



## Modelagem de eletrorresistividade 2-D a partir do potencial elétrico secundário

Wagner Ormanes Palheta Castro, CPGf/UFGA; Marcos Welby Correa Silva\*, CPGf/UFGA

Copyright 2013, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 13<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, August 26-29, 2013.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 13<sup>th</sup> International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

### Abstract

One of the traditional methods of exploration geophysics is the Electrical Resistivity, established about a century ago by the Schlumberger Brothers and since then widely used in mineral exploration, hydrogeology and environmental studies. The method involves injection of electrical current in the subsurface and measurement of the resultant potential. After processing, we can obtain pseudo-sections of apparent resistivity that indicates the distribution of the conductivity in subsurface. Due to the simplicity of the physical basis of its formulation, the method presents easy computational implementation when compared to the other controlled source electromagnetic methods. In literature there are numerous computational modeling references, which computes the answer to problems 2D and 3D. In these previous works, the results are obtained from the total electric potential. In this work, we present the modeling of electrical response of 2D media with the dipole-dipole array, obtained from the secondary electric potential. The solution is calculated using the finite element method with unstructured mesh. To validate our results, we compare them with 2D response obtained from the total potential.

### Introdução

A geofísica de prospecção data do início do século XX, teve o seu desenvolvimento devido à escassez de depósitos de minérios, ocasionando disputas por mercado e manutenção de insumos básicos para a indústria. Dentre as principais aplicações da geofísica de prospecção estão à procura por novas fontes de combustíveis fósseis, minérios, água subterrânea e também há aplicação em prospecção geotérmica, mapeamento geológico, construção civil, procura de materiais produzidos pelo homem, como materiais arqueológicos (objetos metálicos e fornos de argilas), materiais de obras subterrâneas (oleodutos e aquedutos) e na proteção ambiental, mapeando o fluxo subsuperficial de água poluída devido à presença de produtos químicos (SILVA; LUIZ, 1995).

Um dos métodos tradicionais da geofísica e que também foi um dos primeiros a ser largamente utilizado, foi o Método da Eletrorresistividade, que data desde os anos 1930, com os irmãos Schlumberger. Neste método os eletrodos são posicionados na superfície terrestre, o qual é injetada corrente elétrica na subsuperfície e mede-se

diferença de potencial elétrico em pontos previamente determinados, podendo-se desta maneira estimar a resistividade aparente das camadas. O amplo uso da eletrorresistividade na geofísica de prospecção e o desenvolvimento de equipamentos cada vez mais sofisticados incentivou a pesquisa em modelagem numérica do método e possibilitou a inversão geofísica dos dados obtidos em campo. Inúmeros autores têm abordado a simulação e inversão dos dados de eletrorresistividade tanto em modelagens 1-D e 2-D quanto em 3-D, incluindo meios anisotrópicos (Inman, 1975; Jackson et. al, 2001; Jingtian et. al, 2011; Koefoed et. al, 1972; Loke e Barker, 1996a, b; Sasaki, 1994; Wu et. al, 2003;).

Em todos estes trabalhos a simulação do método é feita ou por elementos finitos ou por diferenças finitas, em que os eletrodos são caracterizados por pontos de corrente através de funções Delta de Dirac.

Neste trabalho propomos a simulação do método de eletrorresistividade usando a técnica de elementos finitos calculando o potencial elétrico secundário conforme descrito por Rijo (2004) para fontes eletromagnéticas. Esta nova abordagem permite a otimização da malha de elementos finitos pela eliminação dos nós necessários para simular os eletrodos de corrente. Como resultado, obtemos pseudo-seções com menor custo computacional, pelo fato de obtermos malhas com menor número de nós e também de elementos, ocupando menos memória no computador e menor gasto de tempo comparado as pseudo-seção obtidas através do potencial total.

