



Estimation of depth parameters in anisotropic media

Francisco G. Ortega, Amin Bassrei, Hernado C. Marín

Copyright 2019, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 16th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, 19-22 August 2019.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 16th International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

We propose a joint estimation of the P wave velocity and the Thomsen parameters. To do so, these values will be obtained using new approximations of the reflection time in Isotropic Transverse media through a deterministic inversion with regularization. The results of these inversions will be validated using the estimated two-dimensional distributions in the Depth migration step, tested in homogeneous and heterogeneous multilayer synthetic models. The expressions for the reflection time used in the inversion are obtained by means of rational approximations of the phase velocity. The main advantage of the proposed approaches is that some of them are very simple analytical expressions.

Keywords: Phase velocity, regularized inversion, joint parameter estimation, depth migration.

Introdução

A hipótese de isotropia no processamento de dados sísmicos tem se mostrado insuficiente para modelar tem-se um aumento de complexidade na estimativa da velocidade *NMO* (*Normal Moveout*), pois a aproximação do tempo de reflexão deve levar em consideração os parâmetros anisotrópicos do meio (Alkhalifah e Tsvankin, 1995; Alkhalifah, 1997; Fomel, 2004; Aleixo e Schleicher, 2010), que em geral são desconhecidos.

Podemos obter expressões para o tempo de reflexão neste tipo de meio a partir da velocidade de grupo da onda sísmica, mas esta velocidade é difícil de explicitar porque é deduzida mediante a velocidade de fase a qual é representada por uma expressão algebricamente complicada e multiparamétrica. Por isso, vários autores têm apresentado parametrizações e obtido aproximações para esta equação dependendo de menos parâmetros. Num meio *TI* (*Transverse Isotropic*), por exemplo, a expressão da velocidade de fase para as ondas *P* e *SV* é descrita por uma equação que requer de sete parâmetros independentes para cada interface refletora: cinco componentes do tensor de elasticidade e dois ângulos que especificam a simetria dos eixos de orientação. Uma simplificação do exemplo anterior é um meio *VTI* (*Vertical Transverse Isotropic*). Neste meio é eliminada a dependência dos ângulos que especificam a simetria dos

eixos. Existem inúmeras formas de aproximar esta equação, um dos alvos deste artigo, por umas funções mais simples. A dedução destas funções permite-nos encontrar importantes itens ou fenômenos físicos como: descrever um meio *TTI* (*Tilted Transverse Isotropic*); calcular a velocidade de grupo; obter o número de onda k_z para um meio acústico *VTI*; deduzir as aproximações do tempo de reflexão, a partir da velocidade de grupo. Neste trabalho desenvolvemos um algoritmo de baixo custo computacional para estimar parâmetros de anisotropia em meios *VTI* em profundidade, utilizando expressões do tempo de reflexão propostas obtidas a partir de aproximações racionais da velocidade de fase. As simulações de inversão determinaram distribuições bidimensionais da velocidade vertical da onda *P* e dos parâmetros de Thomsen. Estes resultados serão validados usando um método de migração em profundidade. O objetivo é a dedução de aproximações melhores para o tempo de reflexão, bem como a melhora do processo de inversão dos parâmetros.

Velocidade de fase em meios *VTI*

Graças ao poder de computação atual a expressão exata da velocidade de fase em meios anisotrópicos não representa um problema na modelagem, entretanto, esta equação ainda é um desafio no problema inverso devido a sua não linearidade e parametrização. Fowler (2003) propôs uma elegante simplificação desta expressão em função das velocidades horizontal (v_{px}) e vertical (v_{pz}) para a onda *P* num meio quase-acústico *VTI*:

$$2v_p^2(\theta) = v_e^2(\theta) + \sqrt{v_e^4(\theta) + (v_{p1}^2 v_{p2}^2 - v_{px}^2 v_{pz}^2) \sin^2 2\theta}, \quad (1)$$

