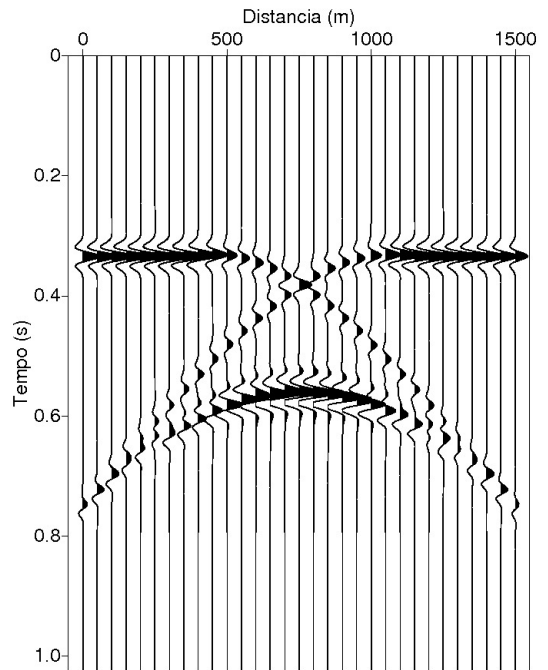


Figure 8: Resultados das modelagens sísmica feixes gaussianos para o modelo e geometria de aquisição ilustrado na Figura 5.

do campo de ondas é uma das grandes vantagens da extensão analítica da teoria do raio, permitindo que a sobreposição de feixes seja também uma alternativa para representar o campo de ondas em regiões do modelo de velocidade onde geralmente a teoria do raio costuma falhar na simulação do campo de ondas.

### Referências

Bleistein, N., 1984. *Mathematical methods for wave phenomena*. Academic Press, Inc.

Bleistein, N., 2007. *Mathematics of modeling, migration and inversion with Gaussian beams*, Lecture Notes (online at <http://www.cwp.mines.edu/norm/>).

Bleistein, N.; Cohen, J. K.; Stockwell, J. W. Jr. 2000. *Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration and inversion*. Interdisciplinary Applied Mathematics, Springer.

Červený, V., 2001. *Seismic ray theory*. Cambridge University Press.

Ferreira, C. A. S.; Cruz, J. C. R., 2009. A comparison of two true-amplitude Gaussian beam migration/inversion operators. IN: INTERNATIONAL CONGRESS OF THE BRAZILIAN GEOPHYSICAL SOCIETY, 11., Salvador. CD-ROM.

Goodman, Joseph W., 2002. *Introduction to Fourier Optics*. 3rd ed. Roberts & Company Publishers.

Hill, N. R., 1990, Gaussian beam migration. *Geophysics*, 55, 1416-1428.

Nowack, Robert L., 2003. Calculation of synthetic seismograms with gaussian beams. *Pure and Applied Geophysics*, 160, 487-507.

Popov, Mikhail M.; Semtchenok, Nikolay M.; Popov, Peter M.; Verdel, Arie R., 2010. *Geophysics*, 75, No. 2, S81-S93.

Portugal, R. S., 2002. *Construção de imagens em verdadeira amplitude por dados de reflexão: formulação matemática e construção de algoritmos*. Unicamp/IMECC. (PhD thesis).

Schleicher, J.; Tygel, M.; Hubral, P., 2007. *Seismic True-Amplitude Imaging*. SEG (GEOPHYSICAL DEVELOPMENTS).

Shearer, Peter M., 2009. *Introduction to Seismology*. Cambridge University Press.