### Eletrorresistividade DC – Arranjo Dipolo-dipolo

A eletrorresistividade consiste na injeção de corrente elétrica contínua ou de baixa frequência (inferior a 10 Hz), sendo possível a relação de proporcionalidade direta entre a corrente elétrica ( $I$ ) num condutor e a diferença de potencial elétrico ( $\Delta V$ ) entre seus terminais. Essa injeção de corrente no solo é feita através de contatos galvânicos utilizando dois eletrodos (A e B), sendo possível medir a diferença de potencial elétrico em outros dois eletrodos (M e N), também através de contatos galvânicos. Na Figura 1 temos o arranjo dipolo-dipolo para estes eletrodos, em que  $n$  é um múltiplo da distância  $a$  entre eletrodos.

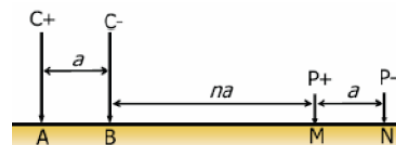


Figura 1: Arranjo dipolo-dipolo com eletrodos de corrente (A e B) e eletrodos de potencial elétrico (M e N).

Após esses valores serem registrados podemos estimar o valor da resistividade de alguns materiais da superfície. Considerando que o meio geológico é em geral heterogêneo, não teremos um valor real para a resistividade das camadas e sim uma resistividade aparente, dada pela equação (1) abaixo:

$$\rho_a = \frac{\Delta V}{I} \left( \frac{2\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} + \frac{1}{BN}} \right)$$

em que  $\Delta V$  é a variação de potencial, AM, AN, BM e BN são as distâncias entre os eletrodos e  $I$  é o valor de corrente elétrica injetada

Neste trabalho nos concentraremos no arranjo dipolo-dipolo, com o objetivo de calcular a resposta 2D de resistividade elétrica, a partir do potencial elétrico secundário, utilizando o método de Elementos Finitos com malhas não estruturadas.

### Eletrorresistividade DC – Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos (MEF) é um dos métodos numéricos mais eficientes na resolução de equações diferenciais, sendo possível analisar o comportamento de sistemas físicos regidos por equações diferenciais tanto no domínio da frequência, quanto no domínio do tempo.

Para o caso DC, a aplicação do MEF é ainda mais simples pois partimos da equação de Poisson (Orellana, 1972)

$$\nabla \cdot [\sigma(x, y, z) \nabla V(x, y, z)] = I \delta(x) \delta(y) \delta(z)$$

em que  $V(x, y, z)$  é o potencial elétrico,  $\sigma(x, y, z)$  é a condutividade do meio,  $I$  é a intensidade de corrente e  $\delta$  é a função delta de Dirac que localiza a fonte pontual. Em seguida, fazemos a separação do potencial e da condutividade em suas componentes primárias e secundárias,

$$V = V^s + V^p \text{ e } \sigma = \sigma^p + \Delta\sigma,$$

segundo formulação que Rijo(2002) descreve para fontes eletromagnéticas, resultando na seguinte equação de Poisson para o potencial secundário:

$$\nabla \cdot [\sigma \nabla V^s] = -\nabla \cdot [\Delta\sigma \nabla V^p]$$

Nesta equação calculamos o potencial secundário criado pela presença de heterogeneidades em subsuperfície, representada por  $\Delta\sigma$ . Temos agora uma equação que pode ser aplicada a um caso bidimensional, mas que possui uma fonte 3-D. Para contornarmos esse problema, aplicamos uma transformada de Fourier na direção  $y$

$$\bar{V}(x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, y, z) e^{-ik_y y} dy$$

a fim de reduzirmos o problema ao caso puramente 2-D. Em seguida, aplicamos o MEF resultado na equação:

$$\int_{\Omega} \left[ \sigma \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \bar{V}^s}{\partial x} + \sigma \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \frac{\partial \bar{V}^s}{\partial z} \right] dx dz + \int_{\Omega} \phi_1 k_y^2 \sigma \bar{V}^s - \int_{\partial\Omega} \sigma \phi_1 \frac{\partial \bar{V}^s}{\partial n} \hat{n} dl = \int_{\Omega} \phi_1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta\sigma \frac{\partial \bar{V}^p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Delta\sigma \frac{\partial \bar{V}^p}{\partial z} \right) \right] dx dz - \int_{\Omega} \phi_1 k_y^2 \Delta\sigma \bar{V}^p dx dz$$

Neste ponto cabe observar que a integral de linha acima desaparecerá ao aplicarmos condições de contorno homogêneas de Dirichlet e o potencial no domínio da transformada de Fourier  $\bar{V}^p$  é o termo fonte da equação, juntamente com suas derivadas e a variação de condutividade elétrica.

