



Experimentos Numéricos para o Gradiente do FWI via Método dos Estados Adjuntos: uma comparação entre o domínio do tempo e o domínio da frequência.

Isadora A. S. de Macedo (UFPA, Faculdade de Geofísica, Belém (PA), Brasil & INCT-GP), Natiê Almeida Albano (UFPA, Faculdade de Geofísica, Belém (PA))

Introdução

Um dos desafios dos métodos sísmicos é gerar uma imagem em alta resolução da subperfície através do desenvolvimento de complexos sistemas de aquisição. Uma das formas de investigar as estruturas da subsperfície é através da construção da matriz das derivadas de Fréchet, que indica a sensibilidade dos dados observados aos parâmetros do meio. A utilização da matriz de sensibilidade se tornou inviável em sistemas de aquisição complexos por conta do aumento do custo computacional, o que possibilitou o avanço de novos métodos de imageamento. Claerbout (1971) mostrou que um refletor existe onde os campos de onda da fonte e do receptor coincidem no tempo e no espaço. A refletividade como um atributo da amplitude dos traços em um ponto do refletor forneceu uma imagem migrada possível de ser interpretada estrategicamente.

Lailly (1983) e Tarantola (1994) reformularam o princípio proposto por Claerbout (1971) como um problema de otimização, onde deseja-se minimizar o erro entre o dado observado e o dado calculado a partir de uma modelagem numérica. O gradiente da função objetivo (soma dos quadrados dos resíduos entre o campo calculado e observado) é obtido através da correlação cruzada entre o campo de onda propagado pela fonte e o campo residual propagado a partir dos receptores. O modelo de perturbação obtido, quando adicionado ao modelo de velocidade inicial, dá origem a um modelo de velocidade atualizado que, por sua vez, é usado como modelo inicial na próxima iteração para minimizar a função objetivo. Essa estimativa é realizada para todas as fontes, receptores e para o tempo total de aquisição, logo, é computacionalmente expensiva.

Com o advento de aquisições sísmicas multi-azimute e de longos offsets e de fontes com maior banda de frequência, a inversão do campo completo de onda - *Full Waveform Inversion* (FWI) - ganhou destaque com os trabalhos pioneiros de Pratt (1990) e Mora (1987).

Com a FWI é possível estimar os parâmetros físicos da subsuperfície com alta precisão e resolução. Esta abordagem por consistir em um método de inversão não linear pode levar o problema a uma solução que não consiste em um mínimo global, surgindo a necessidade de adotar estratégias que contornem o problema provocado pela não-linearidade da FWI, como a utilização de um modelo de velocidade inicial próximo do desejado, a presença de informações de baixa frequência nos dados observados e conhecimento da fonte utilizada na aquisição dos dados. A FWI pode ser implementada tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. A

utilização de uma ou outra abordagem depende do tipo do problema. No domínio da frequência, a questão da não-linearidade pode ser contornada com a inversão multi escala, que consiste em inverter o dado para uma única frequência, ou para uma banda de frequência separadamente.

A FWI iterativamente atualiza o modelo de parâmetros com uma quantidade que depende do gradiente da função objetivo. De modo geral, a computação do gradiente no domínio do tempo está dividida em três partes, a 1) modelagem direta no tempo dos campos de onda a partir da fonte, 2) modelagem do campo de onda adjunto reverso no tempo a partir das fontes adjuntas, localizadas na posição dos receptores, e 3) aplicação de um operador de condição de imagem. O cálculo do gradiente é o principal fator a influenciar o alto custo computacional da FWI, uma vez que requer a correlação cruzada entre o campo da fonte e o campo adjunto para todos os instantes de tempo, para todos os receptores e para todas as fontes.

Dentro deste contexto, este trabalho visa descrever as etapas realizadas para a implementação computacional do gradiente da função objetivo para a equação acústica da onda no domínio do tempo, além de apresentar os seus experimentos numéricos e compará-los com o gradiente da função objetivo obtido a partir da formulação no domínio da frequência.

