



Estimação da geometria de corpos 3D via inversão de dados de gradiometria gravimétrica

Vanderlei C. Oliveira Jr. e Valéria C. F. Barbosa (ON/MCTI)

Copyright 2013, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 13th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, August 26-29, 2013.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 13th International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

We present a new 3D gravity-gradient inversion approach that retrieves the geometry of an isolated geologic source with known density contrast and depth of the top. We approximate the source by an ensemble of vertically juxtaposed right prisms whose horizontal cross-sections are described by polygons. The horizontal coordinates defining the vertices of the polygon of each prism are the parameters to be estimated by inversion. Among a set of estimated sources having different bottom depths, the best one is chosen by a new criterion based on the curve of the L1-norm of the data-misfits and the estimated volumes. Applications to both synthetic and field data sets show that our method obtains stable solutions that recover the geometry of the 3D source and fit the data, even in the presence of systematic errors. Our method requires neither the use of depth-weighting functions adopted as a strategy to estimate sources at their correct depths nor the introduction of compactness and homogeneity constraints on the actual sources.

Introdução

Poucos autores propuseram métodos de inversão de dados de gradiometria gravimétrica para recuperar a geometria de corpos geológicos 3D (ou 2D) sem estimar uma distribuição 3D (ou 2D) de densidade. Dentre estes poucos métodos, há aqueles que estimam o contorno da seção vertical de um corpo homogêneo 2D (Ditmar, 2002) e aqueles que estimam o relevo da superfície 3D que separa dois corpos homogêneos e verticalmente adjacentes (Barnes e Barraud, 2012). Nestes métodos, a propriedade física da fonte é considerada constante e conhecida.

Neste trabalho, apresentamos um novo método de inversão de dados de gradiometria gravimétrica para a reconstrução da geometria de um corpo 3D isolado, com densidade constante e profundidade do topo conhecidas. Assim como Oliveira Jr *et al.* (2011), o corpo é aproximado por um conjunto de prismas retos, verticalmente justapostos e com seção horizontal poligonal. A forma da seção horizontal e a posição horizontal de cada prisma são os parâmetros a serem estimados via inversão não-linear regularizada.

Nosso método é capaz de identificar se os dados têm resolução suficiente e, neste caso, recuperar completamente a geometria da fonte. Caso contrário, é possível produzir um conjunto de estimativas estáveis com diferentes profundidades máximas e que ajustam os dados dentro da precisão experimental. Dentre este conjunto de estimativas, nosso método determina a melhor delas como sendo aquela com a menor profundidade máxima necessária para ajustar os dados. Essa análise da resolução dos dados e posterior escolha da melhor estimativa da geometria da fonte são feitas por meio de um novo critério. Este critério se baseia na curva do volume pela norma L1 dos resíduos produzidos por um conjunto de estimativas com diferentes profundidades máximas. Testes com dados sintéticos mostram a eficácia do nosso método em analisar a resolução dos dados e recuperar a geometria da fonte, mesmo na presença de erros sistemáticos. O método também foi aplicado aos dados reais sobre o domo de sal Vinton, EUA. Os resultados sugerem que a fonte é um *caprock* massivo, cuja parte superior é alongada na direção nordeste-sudoeste, consistente com a principal falha geológica da região.

Metodologia

Problema direto

Seja $g_i^{\alpha\beta}$ a observação no ponto (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, \dots, N^{\alpha\beta}$, da componente $\alpha\beta$ ($\alpha\beta = xx, xy, xz, yy, yz, zz$) do tensor gradiente da gravidade (Figura 1a) produzida por uma fonte localizada em subsuperfície, com profundidade do topo z_0 e contraste de densidade conhecidos (corpo cinza escuro na Figura 1b). Consideramos que o contraste de densidade entre a fonte geológica e as rochas encaixantes seja constante ou variável com a profundidade. Para delinear o contorno 3D da fonte, aproximamos o seu volume por um modelo interpretativo formado por um conjunto de L prismas retos e justapostos verticalmente (prismas transparentes indicados por $P^k, k = 1, \dots, L$, na Figura 1b). O contraste de densidade de cada prisma, $\rho^k, k = 1, \dots, L$, é considerado constante e conhecido. Cada prisma tem a espessura dz constante e conhecida e a seção horizontal descrita por um polígono com um número M fixo de vértices igualmente espaçados entre 0° e 360° . Os vértices do polígono são descritos em coordenadas polares referidas a uma origem arbitrária O^k (Figura 1c).

