



Inversão gravimétrica 3D eficiente e estável do relevo do embasamento suave estabilizada através do funcional regularizador de Tikhonov de primeira ordem

Daniele Pantoja Monteiro^{*1}, Darciléa Ferreira Santos² e João Batista Corrêa da Silva²

¹Universidade Federal do Pará (UFPA)

²Universidade Federal do Pará (UFPA), INCT-GP

Copyright 2023, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation during the 18th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, 16-19 October 2023.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 18th International Congress of the Brazilian Geophysical Society and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

We present an efficient and stable 3D gravity inversion method to delineate the smooth basement relief of sedimentary basins. The proposed method employs the extension of Bott's method, stabilizing the solution through the first-order Tikhonov regularization functional. The proposed method employs approximations of the gradient vector and Hessian matrix, which produce sparse matrices associated with linear systems, substantially reducing the computational time required along the iterative process. The application of the proposed methodology to synthetic and real data from the Chintalapudi sub-basin attests to the method's efficacy.

Introdução

Métodos de interpretação gravimétrica são eficazes em auxiliar o mapeamento do arcabouço estrutural de bacias sedimentares (Silva et al., 2006; Barbosa et al., 2007). As metodologias de interpretação gravimétrica geralmente utilizam técnicas de inversão não linear que, comumente, são empregadas para estimar a profundidade do topo do embasamento de bacias sedimentares através de dados gravimétricos (Barbosa et al., 1997; Martins et al., 2010; Martins et al., 2011).

Uma maneira de resolver o problema de inversão não linear é através de métodos iterativos, como o método de Gauss-Newton. Este método, produz soluções de problemas de inversão não lineares, resolvendo um sistema linear em cada iteração, cuja matriz associada a tal sistema é densa e apresenta dimensão definida pelo número de parâmetros (Barbosa et al., 1997; Capriotti e Li, 2015; Chakravarthi e Sundararajan, 2007; Silva et al., 2006; Martins et al., 2010). Consequentemente, este método exigirá um elevado tempo computacional para obter a solução do problema não linear que crescerá com o aumento do número de observações e/ou de parâmetros.

Metodologias que modificam o método de Gauss-Newton, como o método proposto por Silva et al. (2014), reduz o tempo computacional produzindo estimativas da profundidade de prismas 3D através da aproximação da

matriz Jacobiana por uma matriz diagonal variante durante o processo iterativo. A estabilização das soluções do método de Silva et al. (2014) é obtida aplicando um filtro passa-baixa após as estimativas das profundidades. Uieda e Barbosa (2017) reduzem o tempo de cálculo das estimativas da profundidade da descontinuidade de Mohorovicic (Moho) na América do Sul por meio da modificação do método proposto por Silva et al. (2014), estabilizando a solução utilizando o regularizador de Tikhonov de ordem um, porém, aplicando uma aproximação invariante da matriz Jacobiana diagonal durante todas as iterações.

Neste trabalho, apresentamos um método de inversão 3D, que emprega a metodologia de Silva et al. (2014), para interpretação de dados gravimétricos de bacias sedimentares que apresentam relevo do embasamento suave. Similarmente ao método de Silva et al. (2014), utilizamos o modelo interpretativo de um conjunto de prismas retangulares justapostos e a aproximação da matriz Jacobiana diagonal variante. Porém, ao invés de aplicar a proposta de Silva et al. (2014) para estabilizar a solução do problema inverso, empregamos o funcional regularizador de Tikhonov de ordem um, proposto por Uieda e Barbosa (2017). No método proposto a matriz associada a cada sistema linear é esparsa, portanto, produzimos as estimativas dos parâmetros estabilizados empregando algoritmos para solução de sistemas lineares esparsos (Paige e Saunders, 1982) em cada iteração do procedimento de Gauss-Newton.

Avaliamos a eficácia do método proposto através de testes com dados sintéticos devidos a um ambiente geológico que simula o cenário geológico real. Aplicamos o método a dados reais da sub-bacia Chintalapudi, localizada na Índia, produzindo uma estimativa da profundidade máxima da bacia de 3,69 km, coerente com as informações geológicas disponíveis.

Metodologia

Modelo interpretativo

Seja \mathbf{g}^0 o vetor N -dimensional contendo um conjunto de observações gravimétricas devido a uma bacia sedimentar. As observações gravimétricas estão regularmente equidistantes entre si no plano xy (pontos pretos na Figura 1a). Considere que tal bacia apresenta topografia do embasamento S suave cujo contraste de densidade dos sedimentos, em relação ao embasamento, é variável com a profundidade de acordo com a lei parabólica (Chakravarthi e Sundararajan, 2004)

$$\Delta\rho(z) = \frac{\Delta\rho_0^3}{(\Delta\rho_0 - \alpha z)^2}, \quad (1)$$

em que $\Delta\rho_0$ é o contraste de densidade na superfície da Terra expresso em g/cm^3 , z é a profundidade expresso em km e α é um escalar que controla a taxa de diminuição do contraste de densidade com a profundidade expresso em unidades $\text{g/cm}^3/\text{km}$.