Formulação matemática: método dos estados adjuntos

Domínio do tempo

Seja a equação acústica da onda com densidade constante dada por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - v^2(\mathbf{x})\nabla^2 p = s(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s), \quad (1)$$

onde $p(\mathbf{x}, t)$ é o campo de pressão, $v(\mathbf{x})$ é a velocidade do meio, $s(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s)$ o termo fonte e fazendo $c(\mathbf{x}) = v^2(\mathbf{x})$ a equação de estado para o problema inverso será dada por:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c(\mathbf{x})\nabla^2 p - s(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) = 0. \quad (2)$$

Define-se a função objetivo como:

$$J = \frac{1}{2} \sum_s \sum_r \sum_t \left[p^{obs}(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) - p(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) \right]^2, \quad (3)$$

onde $p^{obs}(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s)$ e $p(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s)$ representam o campo observado e calculado, respectivamente.

De posse da função objetivo e da equação de estado, pode-se construir a lagrangeana:

$$\mathcal{L}(p, \Lambda | c) = \frac{1}{2} \sum_s \sum_r \sum_t \left[p^{obs}(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) - p(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) \right]^2 + \sum_s \int_{\Omega} dx \int_0^t dt \Lambda \left[\frac{\partial^2 p(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s)}{\partial t^2} - c(\mathbf{x}) \nabla^2 p(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) - s(t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \right].$$

Avaliando apenas as variações de primeira ordem na lagrangeana, realizando integrações por parte nos termos com variação do campo de onda e exigindo que haja apenas a variação do funcional em relação às propriedades físicas, encontra-se a equação de estados adjuntos descrita por:

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} - \nabla \cdot \nabla [\Lambda c(\mathbf{x})] = \sum_r \left[p(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) - p^{obs}(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) \right] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r), \quad (5)$$

cujas fontes adjuntas são o resíduo do campo observado e calculado. Uma vez calculado o campo adjunto Λ pela equação de estados adjuntos (5) e aplicando as condições de fronteira impostas à Λ que exige que a mesma seja nula nas bordas, a variação do funcional - gradiente da função objetivo - em relação às propriedades físicas será dada por:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_s \int_{\Omega} dx \int_0^T dt \left[\delta c(\mathbf{x}) \nabla^2 p(t, \mathbf{x}_r; \mathbf{x}_s) \Lambda \right]. \quad (6)$$

Domínio da frequência

Esta seção mostra, de forma geral, como obter o gradiente da função objetivo no domínio da frequência. Aspectos da modelagem no domínio da frequência são comentados nas próximas seções. Seja a equação da onda no domínio da frequência definida por:

$$-\omega^2 M \mathbf{u}(\omega) + K \mathbf{u}(\omega) = f(\omega), \quad (7)$$

onde M representa a matriz de massa (*mass matrix*), K representa a matriz de rigidez (*stiffness matrix*), ω é a frequência angular, f é a fonte e \mathbf{u} é o campo de onda discretizado. A equação 7 pode ser expressa como um sistema linear da forma:

$$L \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad (8)$$

onde os termos $(-\omega^2 M + K)$ da equação 7 compõe a matriz L .

Define-se a função objetivo como:

$$\chi(m) = \chi[\mathbf{u}(m)]. \quad (9)$$

Derivando-a em relação aos parâmetros que desejam ser recuperados, representados por m , tem-se:

$$\frac{\partial \chi}{\partial m} = \nabla_{\mathbf{u}} \chi \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m}. \quad (10)$$

O termo $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m}$ constitui a matriz de sensibilidade. Como calculá-la explicitamente é caro computacionalmente, utiliza-se o método dos estados adjuntos para computar o gradiente da função objetivo sem a necessidade de calcular todas as componentes dessa matriz. Para tanto, deriva-se a equação 8 em relação aos parâmetros:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial m} = -L^{-1} \frac{\partial L}{\partial m} \mathbf{u} \quad (11)$$

Substituindo a equação 11 em 10, tem-se:

$$\frac{\partial \chi}{\partial m} = -\mathbf{u} \frac{\partial L^T}{\partial m} (L^{-1})^T \nabla_{\mathbf{u}} \chi. \quad (12)$$

Definindo-se:

$$L^H \cdot \mathbf{u}^\dagger = -\nabla_{\mathbf{u}} \chi \quad (13)$$

e substituindo em 12, tem-se:

$$\frac{\partial \chi}{\partial m} = \mathbf{u} \frac{\partial L^H}{\partial m} \mathbf{u}^\dagger. \quad (14)$$

A equação 14 é o gradiente da função objetivo no domínio da frequência. Os índices H e \dagger representam o transposto hermitiano para a matriz e para o vetor, respectivamente. O campo \mathbf{u} é obtido através da modelagem direta no domínio da frequência e o campo adjunto \mathbf{u}^\dagger é obtido através da solução da equação 13, que também constitui uma modelagem, porém com a fonte sendo o resíduo entre os campos. Essas modelagens, por sua vez, são alcançadas através da solução do sistema linear mostrado na equação 8.