No domínio de Fourier os potenciais primários são dados pelas funções:

$$\bar{V}^p = 2K_0(ak_y); a = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$\bar{V}_x^p = \frac{\partial \bar{V}^p}{\partial x} = -\frac{xk_y K_1(ak_y)}{a}$$

$$\bar{V}_z^p = \frac{\partial \bar{V}^p}{\partial z} = -\frac{zk_y K_1(ak_y)}{a}$$

em que  $K_0$  e  $K_1$  são as funções de Bessel modificadas de segunda espécie, de ordem 0 e 1, respectivamente.

Seguindo o MEF e utilizando o software Triangle (Shewchuk, 1996) para a construção da malha de elementos finitos, obtemos um sistema linear cuja solução é obtida usando o método do gradiente conjugado (Golub e Loan, 1983). Esta solução é o potencial secundário no domínio  $k_y$ , cuja transformada inversa de Fourier precisa ser aplicada

$$V^s(x, 0, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{V}^s(x, k_y, z) dk_y$$

Contudo, a integral acima só pode ser calculada numericamente e para o caso de  $y = 0$  (problema 2-D), utilizamos a quadratura de Gauss-Laguerre de 32 pontos (Abramovitz e Stegun, 1965).

Assim, para cada par de eletrodos fonte AB, devemos calcular 32 vezes o MEF, uma para cada abscissa  $k_y$ .

Ao final, afim de simular um caminhamento dipolo-dipolo, precisamos calcular a resistividade aparente a partir do potencial, e será dada por

$$\rho_a = K \cdot \frac{\Delta V}{I} = \frac{K}{I} (\Delta V^p + \Delta V^s) = \rho_a^p + \rho_a^s$$

## Resultados

### 1 - Semi-espaço homogêneo com camada resistiva

Para testarmos o nosso programa, fizemos uma comparação entre os modelos obtidos através do potencial elétrico total e potencial elétrico secundário para um modelo de semi-espaço estratificado com três camadas de resistividade e espessuras de 10  $\Omega$ m e 20 m, 500  $\Omega$ m e 20 m, 10  $\Omega$ m respectivamente, como podemos visualizar na figura abaixo. Para este modelo utilizamos um espaçamento de 5m entre os eletrodos de corrente e de potencial, sendo feitas 50 medidas.

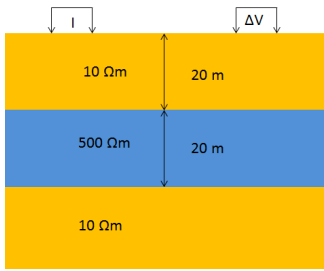


Figura 2: Modelo unidimensional de semi-espaco homogêneo com uma camada resistiva.

A Figura 3 mostra as pseudo-seções para o semi-espaco estratificado obtidos através do potencial elétrico total e potencial elétrico secundário. Podemos perceber que para a primeira camada que está localizada nos primeiros 20 m a resistividade aparente tende para 10 Ωm, aumentando o valor da resistividade gradativamente, estando em pleno acordo com os dados fornecidos ao programa.