Estimamos a superfície do relevo do embasamento aproximando o arcabouço estrutural da bacia sedimentar através de um modelo interpretativo formado por um conjunto de $N = M_x \times M_y$ prismas retos retangulares 3D horizontalmente justapostos referido a um sistema de coordenadas cartesianas no espaço Euclidiano, em que M_x e M_y são respectivamente os números de prismas distribuídos ao longo do eixo x e do eixo y . O i -ésimo prisma 3D (Figura 1b) apresenta contraste de densidade $\Delta\rho(z)$, conhecido, entre os sedimentos e o embasamento da bacia sedimentar; topo localizado na superfície terrestre; coordenada (x_i, y_i) do centro do prisma coincidente com a coordenada da i -ésima observação g_i^0 (Figura 1a); extensão vertical (espessura) p_j e extensões horizontais constantes Δx e Δy ao longo das direções x e y , respectivamente.

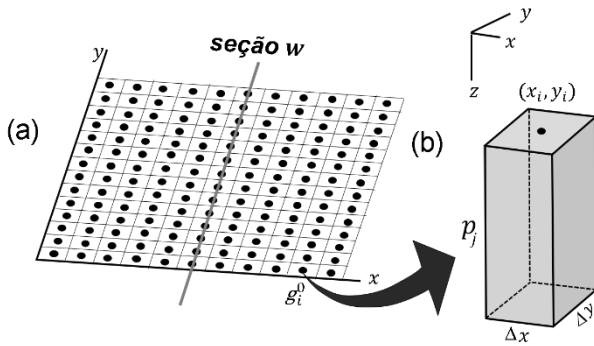


Figura 1 - (a) Os pontos pretos são as observações gravimétricas interpoladas em posições equidistantes entre si no plano xy e a linha cinza é a localização de uma seção w hipotética (Figura 2). (b) Prisma reto 3D, que compõe o modelo interpretativo, localizado na posição (x_i, y_i) , de espessura p_j e de dimensões horizontais Δx e Δy .

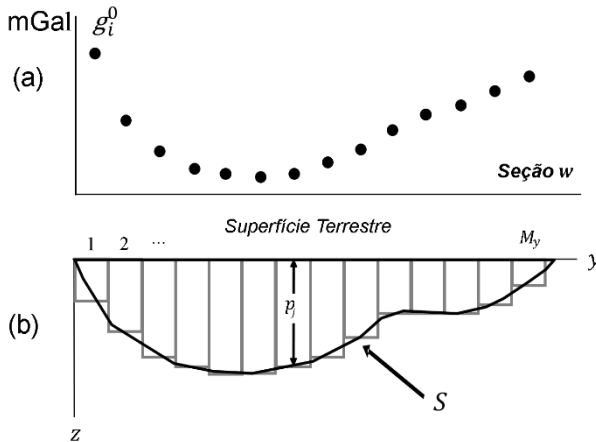


Figura 2 - Representação esquemática das (a) observações gravimétricas g_i^0 da seção w (b) do relevo do embasamento S e do modelo interpretativo formado por um conjunto de M_y prismas.

As espessuras dos prismas, p_j , definem localmente a profundidade do topo do embasamento e são os parâmetros a serem estimados. A observação gravimétrica teórica g_i , calculada no i -ésimo ponto de observação (x_i, y_i) , está relacionada à espessura p_j do j -ésimo prisma 3D através da relação

$$\mathbf{g} \equiv g_i = \sum_{j=1}^N F_p(p_j, \Delta\rho(z)), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2)$$

em que a função não linear $F_p(p_j, \Delta\rho(z))$ computa as observações gravimétricas teóricas do vetor \mathbf{g} , devidas ao conjunto de prismas 3D de espessuras p_j e contrastes de densidade $\Delta\rho(z)$. Neste trabalho, $F_p(p_j, \Delta\rho(z))$ (expressão 2) é definida por Chakravarthi e Sundararajan (2004) para ambientes geológicos que apresentam contraste de densidade variável com a profundidade.