Experimentos numéricos: par fonte receptor

Esta seção mostra os resultados gerados com o algoritmo que calcula o gradiente para um par fonte-receptor. A equação 6 foi a que fora implementada neste trabalho para gerar o gradiente: é realizada a correlação cruzada entre o campo adjunto (modelado a partir da equação 5) e o laplaciano do campo de onda direto. Utilizou-se a equação 1 parametrizada para $c(\mathbf{x}) = v^2(\mathbf{x})$ para computar o campos de onda direto para o modelo calculado. O procedimento para gerar estes gradientes, para todos os modelos testados, foi o seguinte:

1. Define-se a posição da fonte, a posição do receptor e a frequência pico do pulso fonte.

Tabela 1: Parâmetros do modelo homogêneo

Parâmetros do modelo homogêneo		
n_x	Número de pontos na direção x	301
n_z	Número de pontos na direção z	301
dx	Incremento espacial na direção x	10.0m
dz	Incremento espacial na direção z	10.0m
f	Frequência pico do pulso fonte	10Hz
t	Tempo total de modelagem	4s
V_c	Velocidade do modelo calculado	3500m/s
V_o	Velocidade do modelo observado	3000m/s

- Define-se um modelo de velocidade observado e registra-se o traço sísmico na posição do receptor.
- Define-se um modelo de velocidade inicial (calculado) e registra-se o traço na posição do receptor e armazena-se o laplaciano do campo de onda direta propagado na modelagem.
- Calcula-se o resíduo entre os traços registrados com o modelo observado e com o modelo calculado.
- Utilizando o resíduo como fonte, propaga-se, reversamente no tempo, o campo de onda adjunto a partir da posição do receptor e armazena-se os campos retropropagados.
- Para o mesmo ponto no espaço e no tempo, calcula-se a correlação cruzada entre o laplaciano do campo direto e o campo adjunto que gerará um ponto imagem no gradiente.

Modelo homogêneo

O primeiro resultado diz respeito ao gradiente calculado em um meio homogêneo cujos parâmetros estão descritos na tabela ???. A figura 2 mostra o gradiente calculado para duas frequências distintas: 5Hz e 10Hz.

O teste no modelo homogêneo mostra o efeito isolado das ondas transmitidas no gradiente do FWI (*Transmission FWI*), uma vez que no modelo homogêneo não haverá ondas refletidas. O destaque se dá para as *banana kernels*. Com o offset fixo, mantendo a mesma escala e mudando apenas a frequência, é possível notar o efeito da mesma no gradiente: as frequências mais baixas mostram ter uma contribuição maior no gradiente quando comparada às frequências mais altas.

Modelo com refletor

Um teste no modelo com um refletor foi realizado para validar o algoritmo do gradiente e para verificar a relação existente entre o offset e a profundidade de iluminação do gradiente. Neste caso, foram realizados dois modelos com profundidades distintas do refletor: 1000m e 2500m. Os parâmetros dos modelos estão na tabela 2.

[1-2] [3-10]

Primeiramente, nos dois modelos de refletor usados para teste, os modelos observado e calculado possuem a mesma profundidade do refletor, alterando apenas a velocidade da camada inferior, o que faz com que o efeito da onda direta seja eliminado e os eventos de reflexão sejam isolados, fazendo com que as *rabbit ears kernels*

Parâmetros do modelo homogêneo		
n_x	Número de pontos na direção x	301
n_z	Número de pontos na direção z	301
dx	Incremento espacial na direção x	10.0m
dz	Incremento espacial na direção z	10.0m
f	Frequência pico do pulso fonte	10Hz
t	Tempo total de modelagem	4s
V_c	Velocidade do modelo calculado	3500m/s
V_o	Velocidade do modelo observado	3000m/s