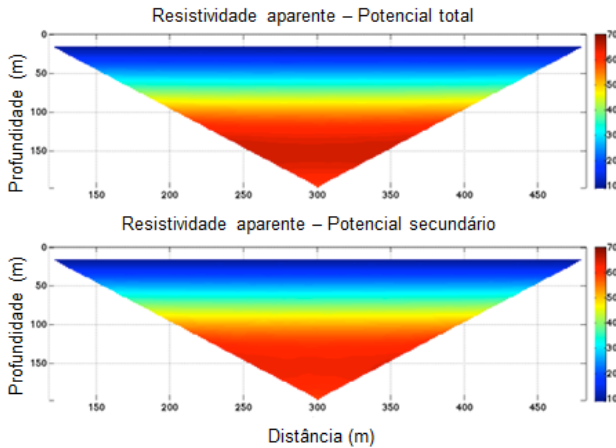


Figura 3: Pseudo-seções de resistividade aparente para potencial total e secundário. Arranjo dipolo-dipolo para semi-espaco de 10 Ωm e camada de 500 Ωm.

Na Figura 4 apresentamos o erro relativo, dado em porcentagem, entre as pseudo-seções obtidas entre o potencial elétrico total e o secundário. Este erro apresentou valor máximo em torno de 0,65%, explicado pela diferença na formulação numérica das duas soluções.

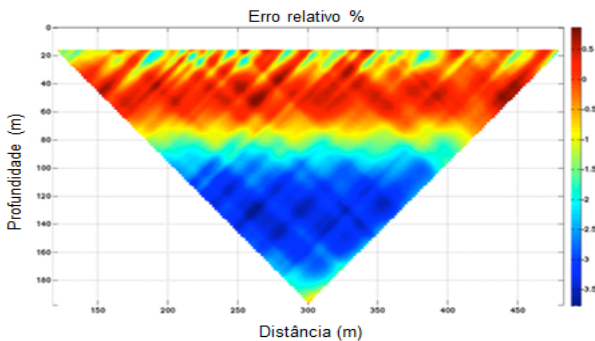


Figura 4: Erro relativo entre resistividade aparente para potencial total e secundário para o modelo de semi-espaco homogêneo com camada resistiva.

**2 - Semi-espaco homogêneo com corpo 2-D**

Este modelo, proposto e calculado pelo Prof. Welitom Borges (comunicação pessoal) é composto por um semi-espaco homogêneo com uma heterogeneidade de 4 m de comprimento por 2,8 m de espessura, topo situado a 5,2 m abaixo da superfície. A resistividade da encaixante é de 10 Ωm e o corpo é mais resistivo, possuindo 500 Ωm. A resposta foi calculada pelo software RES2DMOD (<http://www.geoelectrical.com>), que é um programa de modelagem 2D que calcula pseudo-seções de resistividade a partir de um modelo de subsuperfície 2D, usando elementos finitos e potencial total.

Reproduzimos o modelo fornecido pelo Prof. Borges, iniciando com a construção da malha de elementos finitos pelo *Triangle*. Na malha do potencial total é necessária que haja uma maior discretização próximo à fonte (eletrodos A e B), enquanto que na malha do potencial secundário, essa discretização se faz necessário próximo ao corpo, pois o mesmo fará o papel da fonte. Neste modelo utilizamos o espaçamento de 1 m entre os eletrodos, sendo realizadas 36 posições de transmissores. A malha de elementos finitos obtida para o potencial secundário é composta de 940 nós e 1772 elementos, enquanto que a malha obtida para o potencial total possui 4263 nós e 7917 elementos. Esta enorme diferença no números de nós da malha acarreta em um aumento de tempo de computação considerável. Esta é uma das vantagens de se usar o potencial secundário na formulação do MEF, qual seja, a diminuição drástica no tempo de processamento

Nas Figuras 5 e 6 estão representadas as pseudo-seções tanto para o potencial total como para o potencial secundário.

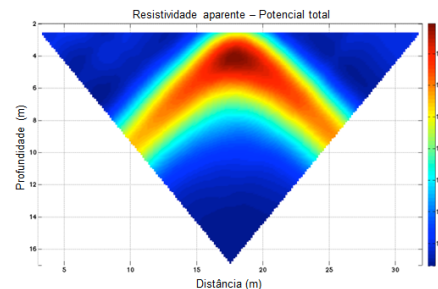


Figura 5 - Pseudo-seção de resistividade aparente para o potencial total. Arranjo dipolo-dipolo para modelo de semi-espaco de 10 Ωm e corpo 2-D de 500 Ωm.