Estimativa do vetor solução $\hat{\mathbf{p}}$

Propomos produzir a solução $\hat{\mathbf{p}}^k$ através da extensão do método de Bott (Silva et al., 2014) estabilizada por meio do funcional regularizador de Tikhonov de primeira ordem (Tikhonov e Arsenin, 1977). As N estimativas das espessuras $\hat{\mathbf{p}}$ são obtidas aplicando a estimativa inicial $\hat{\mathbf{p}}^k$ a atualização

$$\hat{\mathbf{p}}^{k+1} = \hat{\mathbf{p}}^k + \Delta\hat{\mathbf{p}}^k, \quad (3)$$

cujos vetor-correção $\Delta\hat{\mathbf{p}}^k$ na k -ésima iteração é

$$\Delta\hat{\mathbf{p}}^k = (\mathbf{H}^k)^{-1}\mathbf{J}^k. \quad (4)$$

Propomos aproximar a matriz Hessiana geral de dimensão $N \times N$ por

$$\mathbf{H}^k = b^k \mathbf{I} + \mu \mathbf{R}^T \mathbf{R}, \quad (5)$$

e o vetor gradiente geral N -dimensional por

$$\mathbf{J}^k = \Delta\mathbf{g}^k - \mu \mathbf{R}^T \mathbf{R} \hat{\mathbf{p}}^k, \quad (6)$$

em que o sobrescrito T indica transposição matricial, $\Delta\mathbf{g}^k$ é o vetor do resíduo gravimétrico definido pela diferença entre os vetores \mathbf{g}^0 e \mathbf{g} avaliado em $\hat{\mathbf{p}}^k$, \mathbf{I} é a matriz identidade N -dimensional e \mathbf{R} é uma matriz $L \times N$ de diferenças finitas, em que L é o número de pares de parâmetros espacialmente adjacentes, dados por $M_x \times (M_y - 1) + M_y (M_x - 1)$. A i -ésima linha de \mathbf{R} contém apenas dois elementos não nulos iguais a 1 e -1 localizados nas colunas correspondentes aos parâmetros adjacentes. O escalar μ é o parâmetro de regularização controlado pelo intérprete para gerar estimativas suaves e b^k é um escalar positivo modificado a cada k -ésima iteração, conforme descrito por Silva et al. (2014).

O vetor-correção $\Delta\hat{\mathbf{p}}^k$ é produzido resolvendo em cada iteração k o sistema linear por meio do método iterativo Least Square Regression - LSQR (Paige e Saunders, 1982) amplamente utilizado quando a matriz dos coeficientes de sistemas lineares é esparsa. Entre as vantagens na utilização do LSQR citamos o requisito mínimo de memória da CPU e a bidiagonalização de Lanczos.

O processo iterativo do método é interrompido quando a raiz do valor quadrático médio (RMS) do resíduo na F -ésima iteração satisfaz a condição

$$\sigma \equiv \left| \left[\frac{\sum_{i=1}^N (g_i^0 - g_i^{F-1})^2}{N} \right]^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{\sum_{i=1}^N (g_i^0 - g_i^F)^2}{N} \right]^{\frac{1}{2}} \right| \leq \varepsilon, \quad (7)$$

sendo g_i^{F-1} e g_i^F as observações gravimétricas teóricas na $(F-1)$ -ésima e F -ésima iteração, respectivamente. O escalar ε é um valor pequeno definido pelo intérprete, e presumido neste trabalho, de 0,01 mGal.

O desempenho do método proposto e a estabilização das soluções são controladas pelas variáveis b , r_1 , r_2 e μ , que são variáveis livres e devem ser eleitas pelo intérprete para cada ambiente geológico. Elegemos as variáveis livres preestabelecendo intervalos para b , r_1 , r_2 e μ tal que $b \in [0,01, 20]$, $r_1 \in [0,01, 1]$, $r_2 \in [0,1, 1]$ e $\mu \in [0,001, 8]$. A seguir, aplicamos o método proposto a dados sintéticos de um mesmo ambiente geológico hipotético, fixando inicialmente μ igual a 0,001 e alterando simultaneamente b , r_1 e r_2 obedecendo o intervalo proposto para cada parâmetro (Silva et al., 2014). Os valores eleitos de b , r_1 e r_2 são os que produziram soluções com o menor σ (equação 7). Para eleição de μ , geramos vinte conjuntos de observações gravimétricas através da adição de vinte sequências distintas de ruído pseudoaleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal aos dados gravimétricos livres de ruído (Silva et al., 2020). Avaliamos cada solução e elegemos o menor valor de μ que estabiliza as estimativas das profundidades.