Figura 1: Parâmetros do modelo homogêneo

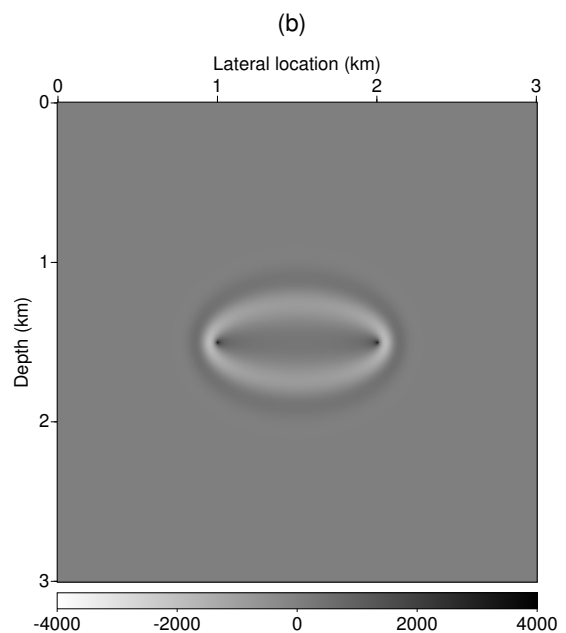
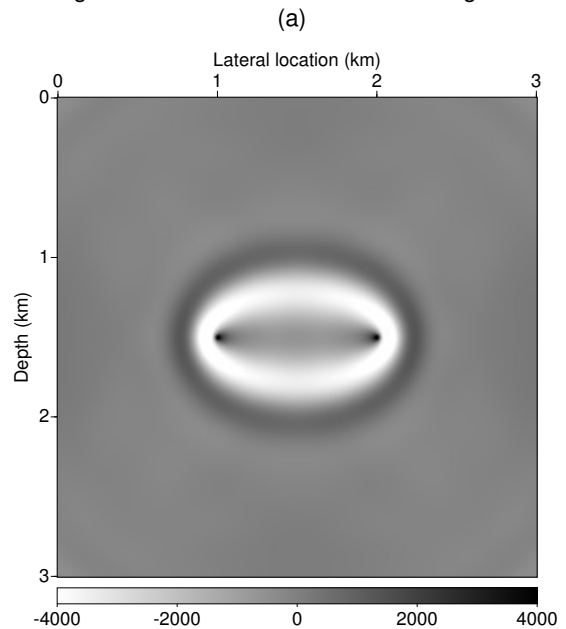


Figura 2: Gradientes calculados para o meio homogêneo com diferentes frequências pico do pulso fonte. a) Frequência de 5Hz. b) Frequência de 10Hz.