As distancias radiais dos vértices $r_j^k, j = 1, \dots, M, k = 1, \dots, L$, e as coordenadas Cartesianas horizontais x_0^k e y_0^k da origem $O^k, k = 1, \dots, L$, de cada um dos L prismas verticalmente justapostos (Figura 1c) são os elementos

do vetor P -dimensional de parâmetros \mathbf{m} , em que $P = L(M + 2)$.

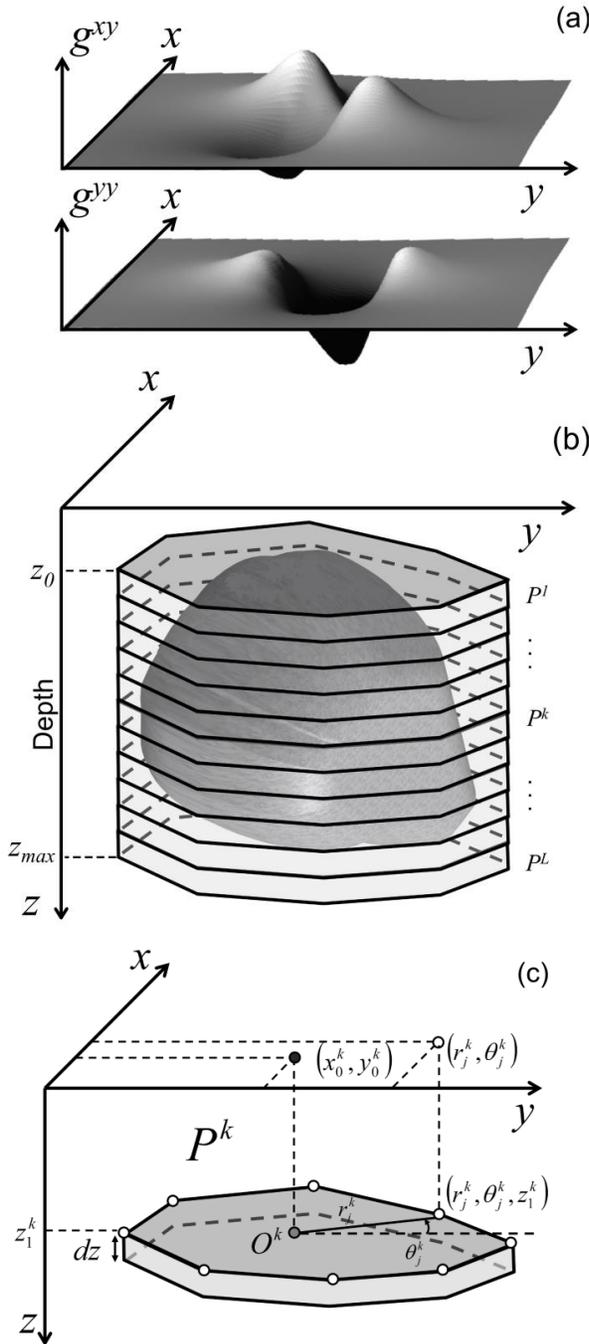


Figura 1: Esboço do modelo interpretativo. (a) Componentes xy e yy do tensor gradiente da gravidade produzidas por uma fonte (corpo cinza escuro em b) localizada em subsuperfície. (b) Modelo interpretativo formado por L prismas verticalmente justapostos (prismas transparentes indicados por $P^k, k = 1, \dots, L$), com topo em z_0 e base em z_{max} . Estes prismas aproximam a geometria da fonte 3D (corpo cinza escuro). (c) Representação do k -ésimo, $k = 1, \dots, L$, prisma do modelo interpretativo. Este prisma tem espessura dz , profundidade do topo z_1^k e seção horizontal descrita por um polígono. Os M vértices deste polígono (pontos brancos) são descritos em coordenadas polares r_j^k e $\theta_j^k, j = 1, \dots, M, k = 1, \dots, L$, referidas a uma origem O^k (ponto preto) com coordenadas Cartesianas x_0^k e y_0^k .

Dessa forma, a componente $g_i^{\alpha\beta}$ do tensor gradiente da gravidade, medida no ponto (x_i, y_i, z_i) , pode ser aproximada por

$$d_i^{\alpha\beta}(\mathbf{m}) \equiv \sum_{k=1}^L f_i^{\alpha\beta}(\mathbf{r}^k, x_0^k, y_0^k, \theta^k, \rho^k, z_1^k, dz), \quad (1)$$

sendo \mathbf{r}^k e θ^k dois vetores M -dimensionais que contêm, respectivamente, as distâncias radiais r_j^k e as coordenadas angulares $\theta_j^k = (j - 1)2\pi/M, j = 1, \dots, M, k = 1, \dots, L$, dos vértices do k -ésimo prisma, cuja profundidade do topo é $z_1^k = z_0 + (k - 1)dz$. Finalmente, $f_i^{\alpha\beta}(\mathbf{r}^k, x_0^k, y_0^k, \theta^k, \rho^k, z_1^k, dz)$ é uma função não-linear, definida com base no trabalho de Plouff (1976), que calcula a componente $\alpha\beta$ ($\alpha\beta = xx, xy, xz, yy, yz, zz$) do tensor gradiente da gravidade produzida pelo k -ésimo prisma.

Problema inverso

O problema consiste em estimar o vetor de parâmetros \mathbf{m} que minimiza a função objetivo

$$\Gamma(\mathbf{m}) = \Psi(\mathbf{m}) + \mu \sum_{\ell=1}^6 \alpha^\ell \phi^\ell(\mathbf{m}), \quad (2a)$$

sujeito a

$$m_i^{min} < m_i < m_i^{max}, i = 1, \dots, P, \quad (2b)$$

em que m_i^{min} e m_i^{max} são estabelecidos pelo intérprete como os limites inferior e superior, respectivamente, do i -ésimo elemento m_i do vetor de parâmetros \mathbf{m} . Na Equação 2a, μ é o parâmetro de regularização, α^ℓ estabelece o peso do ℓ -ésimo vínculo $\phi^\ell(\mathbf{m}), \ell = 1, \dots, 6$, imposto sobre o vetor de parâmetros \mathbf{m} (Oliveira Jr *et al.*, 2011) e $\Psi(\mathbf{m})$ é a função do ajuste dada por

$$\Psi(\mathbf{m}) = \psi^{xx}(\mathbf{m}) + \psi^{xy}(\mathbf{m}) + \dots + \psi^{zz}(\mathbf{m}), \quad (3a)$$

sendo

$$\psi^{\alpha\beta}(\mathbf{m}) = \frac{w^{\alpha\beta}}{N^{\alpha\beta} - P} \sum_{i=1}^N [d_i^{\alpha\beta}(\mathbf{m}) - g_i^{\alpha\beta}]^2, \quad (3b)$$

em que $P = L(M + 2)$, e

$$w^{\alpha\beta} = \sqrt{N^{\alpha\beta} / \sum_{i=1}^N (g_i^{\alpha\beta})^2}, \alpha\beta = xx, xy, xz, yy, yz, zz. \quad (3c)$$

Os vínculos de desigualdade descritos pela Equação 2b são introduzidos ao problema inverso seguindo a abordagem descrita por Barbosa *et al.* (1999) e o mínimo da função $\Gamma(\mathbf{m})$ (Equação 2a) é obtido pelo método de Marquardt.