onde θ é o ângulo de fase, ou seja, o ângulo entre a normal à frente de onda e o eixo vertical e $v_e(\theta)$ é chamada de parte elíptica da velocidade, definida como: $v_e^2(\theta) = v_{px}^2 \sin^2 \theta + v_{pz}^2 \cos^2 \theta$ o valor v_{p1}^2 na equação (1) é definida como a primeira velocidade de fase da onda *P* de teste e pode ser modificado e varia entre $v_{pmin}^2 \leq v_{p1}^2 \leq v_{pmax}^2$, em que v_{pmin} e v_{pmax} são afase $v_p(\theta)$, respectivamente. O valor v_{p2} é definido como a segunda velocidade de fase da onda *P* de teste, calculada pela seguinte expressão:

$$v_{p2}^2 = \frac{(v_{pz}^2 - v_{sz}^2)(v_{pn}^2 - v_{sz}^2)}{v_{p1}^2 - v_{sz}^2} + v_{sz}^2, \quad (2)$$

em que v_{sz} corresponde à velocidade vertical da onda *SV* e v_{pn} é a velocidade *NMO*.

Aproximações propostas

Existem inúmeras formas de aproximar a velocidade de fase, por funções com propriedades interessantes, tal como o método de Padé o qual permite-nos partir de uma série de potências e obter muito mais informação do que a própria série nos fornece diretamente. Utilizando a equação (1), e o método de Padé (ver Anexo) para calcular as funções racionais $v_{p[1/1]}(\alpha)$ e $v_{p[2/2]}(\alpha)$ obtemos o mesmo resultado acústico obtido por Pereira et al. (2015):

$$v_{p[1/1]}^2(\theta) \approx v_e^2(\theta) \left[1 + \frac{2s\alpha}{2sv_e^4(\theta) + \alpha} \right], \quad (3)$$

$$v_{p[2/2]}^2(\theta) \approx v_e^2(\theta) \left[1 + \frac{4s^2v_e^4(\theta)\alpha + 4s\alpha^2}{4s^2v_e^8(\theta) + 6sv_e^4(\theta)\alpha + \alpha^2} \right], \quad (4)$$

onde $\alpha = (v_{p1}^2v_{p2}^2 - v_{pz}^2v_{px}^2)\sin^2 2\theta$, este resultado utilizou a aproximação anelítica da velocidade de grupo da função *shifted-hyperbola* de Fomel (2004). A escolha dos valores $v_{p1} = v_{pz}$ e $v_{sz} = 0$ na equação (2) são particularmente convenientes porque v_{pn} pode ser medido a partir de dados sísmicos de superfície. Tomando a raiz quadrada em ambos lados das equações (3) e (4), atribuindo $s = 1/2$ e linearizando o lado direito do radical obtém-se novas aproximações:

$$v_{p[1/1]}(\theta) \approx v_e(\theta) \left[1 + \frac{\alpha}{2v_e^4(\theta) + 2\alpha} \right], \quad (5)$$

e

$$v_{p[2/2]}(\theta) \approx v_e(\theta) \left[1 + \frac{v_e^4(\theta)\alpha + 2\alpha^2}{2v_e^8(\theta) + 6v_e^4(\theta)\alpha + 2\alpha^2} \right]. \quad (6)$$

As aproximações (5) e (6) têm formas simples e termos elípticos e anelíticos que dependem explicitamente das velocidades v_{px} , v_{pz} e v_{pn} . Estas aproximações podem ser reduzidas em função de um único parâmetro de anisotropia (η).

Velocidade de grupo

Utilizando a técnica de conversão por similaridade de forma proposta por Dellinger et al. (1993) que consiste em substituir a velocidade de fase pela vagarosidade de grupo, pode-se obter a aproximação para a velocidade de grupo, ou raio, a partir das velocidades de fase (5) e (6):

$$V_{p[1/1]}^{-1}(\theta) \approx V_e^{-1}(\theta) \left[1 + \frac{sA}{2sV_{pe}^{-4}(\theta) + A} \right], \quad (7)$$

$$V_{p[2/2]}^{-1}(\theta) \approx V_e^{-1}(\theta) \left[1 + \frac{4s^2V_{pe}^{-4}(\theta)A + 4sA^2}{4s^2V_{pe}^{-8}(\theta) + 6sV_{pe}^{-4}(\theta)A + 2A^2} \right], \quad (8)$$