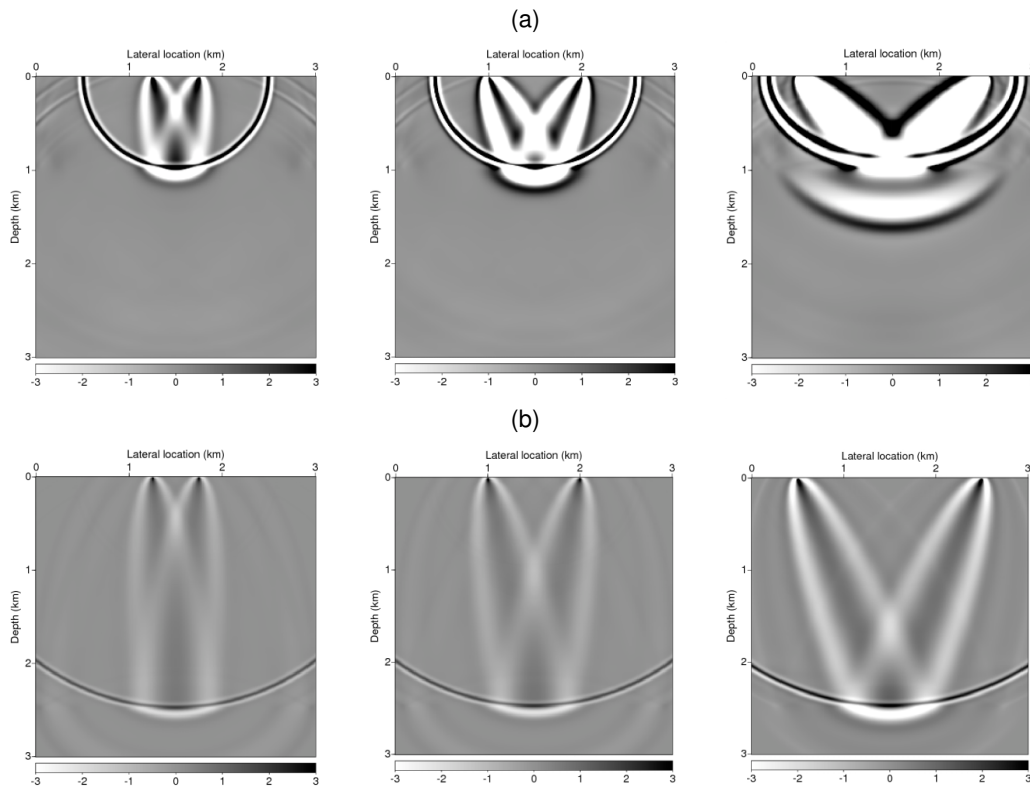


Figura 5: Gradiente para o offset de 500m para um refletor em diferentes profundidades. a) Refletor a 1000m. b) Refletor a 2500m.

Tabela 2: Parâmetros do modelo com refletor

Parâmetros do modelo com refletor		
n_x	Número de pontos na direção x	301
n_z	Número de pontos na direção z	301
dx	Incremento espacial na direção x	10.0m
dz	Incremento espacial na direção z	10.0m
f	Frequência pico do pulso fonte	10Hz
t	Tempo total de modelagem	4s
V_c	Velocidade inferior do modelo calculado	3500m/s
V_o	Velocidade inferior do modelo observado	3000m/s
V	Velocidade da camada superior	1500m/s

sejam destacadas, o que constitui o *Reflection FWI*. O teste mostrou a influência do offset na iluminação do refletor no gradiente, o que conseqüentemente afeta a recuperação da propriedade física do refletor na inversão. Ao comparar o gradiente do offset de 500m (figura 5) com o gradiente do offset de 2000m (figura ??), fica claro que o aumento do offset possibilita a iluminação de refletores nas porções mais profundas do modelo e que quando o refletor está raso e o offset é longo, as porções mais rasas atingem o seu máximo de iluminação. Ao relacionar o resultado deste teste com o resultado dos testes realizados no modelo homogêneo, que mostrou que a resposta do gradiente é melhor e mais nítida para as menores frequências, pode-se concluir que é preciso que haja um balanço entre a frequência utilizada no FWI e o offset para que seja possível obter o melhor resultado no gradiente e se possa iluminar até as regiões mais profundas do modelo, uma vez que as baixas frequências e os longos offsets produzem a melhor iluminação.

Tabela 3: Parâmetros da aquisição: modelo Marmousi

Parâmetros da aquisição: modelo Marmousi		
N_{shot}	Número de tiros	138
N_{rcv}	Número de receptores	180
d_{shot}	Espaçamento entre os tiros	65m
d_{rcv}	Espaçamento entre os receptores	50m
t	Tempo total de modelagem	4s
dt	Tempo de registro do traço	0.004s

Experimentos numéricos: várias fontes e receptores e comparação com o domínio da frequência

Modelo Marmousi

Ao simular uma aquisição completa no modelo Marmousi e calcular o gradiente, comparamos os resultados obtidos no domínio do tempo com os resultados obtidos a partir de um algoritmo que calcula o gradiente no domínio da frequência. Os parâmetros da aquisição neste modelo estão indicados na tabela 3 e os modelos observado e calculado estão na figura 6.

O teste no modelo Marmousi mostrou que o gradiente para a aquisição completa se assemelha ao modelo. A parte mais rasa do gradiente ficou com as amplitudes maiores, o que é natural, já que com a profundidade os campos de onda perdem amplitude devido a divergência esférica, espalhamento geométrico, dentre outros fatores. É possível que as faixas de maior amplitude no topo da imagem sejam devido a linha de receptores posicionados a uma profundidade de 50 metros e à profundidade da