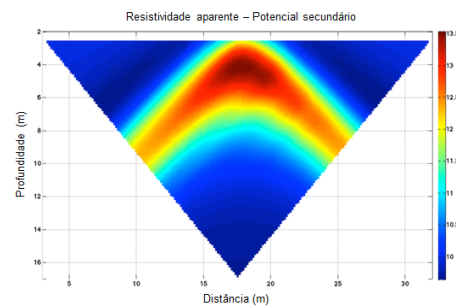


Figura 6 - Pseudo-seção de resistividade aparente para o potencial total. Arranjo dipolo-dipolo para modelo de semi-espaco de 10 Ωm e corpo 2-D de 500 Ωm.

### 3- Semi-espço homogêneo com corpo 2-D resistivo

Na Figura 7 temos um modelo de estrutura bidimensional, constituída por um corpo resistivo de 500  $\Omega\text{m}$ , envolto por um meio de resistividade 100  $\Omega\text{m}$ . Esse corpo possui 20 m de espessura por 100 m de comprimento e seu topo está 25 m abaixo da superfície.

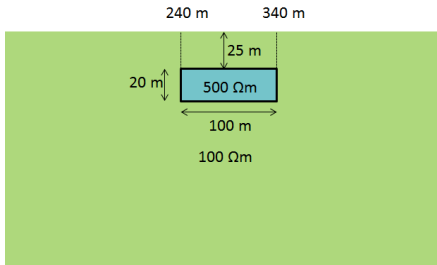


Figura 7- Pseudo-seção de resistividade aparente obtida através do potencial total, utilizando o software RES2DMOD, para o arranjo dipolo-dipolo.

Apresentamos na Figura 8 o resultado obtido para o modelo não estratificado de estrutura bidimensional utilizando o potencial secundário e comparamos com o resultado de Loke (1999), obtido pelo potencial total, Figura 9, através do software RES2DMOD.

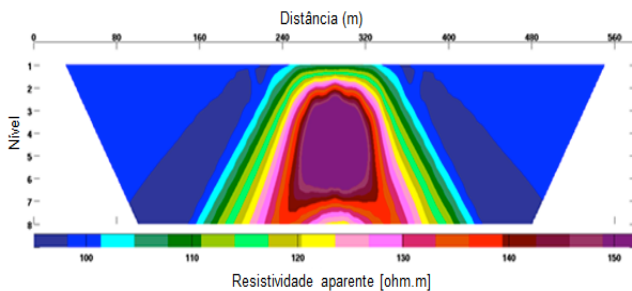


Figura 8 - Pseudo-seção de resistividade aparente obtida do potencial secundário, para um modelo de semi-espço de 100  $\Omega\text{m}$  com heterogeneidade de 100  $\Omega\text{m}$ , utilizando o arranjo dipolo-dipolo.

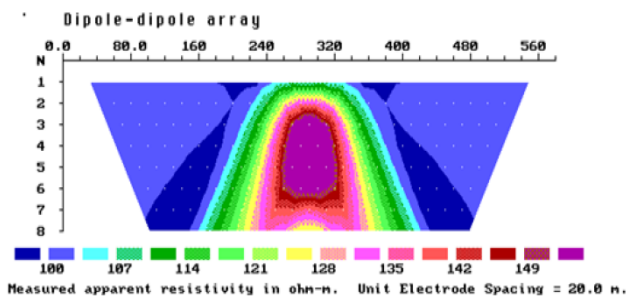


Figura 9 - Pseudo-seção de resistividade aparente obtida através do potencial total, utilizando o software RES2DMOD, para o arranjo dipolo-dipolo.

### 4- Semi-espço homogêneo com corpo 2-D resistivo

No modelo da Figura 10 reproduzimos o modelo obtido por Gallardo e Meju (2004). Neste caso, temos uma estrutura bidimensional, formada por dois corpos, um de menor resistividade relativamente à encaixante e outro mais resistivo, de extensão 20 m x 20 m, com

resistividades de 10  $\Omega\text{m}$  e 1000  $\Omega\text{m}$ , respectivamente, envolvidos em um meio de resistividade 100  $\Omega\text{m}$ . Utilizamos o arranjo dipolo-dipolo com espaçamento de 10 m entre os eletrodos e 21 medidas.