em que θ é o ângulo de grupo e $A = (v_{p1}^{-2}v_{p2}^{-2} - v_{px}^{-2}v_{pz}^{-2})\sin^2\theta\cos^2\theta$. Assumindo que $v_{p1} = v_{pz}$, $v_{p2} = v_{pn}$ e utilizando a expressão para a velocidade horizontal $v_{px}^2 = (1 + 2\eta)v_{pn}^2$, A pode ser reescrita com: $A = (Q - 1)v_{px}^{-2}v_{pz}^{-2}\sin^2\theta\cos^2\theta$, onde $Q = 1 + 2\eta$.

Tempo de reflexão em meios VTI

Assim como a aproximações da velocidade de fase das expressões (5) e (6) são transformadas em velocidades de grupo expressas pelas equações (7) e (8), respectivamente. A aproximação da velocidade do grupo (V_p) pode ser convertida em uma aproximação para o tempo de reflexão. Para isto consideremos um segmento de raio atravessando uma distância horizontal: $x = V_p(\theta)tsin\theta$, e uma distância vertical $V_p(\theta)tcos\theta$, onde θ corresponde ao ângulo de grupo e t é o tempo de reflexão. Substituindo estas expressões nas velocidades de grupo (7), (8); atribuindo $s = 1/4(1 + \eta)$ e resolvendo t , obtemos as aproximações para o tempo de reflexão propostas para um meio VTI:

$$t(\mathbf{m}, x) \approx t_e(x) \left[1 + \frac{sax^2}{2st_e^4(x) + ax^2} \right], \quad (9)$$

e

$$t(\mathbf{m}, x) \approx t_e(x) \left[1 + \frac{2s^2t_e^4(x)ax^2 + 2sa^2x^4}{4s^2t_e^8(x) + 6st_e^4(x)ax^2 + a^2x^4} \right], \quad (10)$$

onde

$$t_e^2(x) = t_0^2 + x^2/Qv_{pn}^2,$$

e

$$a = (v_{p1}^2v_{p2}^2 - 1/v_{px}^2)t_0^2.$$

Assumindo que $v_{p1} = v_{pz}$, $v_{p2} = v_{pn}$, esta equação (a) pode ser reescrita como: $a = (Q - 1)v_{px}^{-2}t_0^2$, onde $t_0^2 = 4z^2/v_{pz}^2$ e \mathbf{m} corresponde ao vetor de parâmetros: $\mathbf{m} = (t_0, v_{px}, Q)^T$. Note que as aproximações (9) e (10) possuem menos operações aritméticas que a aproximação (39) do artigo de Fomel (2004), obtida da velocidade de grupo *shifted hyperbola*, e não possuem a operação de radiciação.

Estimativa conjunta

Analisamos a situação em que 2500 receptores igualmente espaçados em 10 m registram dados sísmicos, gerados por traçado de raios, provindo de um refletor plano em um meio VTI numa profundidade de 0.6 km . Realizamos a estimativa das componentes do vetor $\mathbf{m} = (t_0, v_{px}, \varepsilon, \delta)^T$ utilizando expressão recursiva no estagio k :

$$\mathbf{m}^{(k+1)} = \mathbf{m}^{(k)} + [\mathbf{G}^{(k)T} \mathbf{G}^{(k)} + \lambda \mathbf{D}_n^T \mathbf{D}_n]^{-1} \mathbf{G}^{(k)T} (\mathbf{t}^{obs} - \mathbf{t}^{(k)}). \quad (11)$$

A aproximação do tempo de reflexão utilizada para gerar a matriz sensibilidade \mathbf{G} nesta equação foi a aproximação (39) do artigo de Fomel (2004). \mathbf{t}^{obs} corresponde aos tempos de reflexão observados, $\mathbf{m}^{(k)}$ é o vetor de

parâmetros do modelo inicial e $t^{(k)}$ são os tempos associados ao modelo inicial. Foram testadas seis amostras com diferentes graus de anisotropia, bem como é apresentado na Tabela 1.