Resultados

Aplicação a dados sintéticos

Computamos um conjunto de 5459 dados gravimétricos (Figura 3a) livres de ruído, regularmente espaçados de 2 km devido a uma bacia (Figura 3b) que simula o cenário geológico real. Tal bacia simulada é constituída por um conjunto de 103 prismas justapostos ao longo do eixo x e de 53 prismas justapostos ao longo do eixo y . As coordenadas horizontais dos centros dos prismas coincidem com a localização espacial das observações. Todos os prismas apresentam as mesmas dimensões horizontais de 2 km, topos na superfície e contraste de densidade variável com a profundidade de acordo com a lei parabólica (equação 1), com $\Delta\rho_0 = -0,45 \text{ g/cm}^3$ e $\alpha = 0,18 \text{ g/cm}^3/\text{km}$, cujas espessuras representam as profundidades do relevo do embasamento.

Para estimar o relevo do embasamento: (i) adicionamos ruído pseudoaleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal aos dados gravimétricos livres de ruído (Figura 3a) e (ii) empregamos um modelo interpretativo, cujos prismas apresentam as mesmas dimensões horizontais e localizações horizontais dos prismas que geram as observações sintéticas. Aplicando o método proposto com as variáveis livres eleitas $b = 0,08$, $r_1 = 0,9$, $r_2 = 0,2$ e $\mu = 0,8$ produzimos o relevo do embasamento estimado mostrado na Figura 4b. A anomalia gravimétrica ajustada (Figura 4a) produziu RMS do ajuste dos dados de 0,07 mGal. A diferença entre a

anomalia observada com adição de ruído e a ajustada apresenta valores mínimos e máximos de -0,2 mGal e de 0,28 mGal (Figura 5a). A diferença máxima do erro entre as profundidades verdadeiras (Figura 3b) e as estimadas é 0,09 km (Figura 5b). A Figura 6a apresenta o ajuste entre as anomalias gravimétricas devidas aos relevos do embasamento verdadeiro (linha preta na Figura 6b) e estimado (linha tracejada vermelha na Figura 6b) ao longo do perfil A-A' (Figura 4a). Para o ambiente simulado estimamos a profundidade máxima de 3,97 km, comprovando a eficácia do método proposto para delinear a topografia do embasamento, produzindo ajustes aceitáveis aos dados gravimétricos.

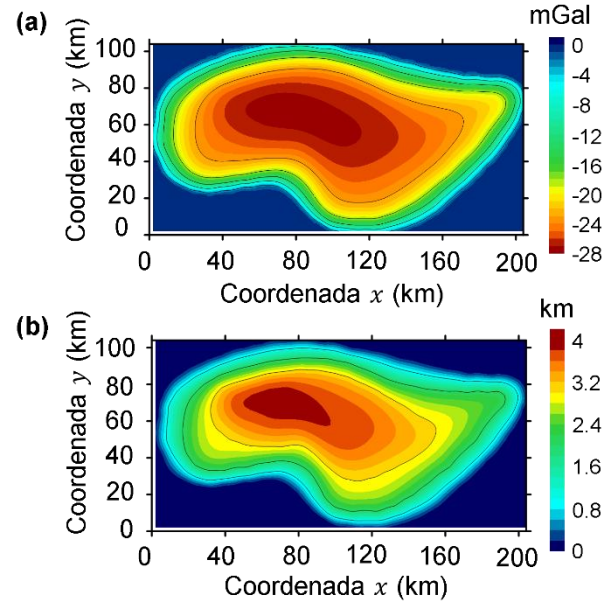


Figura 3 - (a) Anomalia gravimétrica livre de ruído pseudoaleatório Gaussiano devida ao relevo do embasamento (b).

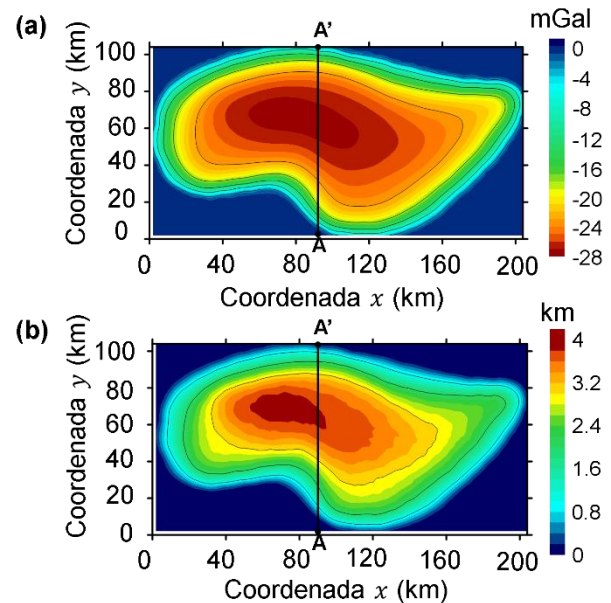


Figura 4 - (a) Anomalia gravimétrica ajustada devida ao relevo do embasamento estimado (b).