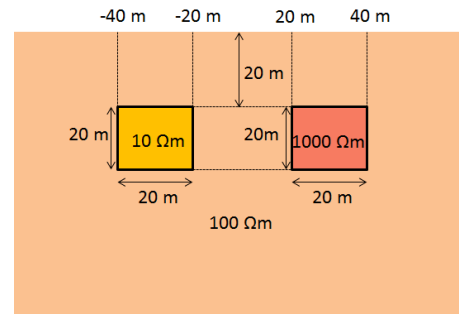


Figura 10 - Modelo de semi-espço homogêneo com duas heterogeneidades de 10  $\Omega\text{m}$  e 1000  $\Omega\text{m}$  em um meio encaixante de 100  $\Omega\text{m}$ .

Calculando a resposta pelo potencial secundário, apresentada na Figura 11, e comparando aquela apresentada por Gallardo e Meju (2004) na Figura 12, que utiliza a formulação de potencial total, podemos perceber a igualdade nas soluções. Nas figuras, as linhas de contornos indicando os valores de resistividade aparente estão em escala logarítmica. Podemos verificar que nas porções mais superficiais da pseudo-seção o valor de resistividade é igual à da encaixante, enquanto que ao observarmos em maior profundidade, percebemos as variações laterais na resistividade aparente, resultado da presença dos dois corpos.

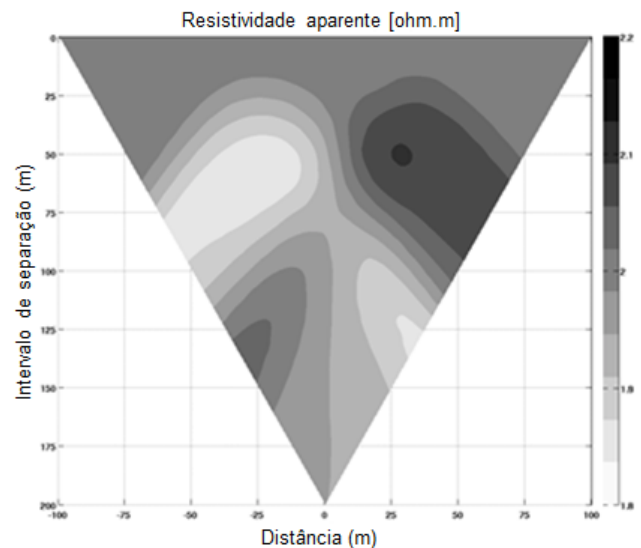


Figura 11 - Pseudo-seções de resistividade aparente obtida através do potencial secundário, utilizando o arranjo dipolo-dipolo, para um modelo de dois corpos de resistividade 10  $\Omega\text{m}$  e 1000  $\Omega\text{m}$  envolvidos em um meio de resistividade 100  $\Omega\text{m}$ .



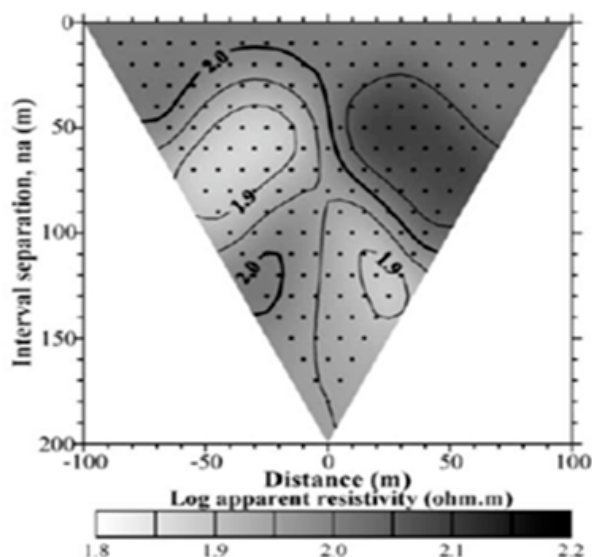


Figura 12 - Pseudo-seção obtida pelo potencial total apresentada em Gallardo e Meju (2004), utilizando a técnica de elementos finitos para o arranjo dipolo-dipolo, para um modelo de dois copos de resistividade 10  $\Omega\text{m}$  e 1000  $\Omega\text{m}$ , respectivamente, envolvidos em um meio de resistividade 100  $\Omega\text{m}$ .