Tabela 1: Velocidades vertical, e parâmetros de anisotropia para diferentes amostras TI: 1 é de Jones e Wang (1981), 2 e 3 são de Wang (2002), 4 e 5 são de Thomsen (1986), e 6 é de Vernik e Liu (1997).

Amostra			
1. Green Horn	3.094	0.256	-0.0505
2. Hard (brine)	3.727	0.252	0.0347
3. North Sea (brine)	2.291	0.195	-0.0139
4. Dog Creek	1.875	0.225	0.0998
5. Mesaverde	3.749	0.128	0.0781
6. North Sea (dry)	3.860	0.240	0.0199

Em cada estimativa foi designado um fator de regularização λ na equação (11). Os resultados deste experimento é apresentado na Fig. 1, esta figura, mostra as porcentagens dos erros dos modelos (e_m) na estimativa do vetor $\mathbf{m} = (t_0, v_{px}, \varepsilon, \delta)$, para todos as simulações de inversão que apresentaram um erro mínimo entre os dados observados e os dados calculados. Ainda na mesma figura é apresentada uma comparação das simulações de inversão utilizando as matrizes da derivada de primeiro e segundo ordem de regularização \mathbf{D}_1 , Fig.1(a), e \mathbf{D}_2 , Fig.1(b), e a matriz identidade \mathbf{I} , Fig.1(c), na equação (11) e diferentes valores de λ . Nos experimentos observamos que o λ ótimo na Figura 1 está associado ao mínimo da curva. Também é percebido que, quando λ assume valores grandes, as curvas de porcentagem do erro dos modelos (e_m) são maiores. Observe que, a estimativa de quatro parâmetros com o método de inversão que utiliza a matriz de regularização identidade (\mathbf{I}) é mais eficiente. Este método mostrou um valor mínimo único nas curvas da Fig. 1, para todas as amostras da Tabela 1, reduzindo assim a ambiguidade mostrada pelos métodos de inversão que utilizam as matrizes de derivadas \mathbf{D}_1 e \mathbf{D}_2 . Nas simulações de inversão foi utilizado um modelo inicial de 50% do modelo verdadeiro e o critério de parada das iterações utilizado foi a equação:

$$e_d = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M [t(\mathbf{m}^{tru}, x_j) - t(\mathbf{m}^{est}, x_j)]^2}{\sum_{j=1}^M [t(\mathbf{m}^{tru}, x_j)]^2}} \times 100\% \approx 0, \quad (12)$$

onde \mathbf{m}^{tru} corresponde ao vetor de parâmetros do modelo real e \mathbf{m}^{est} é o vetor que contém aos parâmetros estimados. Observamos que estimativas razoáveis do vetor \mathbf{m} podem ser obtidas usando como matriz de

regularização uma matriz de zeros $N \times N$ excepto na diagonal, cujos valores correspondem à diagonal de $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$.