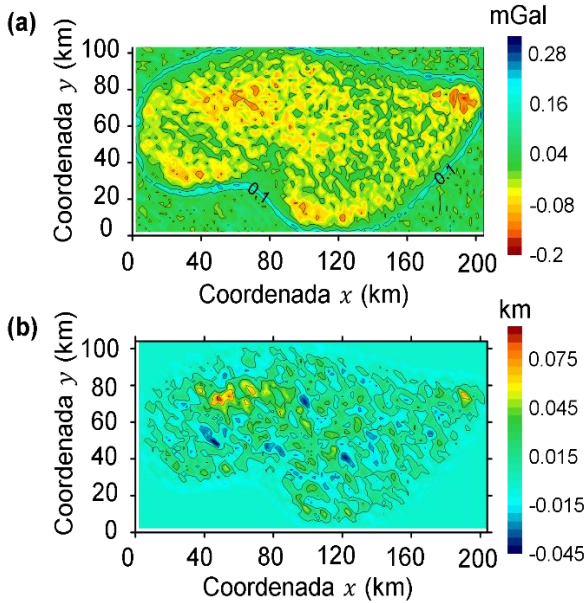


Figura 5 - (a) Diferença entre as anomalias observada contaminada com ruído pseudoaleatório Gaussiano e ajustada (Figura 4a). (b) Diferença entre o relevo verdadeiro (Figura 3b) e estimado (Figura 4b).

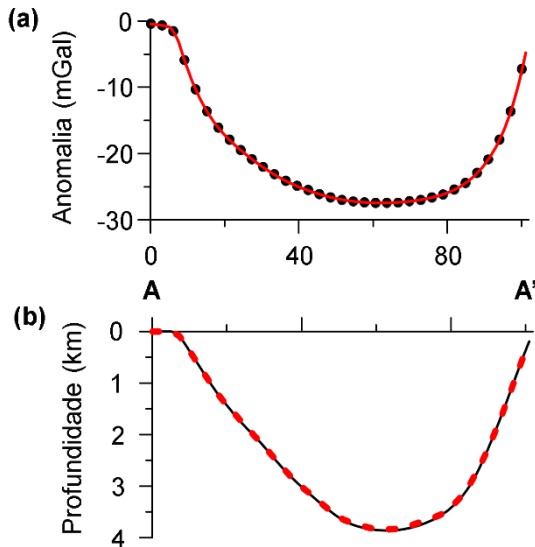


Figura 6 - (a) Anomalia gravimétrica (pontos pretos) e ajustada (linha vermelha) ao longo do perfil A-A' (Figura 4a). (b) Relevos do embasamento verdadeiro (linha preta) e estimado (linha tracejada vermelha) ao longo do perfil A-A' (Figura 4b).

Aplicação a dados reais

Aplicamos a metodologia proposta a dados gravimétricos digitalizados da sub-bacia Chintalapudi localizada nos distritos de Khammam a Oeste de Godavari em Andhra Pradesh, Índia. Esta sub-bacia apresenta a geometria de um graben com rift tectônico bem desenvolvido (Bhaskar Rao et al., 1971) que abrange uma área de 2500 km². Tal sub-bacia limita-se a NW pela sub-bacia de Kothagudem e ao SE pela Bacia costeira de Krishna-Godavari do

Mesozóico Superior-Terciário (Figura 7). Seu desenvolvimento está relacionado a zonas de enfraquecimento na crosta que podem terem sido reativadas no Permiano (Bastia, 2006). Os lineamentos estão ao longo das direções NE-SW, E-W e NW-SE (Lakshmi, 2012). O preenchimento da sub-bacia compreende as formações litoestratigráficas, Talchir, Barakar, Maleri, Kota e Gangapur. O embasamento cristalino é formado por gnaisses arqueanos, granito e xisto. O topo do embasamento está a uma profundidade de 2,935 km (Agarwal, 1995). Atualmente, a sub-bacia Chintalapudi é uma das maiores bacias produtoras de carvão do Gondwana na Índia.