Critério para estimar a profundidade verdadeira (ou mínima) da base da fonte 3D

Ao definirmos um modelo interpretativo formado por um conjunto de L prismas verticalmente justapostos, com espessura dz e cuja profundidade do topo do prisma mais raso é z_0 , implicitamente definimos a profundidade máxima z_{max} (Figura 1b) do modelo interpretativo como sendo:

$$z_{max} = z_0 + (L \cdot dz) . \quad (4)$$

Após estabelecer o modelo interpretativo, nosso método obtém uma estimativa estável da geometria 3D da fonte por meio da minimização da função $\Gamma(\mathbf{m})$ (Equação 2a), sujeita a desigualdade (2b). Entretanto, quando os dados não têm resolução suficiente, a falta de unicidade do problema inverso aumenta e o método é capaz de produzir um conjunto de estimativas estáveis, com diferentes profundidades máximas z_{max} (Equação 4) e que ajustam os dados igualmente. Para caracterizar a resolução dos dados e contornar esta falta de unicidade, desenvolvemos um novo critério para determinar a melhor estimativa dentre um conjunto de estimativas com diferentes profundidades máximas z_{max} . Este critério se baseia na relação entre o volume v_p da estimativa e a norma L1 dos resíduos referente a todas as componentes $\alpha\beta$ do tensor gradiente da gravidade. Esta norma L1 é dada por

$$s = w^{xx}s^{xx} + w^{xy}s^{xy} + \dots + w^{zz}s^{zz}, \quad (5a)$$

em que

$$s^{\alpha\beta} = \frac{1}{N^{\alpha\beta}} \sum_{i=1}^{N^{\alpha\beta}} |d_i^{\alpha\beta}(\mathbf{m}) - g_i^{\alpha\beta}| , \quad (5b)$$

$d_i^{\alpha\beta}(\mathbf{m})$ é dado pela Equação 1, $w^{\alpha\beta}$ é dado pela Equação 3c e $\alpha\beta = xx, xy, xz, yy, yz, zz$. De acordo com este critério, o gráfico de s (Equação 5) pelo volume v_p produzido por um conjunto de estimativas com diferentes z_{max} (Equação 4) indica (i) a profundidade máxima do corpo verdadeiro, se o mínimo de s for bem definido, ou (ii) a menor profundidade máxima necessária para ajustar os dados, se o mínimo de s não for bem definido. Daqui em diante, o gráfico de s (Equação 5) em função de v_p será denominado curva $s \times v_p$.

Aplicação a dados sintéticos

Nós computamos as componentes xx, xy, xz, yy, yz e zz do tensor gradiente da gravidade produzidas por um corpo que simula um *caprock* sobre um domo de sal (contorno vermelho na Figura 2). Este corpo possui profundidade do topo em 160 m e contraste de densidade $0,55 \text{ g/cm}^3$. A cada componente do tensor foi adicionada uma variável Gaussiana de média nula e desvio padrão diferente para simular erros aleatórios. Além disso, adicionamos uma constante diferente a cada componente do tensor para simular erros sistemáticos (Tabela 1).

| Componente do tensor | Desvio padrão da variável aleatória (Eötvos) | Constante (Eötvos) |
|----------------------|--|--------------------|
| xx | 4,00 | 2,60 |
| xy | 2,50 | 0,14 |
| xz | 5,10 | -2,00 |
| yy | 4,10 | 3,60 |
| yz | 4,70 | -0,72 |
| zz | 6,80 | -6,20 |

Tabela 1: Aplicação a dados sintéticos. Valores do desvio padrão da variável aleatória e da constante que foram adicionadas aos dados para simular, respectivamente, erros aleatórios e sistemáticos nos dados.