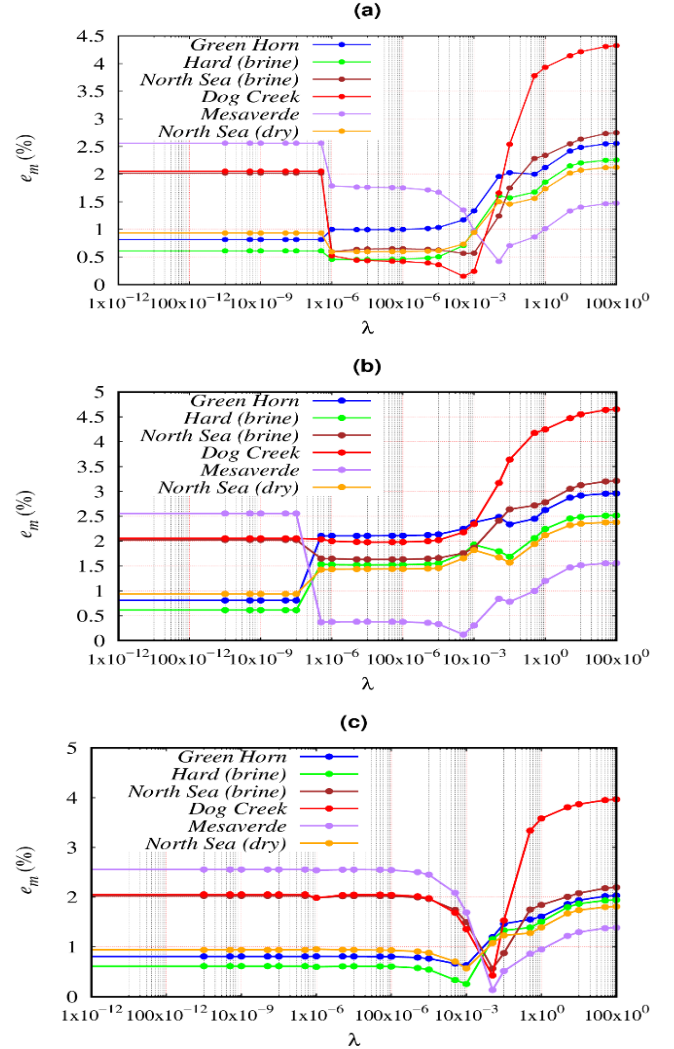


Fig. 1. Porcentagem do erro dos modelos (e_m). Para diferentes valores de λ na estimativa do vetor de parâmetros $\mathbf{m} = (t_0, v_{px}, \varepsilon, \delta)$ utilizando a matriz de regularização: (a) \mathbf{D}_1 , (b) \mathbf{D}_2 , (c) \mathbf{I} .

Algoritmo de inversão por tiro

Propomos obter as distribuições bidimensionais $v_{pz}(x, z)$, $\varepsilon(x, z)$ e $\delta(x, z)$ utilizando um algoritmo de inversão, por tiro, em um meio com multi-camadas VTI. O experimento destas estimativas, proposto, é resumido nas etapas a seguir:

1. Estimativa dos vetores: $\mathbf{m}(T_{0,n}, V_{RMS,n}, \eta_{eff,n})$ e $\mathbf{m} = (T_{0,n}, V_{RMS,n}, \varepsilon_n, \delta_n)$, a partir do dado observado, $t(\mathbf{m}^{tru}, x)$. Em que $T_{0,n}$ é o tempo duplo de trânsito considerando-se afastamento nulo entre fonte e receptor, $V_{RMS,n}$ é a velocidade RMS até a interface n , ε_n e δ_n são

variáveis auxiliares. As estimativas utilizam a regularização com a matriz identidade na equação (11). Nesta etapa é feita uma inversão para cada reflexão obtendo $nr \times nshots$ inversões, onde nr corresponde ao número de refletores do meio e $nshots$ é o número de tiros.

2. Utilizando os parâmetros estimados do vetor $\mathbf{m}(T_{0,n}, V_{RMS,n}, \eta_{eff,n})$ do passo (1) calculamos para cada camada e por tiro: o tempo de zero afastamento intervalar: $t_i = T_{0,n} - T_{0,n-1}$, onde n representa a n -ésima camada; a velocidade NMO intervalar ($v_{pn,i}$) com a equação:

$$v_{pn,i} = \sqrt{\frac{V_{RMS,n}^2 T_{0,n} - V_{RMS,n-1}^2 T_{0,n-1}}{T_{0,n} - T_{0,n-1}}},$$

o parâmetro de anelipticidade intervalar, η_i utilizando a equação de Alkhalifah (1997).

3. Baseados no vetor $\mathbf{m} = (T_{0,n}, V_{RMS,n}, \varepsilon_n, \delta_n)$, do passo (1) deduzimos o valor:

$$v_{pz-RMS,n} = \frac{V_{RMS,n}}{\sqrt{1+2\delta_n}},$$

calculamos a velocidade vertical da onda P intervalar e utilizando a equação:

$$v_{pz,i} = \sqrt{\frac{v_{pz-RMS,n}^2 T_{0,n} - v_{pz-RMS,n-1}^2 T_{0,n-1}}{T_{0,n} - T_{0,n-1}}}.$$

Posteriormente obtemos a espessura de cada camada mediante a expressão:

$$z_i = \frac{v_{pz,i} t_i}{2},$$

onde t_i corresponde ao tempo de zero afastamento intervalar do passo (2).