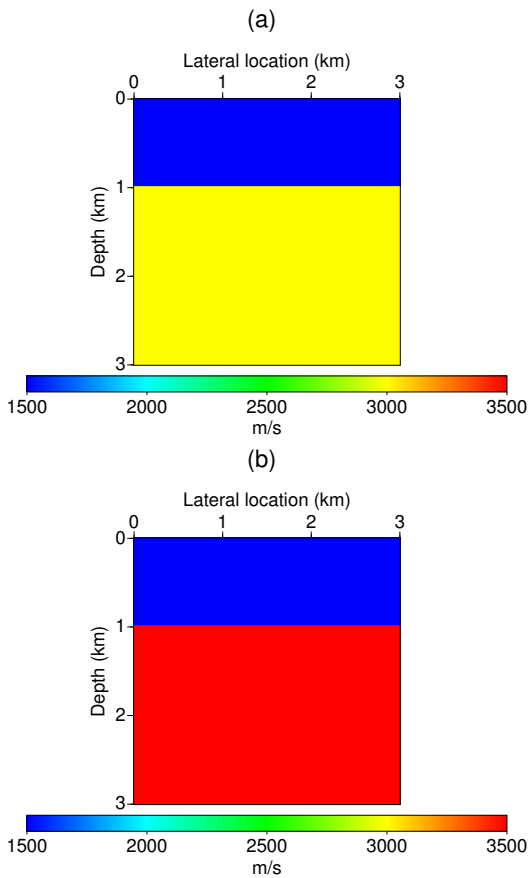


Figura 3: Modelo com refletor na profundidade de 1000m. a) Modelo observado b) Modelo calculado.

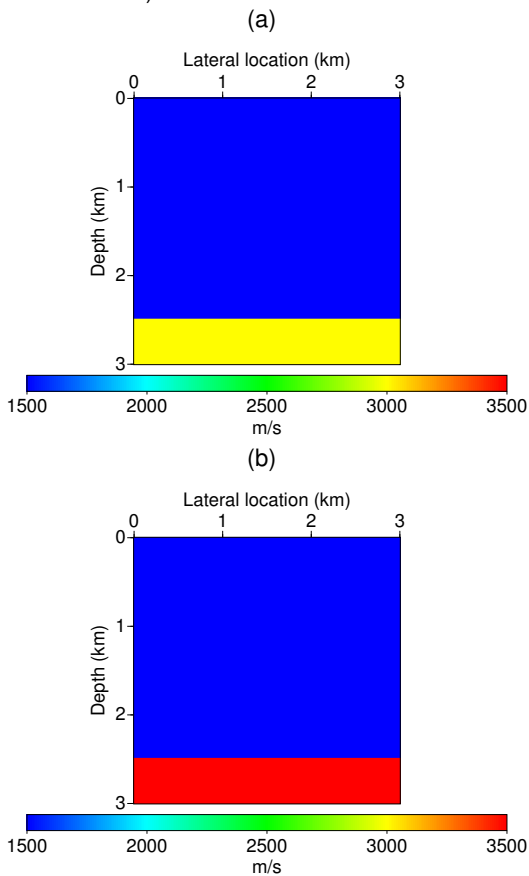


Figura 4: Modelo com refletor na profundidade de 2500m. a) Modelo observado b) Modelo calculado.

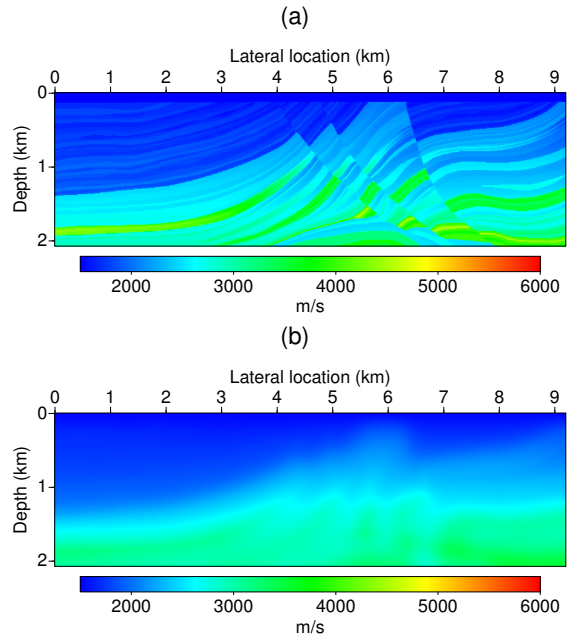


Figura 6: a) Modelo Marmousi utilizado para gerar o dado observado. b) Modelo Marmousi suavizado para ser o modelo inicial.