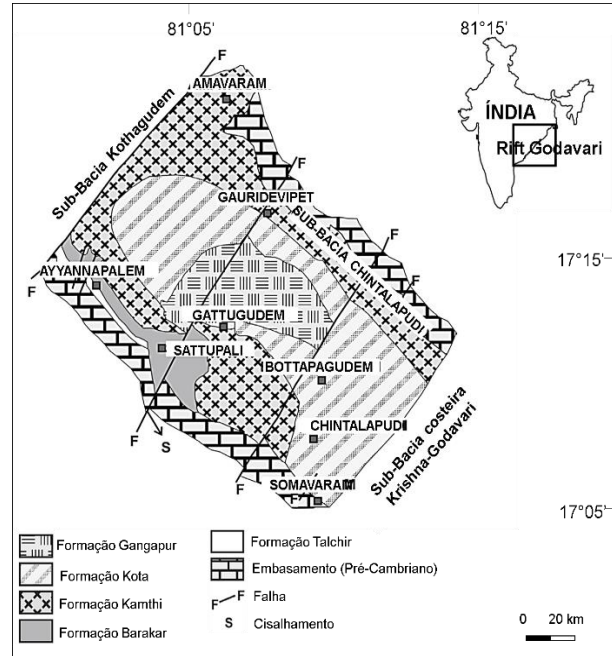


Figura 7 - Mapa geológico da sub-bacia Chintalapudi (Modificado de Jha et al., 2018).

A Figura 8a apresenta um conjunto de 2501 dados gravimétricos digitalizados da sub-bacia Chintalapudi. Aplicamos o método proposto aos dados gravimétricos empregando um modelo interpretativo constituído por 61 prismas justapostos ao longo do eixo *x* e 41 prismas justapostos ao longo do eixo *y*. Todos os prismas apresentam dimensões horizontais de 1 km e contraste de densidade variável com a profundidade de acordo com a lei parabólica, com $\Delta\rho_0 = -0,5 \text{ g/cm}^3$ e fator de decaimento $\alpha = 0,1711 \text{ g/cm}^3/\text{km}$ (Chakravarthi, 2003; Silva et al., 2014; Silva e Santos, 2017).

Produzimos o relevo do embasamento estimado (Figura 8b) utilizando as variáveis livres $b = 0,08$, $r_1 = 0,9$, $r_2 = 0,2$ e $\mu = 0,8$ (eleitas através dos testes com dados sintéticos). O relevo do embasamento estimado apresenta profundidade máxima de aproximadamente 3,69 km, coerente com as informações geológicas e geofísicas disponíveis (Bastia et al., 2010; Chakravarthi e Sundararajan, 2007). Na Figura 8b, observamos a estrutura de um graben, com a ocorrência de três sub-bacias, que podem terem sido originadas por reativação da zona Nordeste-Sudoeste. A anomalia gravimétrica teórica correspondente (Figura 8c) produziu RMS do

ajuste dos dados de 0,14 mGal. O valor absoluto entre a subtração dos dados gravimétricos observados (Figura 8a) e ajustados apresenta mínimo e máximo valores de -1,4 mGal e de 0,7 mGal (Figura 9). A Figura 10a apresenta o ajuste entre as anomalias gravimétricas, cuja anomalia ajustada é devida ao relevo do embasamento estimado (linha vermelha na Figura 10b) ao longo do perfil A-A' (Figura 8a). A Figura 11 apresenta a vista em perspectiva das profundidades estimadas do relevo do embasamento da sub-bacia Chintalapudi.

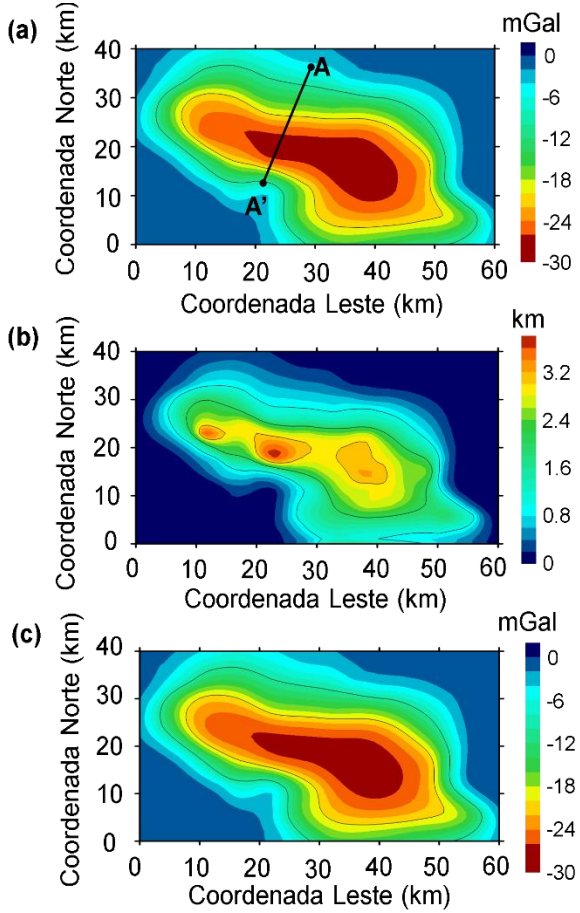


Figura 8 - Sub-bacia Chintalapudi. (a) Anomalia gravimétrica. (b) Relevo do embasamento estimado. (c) Anomalia gravimétrica ajustada.