4. Deduzimos o parâmetro de Thomsen intervalar, δ_i , com os valores intervalares obtidos nas etapas (2) e (3)

$$\delta_i = \frac{1}{2} \left[\frac{v_{pn,i}^2}{v_{pz,i}^2} - 1 \right].$$

5. Deduzimos o parâmetro de Thomsen intervalar, ε_i , com os valores intervalares obtidos nas etapas (2) e (4)

6. Criamos as distribuições bidimensionais da velocidade e dos parâmetros de Thomsen, localizando os valores intervalares correspondentes, acima da posição de profundidade $Z_n = \sum_{i=1}^n z_i$. Nesta parte final do experimento é feita uma extrapolação que conecta os

resultados de um tiro com o resultado do próximo disparo, fazendo uma média das velocidades e dos parâmetros de Thomsen, para formar três distribuições homogêneas (v_{pz} , ε e δ) das camadas.

7. Realizamos a migração em profundidade utilizando as distribuições intervalares: da velocidade v_{pz} e dos parâmetros de Thomsen, deduzidos na etapa (6).

Implementamos as etapas supracitadas usando um modelo sintético de 5 camadas homogêneas cujos valores correspondem às amostras *Dog Creek* para a camada 1, *Green Horn* para a camada 2, *Mesaverde* para a camada 3 e *North sea (dry)* para a camada 4 (veja Tabela, 1). A camada 5 corresponde a uma camada isotrópica com velocidade $v_{pz} = 4.721$ (km/s). A etapa (1) extrai o vetor de parâmetros, \mathbf{m}^{est} , a partir dos tempos observados, $t(\mathbf{m}^{tru}, x)$, utilizando modelos iniciais, $t(\mathbf{m}^{ini}, x)$, a priori de 50% do modelo verdadeiro. Finalmente, realizamos a migração em profundidade usando as distribuições bidimensionais estimadas, a partir dos 5 tiros para o imageamento os dados, a fim, de observar o comportamento destes após sua respectiva migração. Comparamos estes resultados com uma migração isotrópica que utiliza apenas a distribuição de velocidade obtida a partir das análises de velocidade convencional. Conforme à Fig. 2.

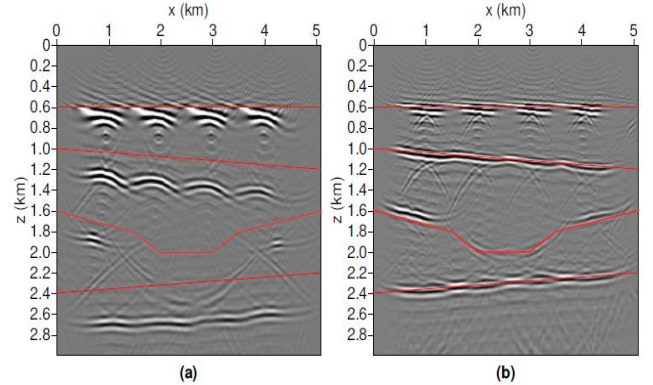


Fig. 2. Migração em profundidade, usando 5 tiros para o imageamento, (a) isotrópica usando a velocidade estimada de maneira convencional, (b) anisotrópica usando as distribuições bidimensionais estimadas as linhas de cor vermelha indicam a posição exata dos refletores.

Observe que a migração isotrópica, correspondente à Fig. 2(a), não corrige a dispersão causada por grandes afastamentos principalmente na primeira camada. Esta camada corresponde à amostra *Dog Creek*. Já para a migração anisotrópica, ou Fig. 2(b), que inclui as distribuições bidimensionais estimadas da velocidade e os parâmetros de Thomsen, o efeito de sobretempo de grandes afastamentos é corrigido, mas dificilmente é

possível o imageamento do canal da terceira camada. Esta camada corresponde à amostra *Mesaverde*. Mas o mais relevante nesta figura é a posição em que as interfaces estão localizadas. Note que na migração isotrópica, a posição dos refletores está errada e este erro aumenta com a profundidade. Isso é causado porque foi utilizada a velocidade *NMO* intervalar (velocidade comumente usada no processamento sísmico) em vez da velocidade vertical da onda *P*.