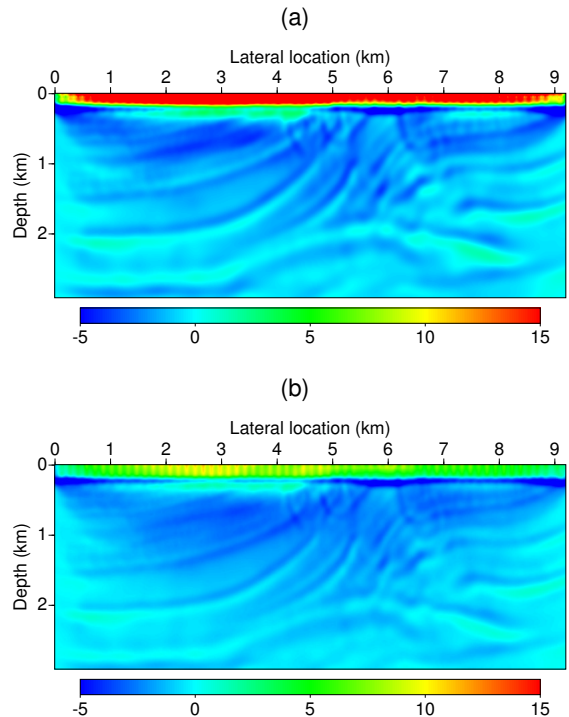


Figura 7: Gradiente para o modelo Marmousi para uma aquisição completa. a) Frequência de 5Hz. b) Frequência de 10Hz.

lâmina de água do modelo. Comparando as imagens, nota-se que o gradiente ficou com uma melhor resolução para a menor frequência.

Um algoritmo que calcula o gradiente da função objetivo para a equação da onda acústica no domínio da frequência foi disponibilizado para que pudesse ser possível a comparação com aqueles produzidos no domínio do tempo. Uma das vantagens do cálculo do gradiente no domínio da frequência é a possibilidade de calculá-lo para uma única frequência ou para uma banda de frequência, o que faz com que o tempo de processamento do algoritmo seja consideravelmente menor do que no domínio do tempo. É mostrada nessa seção a imagem final do gradiente computado no domínio da frequência para diferentes bandas de frequência utilizando o modelo Marmousi mostrado na figura 6. A frequência pico do pulso fonte utilizada nestes testes foi de 5Hz. A banda de frequência do dado é de cerca de três vezes a frequência pico, ou seja, o algoritmo é capaz de gerar gradientes para uma banda de frequência até cerca de 15Hz para este modelo.

Discussão e Conclusões

Os gradientes para uma única frequência mostram o que esta frequência foi capaz de imagear no gradiente e como ela vai contribuir na recuperação do modelo de velocidade. Nota-se que as imagens para uma única frequência mostram a forma geral do Marmousi enquanto que as imagens do gradiente para uma banda de frequência são mais detalhadas e com mais estruturas aparentes. O gradiente para a menor banda de frequência (2Hz a 5Hz) mostrou ter a melhor resolução na imagem, menos distorções são aparentes no fundo do modelo e as estruturas estão bem delimitadas. Observa-se que o aumento da banda de frequência introduz artefatos no gradiente que não estão presentes no modelo de velocidade que se deseja recuperar.

Neste trabalho, os experimentos numéricos para o gradiente no domínio do tempo e no domínio da frequência mostraram que as imagens com melhor distinção de estruturas do modelo foi alcançada com as menores frequências. Para ambos os domínios, o aumento da frequência introduziu artefatos no gradiente que não condiziam com o modelo de velocidade e podem prejudicar a inversão. Além disso, mostrou-se a forma do gradiente em relação a eventos específicos, como o surgimento das *banana kernels* no gradiente do modelo homogêneo que só produz ondas transmitidas nos campos de onda e o surgimento das *rabbit ears kernels* no gradiente do modelo com o refletor, que isolou os eventos de reflexão nos campos de onda. Foi possível observar a relação existente entre o offset e a profundidade de iluminação no gradiente, de onde concluiu-se que o máximo de iluminação é atingido em refletores rasos e com longos offsets e apenas os longos offsets foram capazes de iluminar refletores mais profundos. A relação offset vs. frequência também foi analisada e concluiu-se que as baixas frequências e os longos offsets produzem uma resposta melhor no gradiente, o que provavelmente contribuirá para produzir melhores resultados na recuperação do modelo de velocidade.