Presumindo que a profundidade do topo e o contraste de densidade do corpo verdadeiro são conhecidos, geramos 15 estimativas (não mostradas) com z_{max} (Equação 4) variando de 300 m a 580 m, em intervalos de 20 m. A curva $s \times v_p$ referente a este conjunto de estimativas (não mostrada) indicou um mínimo bem definido de s (Equação 5), que está associado à estimativa com $z_{max} = 420 \text{ m}$. O histograma dos resíduos (não mostrado) referente a esta estimativa apresentou médias deslocadas do zero, sendo estes deslocamentos praticamente iguais aos valores das constantes que foram adicionadas aos dados para simular erros sistemáticos (Tabela 1). Estes deslocamentos foram subtraídos dos dados, gerando um conjunto de dados corrigidos, que foram utilizados para recalculatar outras 15 estimativas com z_{max} (Equação 4) variando de 300 m a 580 m, em intervalos de 20 m.

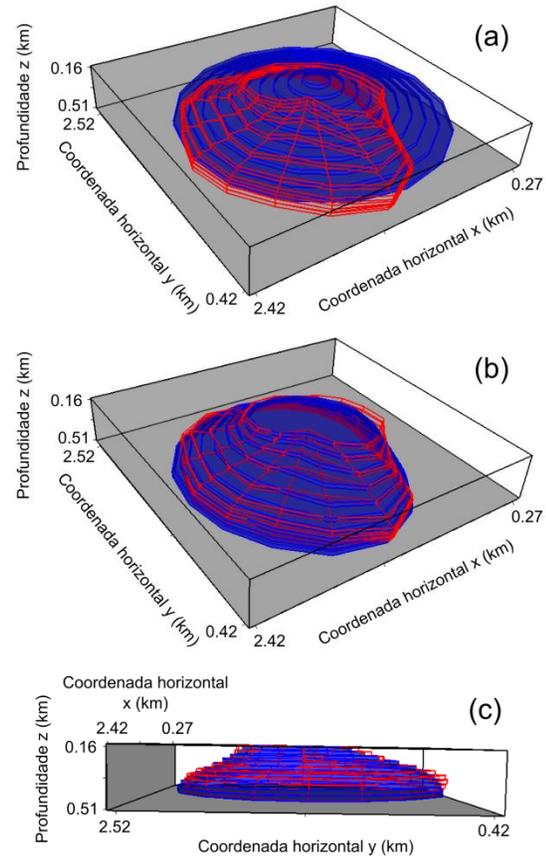


Figura 2: Aplicação a dados sintéticos. (a) Aproximação inicial (prismas azuis). (b) Corpo estimado (prismas azuis). (c) Corpo estimado (prismas azuis). O corpo verdadeiro está representado pelo contorno vermelho em (a), (b) e (c).

A curva $s \times v_p$ (Figura 3) referente a este novo conjunto de estimativas apresenta um mínimo bem definido de s , que está associado à estimativa com $z_{max} = 460 \text{ m}$ (prismas azuis nas Figuras 2b e c), igual ao do corpo verdadeiro (contorno vermelho na Figura 2). Esta estimativa foi obtida a partir da aproximação inicial mostrada na Figura 2a (prismas azuis). Os histogramas

dos resíduos (Figura 4) produzidos pela estimativa com $z_{max} = 460$ m (prismas azuis nas Figuras 2b e c) mostram que os dados preditos por esta ajustam os dados produzidos pelo *caprock* sintético (contorno vermelho na Figura 2). Estes histogramas apresentam médias nulas e desvios padrão próximos aqueles mostrados na Tabela 1, referentes à variável aleatória adicionada aos dados para simular erros aleatórios.