Conclusões

Diferentes fórmulas para aproximar o tempo de reflexão para grandes afastamentos foram encontradas na literatura. A maioria destas tem expressões algébricas bastante complicadas que são difíceis de usar. Nossas comparações numéricas mostram que é possível encontrar fórmulas para o tempo de reflexão muito mais simples que proporcionam igual ou até melhor precisão para aproximações do verdadeiro tempo de reflexão do que os propostos na literatura.

A precisão na estimativa dos parâmetros de anisotropia não depende unicamente da correta extração dos tempos de trânsito dos dados, mas também, do valor de $(\varepsilon - \delta)$. Quanto menor for este valor, maior é a precisão da estimativa com o método de MMQ regularizado.

A estimativa conjunta da velocidade intervalar da onda *P* e os parâmetros de Thomsen requer uma regularização específica para cada camada, pois sem essa regularização é impossível fazer uma estimativa com o método determinístico. Desta forma, será também impossível construir distribuições bidimensionais da velocidade da onda *P* e dos parâmetros de Thomsen que permitem migrar dados sísmicos anisotrópicos em profundidade.

Do ponto de vista computacional, o algoritmo de inversão desenvolvido não é custoso na medida em que as matrizes envolvidas são de pequeno porte. Os desafios principais da técnica de inversão estudada, no entanto, são: a sua sensibilidade aos erros na estimativa dos parâmetros de Thomsen comprometendo a etapa de migração em profundidade; e a extração dos tempos de reflexão dos sismogramas no domínio do tiro.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq (INCT-Geofísica de Petróleo), à FINEP (Rede CT-PETRO em Geofísica de Exploração) pelo financiamento e apoio à pesquisa. Francisco Gamboa Ortega agradece à CAPES pela bolsa de doutorado e ao projeto RC 0266 cofinanciado pela

Colciencias-Ecopetrol da Universidade de Pamplona, Norte Santander Colômbia.

Referências

- Aleixo, R. e Schleicher, J. (2010) - Travelttime approximations for q-p waves in vertical transversely isotropy media, *Geophysical Prospecting*, Vol. **58**: 191-201.
- Alkhalifah, T. (1997) - Velocity analysis using nonhyperbolic moveout in transversely isotropic media, *Geophysics*, Vol. **62**, No. 2: 1839-1854.
- Alkhalifah, T. e Tsvankin, I. (1995) - Velocity analysis for transversely isotropic media, *Geophysics*, Vol. **60**, No. 5: 1550-1566.
- Alkhalifah, T. e Tsvankin, I. (1998) - Acoustic approximations for processing in transversely isotropic media, *Geophysics*, Vol. **63**, No. 2: 623-631.
- Dellinger, J.; Muir, F. e Karrenbach, M. (1993) - Anelliptic approximations for TI media, *Journal of Seismic Exploration*, Vol. **2**: 23-40.
- Fomel, S. (2004) - On anelliptic approximations for velocities in VTI media, *Geophysics*, Vol. **52**: 247-259.
- Fowler, P. (2003) - Practical VTI approximations: a systematic anatomy, *Journal of Applied Geophysics*, Vol. **54**: 347-367.
- Jones, L. E. e Wang, H. F. (1981) - Ultrasonic velocities in cretaceous shales from the williston basing, *Geophysics*, Vol. **46**, No. 3: 288-297.
- Pereira, R.; Cruz, J. C. e Protazio, J. (2015) - Anelliptic rational approximations of travelttime P-wave reflections in VTI media, In: Resumos Expandidos, 14o. Congr. Intern. da SBGf, Vol. **14**, pp. 945-949, Rio de Janeiro, SBGf.
- Thomsen, L. (1986) - Weak elastic anisotropy, *Geophysics*, Vol. **51**, No. 10: 1954-1966.
- Vernik, L., and X. Liu, 1997, Velocity anisotropy in shales: A petrophysical study: *Geophysics*, Vol. **62**, 521-532.
- Wang, Z., 2002, Seismic anisotropy in sedimentary rocks, Part 2: Laboratory data: *Geophysics*, Vol. **67**, 1423-1440.