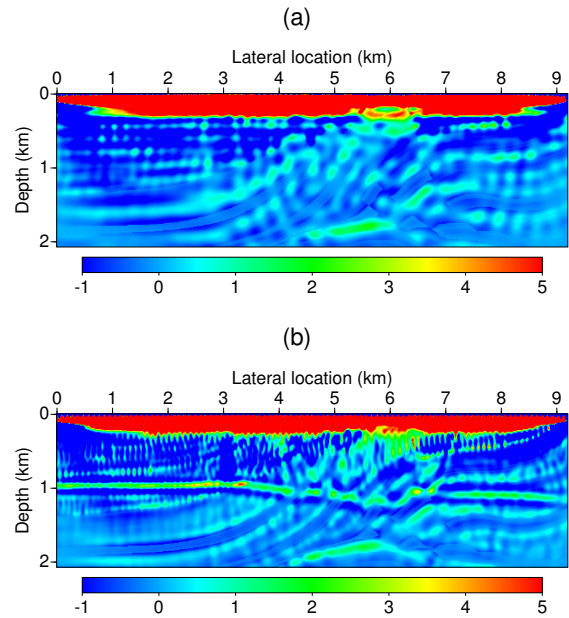


Figura 8: Gradiente para o modelo Marmousi para uma aquisição completa. a) Utilizando uma banda de frequência de 2Hz a 5Hz, com incremento de 0.5Hz. b) Utilizando uma banda de frequência de 2Hz a 12Hz com incremento de 1Hz.

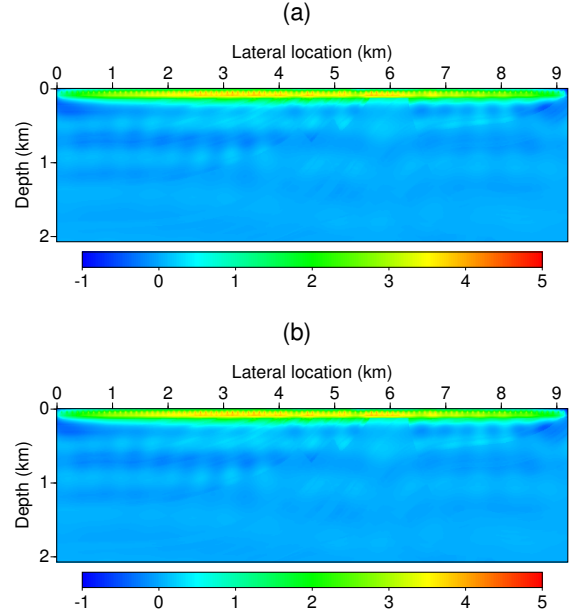


Figura 9: Gradiente para o modelo Marmousi para uma aquisição completa utilizando apenas uma única frequência. a) Apenas para a frequência de 5Hz. b) Apenas para a frequência de 12Hz.

Agradecimentos

Aos professores Jessé Carvalho Costa e Daniel Leal Macedo pela orientação, ao pós-doutorando Carlos Alexandre Nascimento da Costa pela solicitude e disponibilização dos algoritmos no domínio da frequência e a CAPES, CNPq, CPGf/UFGA e INCT-GP pelo suporte à pesquisa.

Referências

- Claerbout, J., 1971, Toward a unified theory of reflector mapping: *Geophysics*, **36**, 467–481.
- Lailly, P., 1983, The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations: Conference on Inverse Scattering, Theory and Application, Society for Industrial and Applied Mathematics, **00**, 206–220.
- Mora, P. R., 1987, Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multi-offset seismic data: *Geophysics*, **52**, 1211–1228.
- Pratt, R. G., W. M. H., 1990, Inverse theory applied to multisource cross-hole tomography, Part 1: Acoustic wave-equation method: *Geophysical Prospecting*, **38**, 287–310.
- Tarantola, A., 1994, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation: *Canadian Journal of Exploration Geophysics*, **49**, 1259–1266.