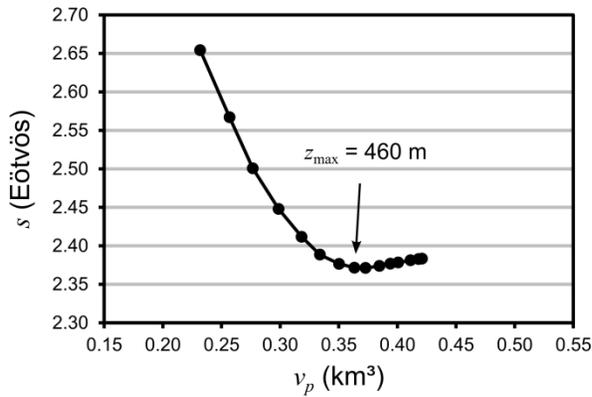


Figura 3: Aplicação a dados sintéticos. Curva $s \times v_p$ produzida por um conjunto de estimativas com diferentes z_{max} (Equação 4). O z_{max} variou de 300 m a 580 m, em intervalos de 20 m. O mínimo de s está associado à estimativa com $z_{max} = 460$ m.

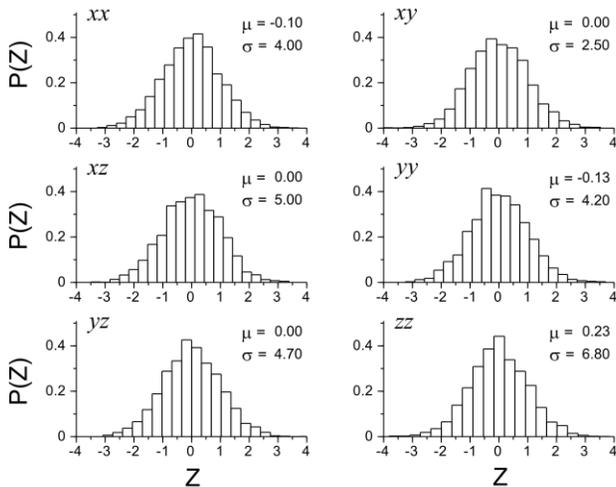


Figura 4: Aplicação a dados sintéticos. Histogramas dos resíduos para cada componente do tensor gradiente da gravidade corrigido dos erros sistemáticos. Os resíduos foram transformados de acordo com a seguinte mudança de variáveis: $Z_i = (r_i - \mu) / \sigma$, em que μ e σ são, respectivamente, a média e o desvio padrão dos resíduos e r_i é o i -ésimo resíduo.

Aplicação a dados reais

Nós aplicamos nosso método para interpretar as componentes xx, xy, xz, yy, yz e zz do tensor gradiente da gravidade medidas sobre o domo de sal Vinton, EUA. Nesta interpretação, nós testamos a hipótese de que os dados são predominantemente produzidos pelo *caprock*

sobre o domo de sal Vinton. Com base no trabalho de Ennen e Hall (2011), consideramos que a profundidade do topo do *caprock* é igual a 160 m e, com base no conhecimento geológico da área (Coker *et al.*, 2007), presumimos que o contraste de densidade do *caprock* é igual a 0,55 g/cm³. Em seguida geramos 15 estimativas (não mostradas) com z_{max} (Equação 4) variando de 300 m a 580 m, em intervalos de 20 m. A curva $s \times v_p$ referente a este conjunto de estimativas (não mostrada) indicou um mínimo bem definido de s (Equação 5), que está associado à estimativa com $z_{max} = 440$ m. Assim como na aplicação a dados sintéticos, o histograma dos resíduos (não mostrado) referente a esta estimativa apresentou médias deslocadas do zero. Estes deslocamentos foram subtraídos dos dados, gerando um conjunto de dados corrigidos, que foram utilizados para recalculer outras 15 estimativas com z_{max} (Equação 4) variando de 300 m a 580 m, em intervalos de 20 m. A curva $s \times v_p$ (Figura 5) referente a este novo conjunto de estimativas apresenta um mínimo bem definido de s , que está associado à estimativa com $z_{max} = 460$ m (prismas azuis nas Figuras 6b e c). Esta estimativa foi obtida a partir da aproximação inicial mostrada na Figura 6a (prismas azuis). Os histogramas dos resíduos (Figura 7) produzidos pela estimativa com $z_{max} = 460$ m (prismas azuis nas Figuras 6b e c) mostram que os dados preditos por esta ajustam os dados observados. Estes resultados sugerem que o tensor gradiente da gravidade sobre o domo de sal Vinton, EUA, pode ser atribuído, predominante, ao *caprock*. Embora a estimativa obtida pelo nosso método (prismas azuis nas figuras 6b e c) seja estável, ajuste os dados observados e possua a parte superior alongada na direção NE-SO da principal falha geológica da região (Coker *et al.*, 2007), vale ressaltar que esta é uma hipótese e que uma melhor interpretação requer mais informação a priori.