Anexos

Aproximantes de Padé [1/1] e [2/2] para a velocidade de fase em um meio VTI.

Note que a equação (1) tem a forma:

$$f(\alpha) = xs + s \sqrt{x^2 + \frac{2\alpha}{s}},$$

onde $x = v_e^2(\theta)$, $s = 1/2$, $\alpha = (v_{p1}^2 v_{p2}^2 v_{pz}^2 v_{px}^2) \sin^2 2\theta$.
Expandindo esta função em série de Taylor:

$$f(\alpha) \approx c_0 + c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + c_3 \alpha^3 + c_4 \alpha^4,$$

em que

$$\begin{aligned}c_0 &= f(0) &= x; \\c_1 &= \frac{f^{(1)}(\alpha)}{1!} \Big|_{\alpha=0} &= \frac{1}{x}; \\c_2 &= \frac{f^{(2)}(\alpha)}{2!} \Big|_{\alpha=0} &= -\frac{1}{sx^3}; \\c_3 &= \frac{f^{(3)}(\alpha)}{3!} \Big|_{\alpha=0} &= \frac{1}{2s^2x^5}; \\c_4 &= \frac{f^{(4)}(\alpha)}{4!} \Big|_{\alpha=0} &= -\frac{5}{8s^3x^7}.\end{aligned}$$

Os coeficientes p_0 , p_1 e q_1 para o aproximante são obtidos do seguinte sistema equações

$$\begin{aligned}c_0 &= p_0 \\c_0q_1 + c_1 &= p_1 \\c_2q_1 + c_3 &= 0.\end{aligned} \quad (A1)$$

Resolvendo o sistema de equações (A1): $q_1 = \frac{1}{sx^2}$ e $p_1 = \frac{s+1}{sx}$. Substituindo esses valores na expressão de Padé $f(\alpha)[1/1]$ obtemos:

$$\begin{aligned}f(\alpha) \left[\frac{1}{1} \right] &\approx \frac{p_0 + p_1\alpha}{1 + q_1\alpha} = \frac{x + \frac{s+1}{sx}\alpha}{1 + \frac{1}{sx^2}\alpha} \\&= x \left[1 + \frac{s\alpha}{sx^2 + \alpha} \right].\end{aligned}$$

Os coeficientes p_0 , p_1 , p_2 , q_1 e q_2 para o aproximante Padé [2/2] são obtidos do seguinte sistema equações

$$\begin{aligned}c_0 &= p_0 \\c_0q_1 + c_1 &= p_1 \\c_0q_2 + c_1q_1 + c_2 &= p_2 \\c_1q_2 + c_2q_1 + c_3 &= 0.\end{aligned} \quad (A2)$$

Resolvendo o sistema de equações (A2): $q_1 = \frac{3}{2sx^2}$, $q_2 = \frac{1}{4s^2x^4}$, $p_1 = \frac{3+2s}{2sx^2}$ e $p_2 = \frac{1+4s}{4s^2x^3}$. Substituindo esses valores na expressão de Padé $f(\alpha)[2/2]$ obtemos:

$$\begin{aligned}f(\alpha)[2/2] &\approx \frac{p_0 + p_1\alpha + p_2\alpha^2}{1 + q_1\alpha + q_2\alpha^2} = \frac{x + \frac{3+2s}{2sx^2}\alpha + \frac{1+4s}{4s^2x^3}\alpha^2}{1 + \frac{3}{2sx^2}\alpha + \frac{1}{4s^2x^4}\alpha^2} \\&= x \left[1 + \frac{4s^2x^2\alpha + 4s\alpha^2}{4s^2x^4 + 6sx^2\alpha + \alpha^2} \right].\end{aligned}$$