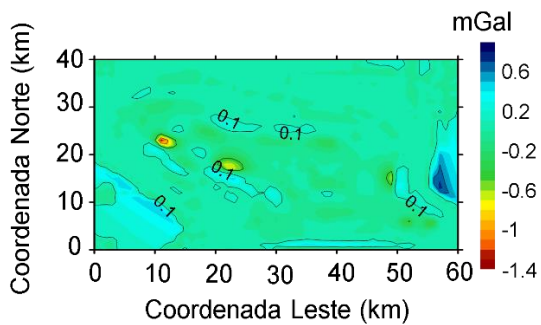


Figura 9 - Diferença entre as anomalias observada (Figura 8a) e ajustada (Figura 8c).

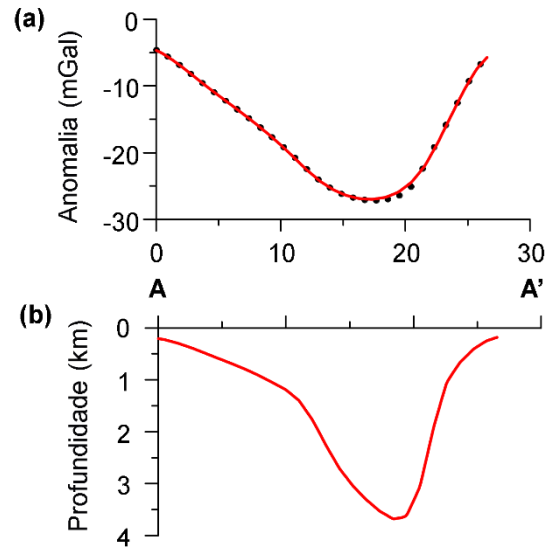


Figura 10 - (a) Anomalia gravimétrica (pontos pretos) e ajustada (linha vermelha) ao longo do perfil A-A' (Figura 8a). (b) Relevo estimado (linha vermelha) ao longo do perfil A-A'.

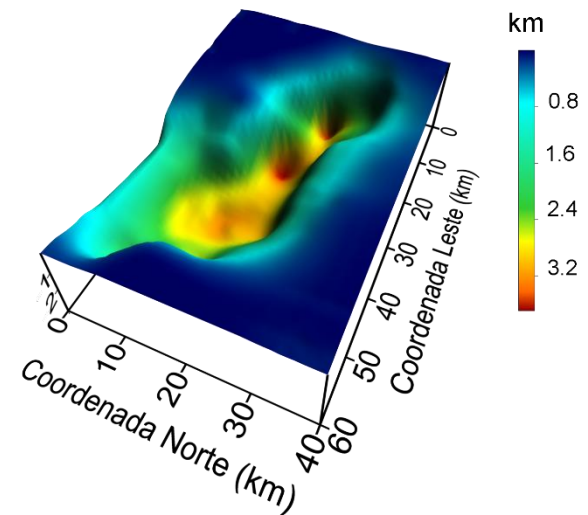


Figura 11 - Relevo do embasamento estimado da sub-bacia Chintalapudi produzido pelo método proposto.

Conclusão

Apresentamos um método de inversão 3D eficiente para estimar o relevo do embasamento suave de bacias sedimentares, estabilizado através do funcional regularizador de Tikhonov de primeira ordem. A eficiência do método é devida ao uso de aproximações do vetor gradiente e da matriz Hessiana, produzindo sistemas lineares cujas matrizes associadas são esparsas, para produção do vetor-correção.

Analisamos a eficiência do método proposto por meio de testes com dados gravimétricos sintéticos devidos a um ambiente geológico representativo da área de estudo. O método proposto foi aplicado a dados reais da Sub-bacia

Chintalapudi, localizada na Índia, cujas estimativas das profundidades produzem um relevo estimado e uma profundidade máxima de 3,69 km, coerentes com as informações geológicas disponíveis. Os resultados dos dados sintéticos e reais comprovam a eficácia do método proposto para delinear a topografia do embasamento suave de bacias sedimentares.

A metodologia proposta pode ser adaptada para ser aplicada a outros ambientes geológicos. Por exemplo, podemos adaptar o método proposto para utilizar o funcional da variação total para a interpretação de dados gravimétricos de bacias marginais ou interiores cujos embasamentos apresentem falhas de alto ângulo e/ou grandes rejeitos.