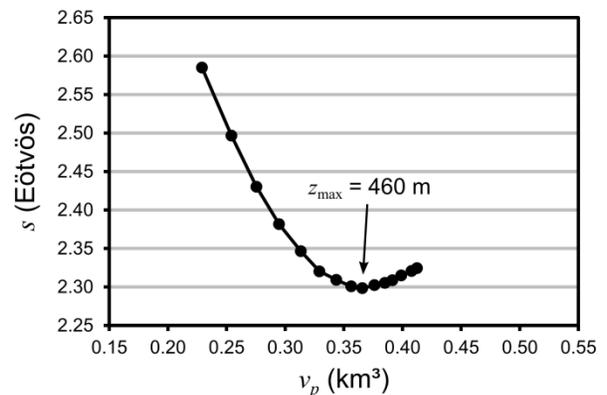


Figura 5: Aplicação a dados reais. Curva $s \times v_p$ produzida por um conjunto de estimativas com diferentes z_{max} (Equação 4). O z_{max} variou de 300 m a 580 m, em intervalos de 20 m. O mínimo de s está associado à estimativa com $z_{max} = 460$ m.

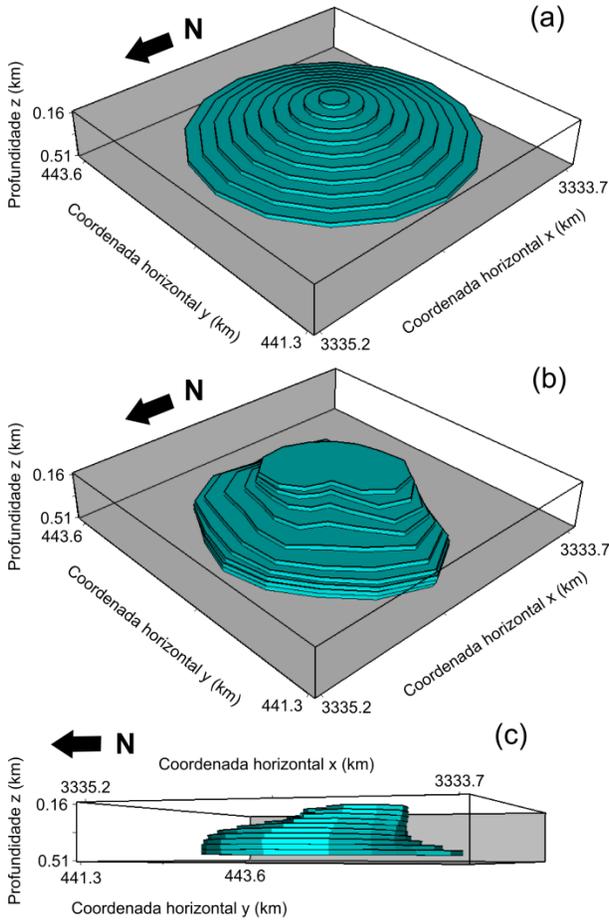


Figura 6: Aplicação a dados reais. (a) Aproximação inicial (prismas azuis). (b) Corpo estimado (prismas azuis). (c) Corpo estimado (prismas azuis).