### Conclusões

Neste trabalho propomos a simulação do método de eletroresistividade usando a técnica de elementos finitos calculando o potencial elétrico secundário e comparando com os resultados advindos da abordagem tradicional da literatura geofísica para fontes eletromagnéticas.

Esta nova abordagem permitiu a otimização da malha de elementos finitos pela eliminação dos nós necessários para simular os eletrodos de corrente. Como principal consequência, obtemos pseudo-seções com menor custo computacional, possibilitando o uso desta abordagem em simulações mais complexas.

Para validar nossos resultados, comparamos as pseudo-seções obtidas com os resultados disponíveis na literatura, obtendo boa concordância.

Como sugestão de futuros trabalhos, consideramos importante testar o uso de algoritmos de solução de sistema linear de grande porte que faça uso de matrizes esparsas e simétricas.

### Agradecimentos

Os autores são gratos ao Programa de Pós-graduação em Geofísica (CPGf) da UFPA pela disponibilidade dos recursos computacionais necessários à preparação deste trabalho.

### Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. Handbook of mathematical functions. N. York: Dover, 1965. 1046 p.
- BORGES, W.R. Investigações geofísicas na borda da bacia sedimentar de São Paulo, utilizando-se GPR e eletroresistividade. 2002. 60 f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.
- DAMASCENO, F. F. Levantamento geofísico do cemitério do Tapanã. 2001. 67 f. Trabalho de Conclusão de Curso. (graduação) – UFPA, CG, DGF, Belém, 2001.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. Matrix computations. Baltimore, Maryland: Johns Hopkins. 1983. 520 p.
- GALLARDO, L.A.; MEJU, M. A. Joint two-dimensional DC resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints. *Journal of Geophysical Research*, v. 109, b03311, doi:10.1029/2003jb002716. 2004.
- INMAN, J. R. Resistivity inversion with ridge regression. *Geophysics*, v. 40, p. 789-817. 1975.
- JACKSON, et al. 3D resistivity inversion using 2D measurements of the electric field. *Geophysical Prospecting*, v. 49, p. 26-39. 2001.
- JINGTIAN, et al. 2.5-D DC Resistivity Modeling Considering Flexibility and Accuracy. *Journal of Earth Science*, v. 22, n. 1, p. 124–130, Feb. 2011.
- KOEFOD, O., GHOSH, D. P.; POLMAN, G. J. Computation of type curves for electromagnetic depth sounding with a horizontal transmitting coil by means of a digital linear filter. *Geophysical Prospecting*. v. 20, n. 25, p. 206-420, 1972.
- LOKE M.H.; BARKER R.D. Practical techniques for 3D resistivity surveys and data inversion. *Geophysical Prospecting*, v. 44, n. 9, p. 499-523, 1996a.
- ORELLANA, E. Prospección geoeletrica en corriente continua. Madrid: Paraninfo, 1972, 560p.
- RIJO, L. Electrical Geophysics 1-D earth direct modeling. [S.l.:s.n.], 2004.
- SASAKI, Y. 3D resistivity inversion using the finite element method. *Geophysics*, v. 59, n. 30, p. 1839-1848, 1994.
- SILVA, L.M.C.; LUIZ, J.G. Geofísica de Prospecção. Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, 1995, 311p.
- WU, et al. Computations of secondary potential for 3D DC resistivity modelling using an incomplete choleski conjugate-gradient method. *Geophysical Prospecting*, v. 51, n. 5, p. 567–577, 2003.