Referências

- AGARWAL, B. P., 1995. Hydrocarbon prospects of the Pranhita-Godavari graben, India. **Proc. Petrotech**, v. 95, p. 115-121.
- BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E., 1997. Gravity inversion of basement relief using approximate equality constraints on depths. **Geophysics**, v. 62, n. 6, p. 1745-1757.
- BASTIA, R., 2006. An overview of Indian sedimentary basins with special focus on emerging east coast deepwater frontiers. **The Leading Edge**, v. 25, n. 7, p. 818-829.
- BASTIA, R. et al., 2010. Structural and tectonic interpretation of geophysical data along the Eastern Continental Margin of India with special reference to the deep water petroliferous basins. **Journal of Asian Earth Sciences**, v. 39, n. 6, p. 608-619.
- BHASKAR RAO, V.; MURTHY, V. S. N.; VENKATESWARLU, P. D., 1971. Gravity anomalies and tectonics on a part of Lower Gondwana Basin. In: **Symposium on Gondwana Systems, Aligarh Muslim University**. p. 148-156.
- BARBOSA, V. C. F.; MENEZES, P. T. L.; SILVA, J. B. C., 2007. Gravity data as a tool for detecting faults: In-depth enhancement of subtle Almada's basement faults, Brazil. **Geophysics**, v. 72, n. 3, p. B59-B68.
- CAPRIOTTI, J. and LI, Y., 2015. Inversion for permeability distribution from time-lapse gravity data. **Geophysics**, v. 80, n. 2, p. WA69-WA83.
- CHAKRAVARTHI, V., 2003. Digitally implemented method for automatic optimization of gravity fields obtained from three-dimensional density interfaces using depth dependent density. U.S. Patent n. 6,615,139.
- CHAKRAVARTHI, V. and SUNDARARAJAN, N., 2004. Automatic 3-D gravity modeling of sedimentary basins with density contrast varying parabolically with depth. **Computers & geosciences**, v. 30, n. 6, p. 601-607.
- CHAKRAVARTHI, V. and SUNDARARAJAN, N., 2007. 3D gravity inversion of basement relief - A depth-dependent density approach. **Geophysics**, v.72, no. 2, 123-132.
- LAKSHMI, V. N., 2012. Structural mapping and analysis using remote sensing data at Chintalapudi sub-basin, Godavari Graben. **Geological Society of India**, v. 80, n. 1, p. 142-144.
- MARTINS, C. M.; BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C., 2010. Simultaneous 3D depth-to-basement and density-contrast estimates using gravity data and depth control at few points. **Geophysics**, v. 75, n. 3, p. I21-I28.
- MARTINS, C. M.; LIMA, W. A.; BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C., 2011. Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 1 – mathematical details and applications. **Geophysics**, v. 76, n. 1, p. I1-I12.
- JHA, N.; AGGARWAL, N.; MISHRA, S., 2018. A review of the palynostratigraphy of Gondwana sediments from the Godavari Graben, India: Global comparison and correlation of the Permian-Triassic palynoflora. **Journal of Asian Earth Sciences**, v. 163, p. 1-21.
- PAIGE, C. C. and SAUNDERS, M. A., 1982. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, v. 8, n. 1, p. 43-71.
- SILVA, J. B. C.; COSTA, D. C.; BARBOSA, V. C., 2006. Gravity inversion of basement relief and estimation of density contrast variation with depth. **Geophysics**, v. 71, n. 5, p. J51-J58.
- SILVA, J. B. C.; SANTOS, D. F.; GOMES, K. P., 2014. Fast gravity inversion of basement relief. **Geophysics**, v. 79, n. 5, p. G79-G91.
- SILVA, J. B. C.; SANTOS, D. F., 2017. Efficient gravity inversion of basement relief using a versatile modeling algorithm. **Geophysics**, v. 82, n. 2, p. G23-G34.
- SILVA, J. B. C.; SANTOS, D. F.; MONTEIRO, D. P., 2020. Estimating free parameters in 2D inversion: example of gravity inversion in a rifted basement. **Geophysical Prospecting**, v. 68, n. 3, p. 1057-1071.
- TIKHONOV, A. N. and ARSENIN, V. Y., 1977. Solutions of ill-posed problems. In: JOHN, F. (ed.). **Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society**, New York: Wiley, xiii + 258 p. v. 1, p. 30.
- UIEDA, L.; BARBOSA, V. C. F., 2017. Fast nonlinear gravity inversion in spherical coordinates with application to the South American Moho. **Geophysical Journal International**, v. 208, n. 1, p. 162-176.