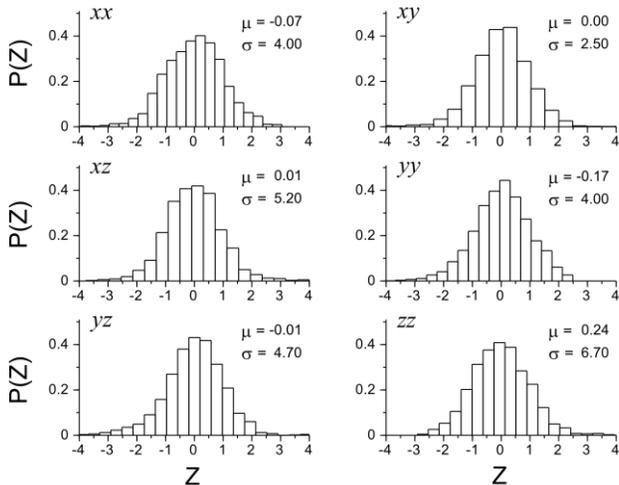


Figura 7: Aplicação a dados reais. Histogramas dos resíduos para cada componente do tensor gradiente da gravidade corrigido dos erros sistemáticos. Os resíduos foram transformados de acordo com a seguinte mudança de variáveis: $Z_i = (r_i - \mu)/\sigma$, em que μ e σ são, respectivamente, a média e o desvio padrão dos resíduos e r_i é o i -ésimo resíduo.

Conclusões

Propusemos um método de inversão de dados de gradiometria gravimétrica para a reconstrução de um corpo 3D isolado. Consideramos que o contraste de densidade e a profundidade do topo do corpo são conhecidos. Além disso, propusemos um critério para analisar a resolução dos dados observados. Este critério é baseado na curva do volume pela norma L1 dos resíduos produzidos por um conjunto de estimativas com diferentes profundidades da base. Aplicações a dados sintéticos e reais mostram a eficiência do nosso método em identificar se os dados têm resolução suficiente e, nesse caso, recuperar completamente a geometria do corpo 3D. Os resultados mostram que nosso método produz estimativas estáveis e que ajustam os dados, mesmo na presença de erros sistemáticos.

Agradecimentos

Esta pesquisa foi patrocinada pelas agências brasileiras de fomento CNPq e FAPERJ e os dados reais foram fornecidos pela empresa Bell Geospace Inc.

Referências

Barnes, G. e J. Barraud, 2012, Imaging geologic surfaces by inverting gravity gradient data with depth horizons: *Geophysics*, 77, G1–G11.

Barbosa, V.C.F., J.B.C. Silva e W.E. Medeiros, 1999, Gravity inversion of discontinuous relief stabilized by weighted smoothness constraints on depth: *Geophysics*, 64(5), 1429–1437.

Coker, M. O., J. P. Bhattacharya e K. J. Marfurt, 2007, Fracture patterns within mudstones on the flanks of a salt dome: Syneresis or slumping?: *Gulf Coast Association of Geological Societies Transactions*, 57, 125-137.

Ditmar, P., 2002, Finding the shape of a local heterogeneity by means of a structural inversion with constraints: *Geophysical Prospecting*, 50, 209–223.

Ennen, C. e S. Hall, 2011, Structural mapping of the Vinton salt dome, Louisiana, using gravity gradiometry data, In: *SEG Annual Meeting, SEG International Exposition and 83rd Annual Meeting*, San Antonio, 18-23 September 2011, SEG.

Oliveira Jr, V.C., V.C.F. Barbosa e J.B.C. Silva, 2011, Source geometry estimation using the mass excess criterion to constrain 3-D radial inversion of gravity data: *Geophys. J. Int.*, 187, 754–772.

Plouff, D., 1976, Gravity and magnetic fields of polygonal prisms and application to magnetic terrain corrections: *Geophysics*, 41(4), 727-741.