SBGF0302

Inferência Bayesiana de Porosidade em Poços

Luiz Geraldo Lucchesi Loures

Fernando Sergio Moraes

Universidade Estadual do Norte Fluminense

Resumo

A resposta da maior parte dos perfis de poço está condicionada aos valores de porosidade, com variações dependentes do princípio físico do método de perfilagem e da sensibilidade e raio de investigação da ferramenta. Este trabalho apresenta uma metodologia para integrar a informação de diversos perfis, através de inversão conjunta de dados de poço para a determinação da porosidade intervalar. A metodologia de inversão se baseia na teoria bayesiana de inferência, permitindo também a incorporação de informação *a priori* proveniente de análises geológicas e de física de rocha, além do tratamento sistemático das incertezas. A análise de incerteza está embutida no processo de inferência bayesiana, uma vez que a solução é a distribuição de probabilidade da porosidade condicional aos dados e informação *a priori*. A formulação matemática da metodologia é apresentada e sua aplicação ilustrada através de um exemplo sintético.

INTRODUÇÃO

A estimativa de porosidade em poços é o primeiro passo para a determinação de sua distribuição ao longo do reservatório. Nesse processo, integra-se a informação de diversos perfis tais como os de porosidade, densidade, velocidades e litológicos. A integração dos perfis é fundamentada em de fórmulas teóricas e empíricas derivadas de estudos de física de rocha. Muitas dessas expressões relacionam a porosidade com as propriedade elásticas da rocha. Dentre estas, podemos destacar as apresentadas por Gassmann (1951), Wyllie *et al.* (1956), Raymer *et al.* (1980), Han *et al.* (1986) e Eberhart-Phillips *et al.* (1989).
Invariavelmente, todo o tipo de medida em poço contém uma componente de erro introduzida por fatores diversos. Por exemplo, os perfis de porosidade tem como princípio físico a emissão de nêutrons que detectam a presença de hidrogênio no meio. Porém, a quantidade de hidrogênio não está condicionada apenas aos espaços vazios na rocha. Argilominerais e fluidos intersticiais ricos em hidrogênio introduzem erros nas medidas de porosidade obtidas com o perfil de nêutrons, superestimando a porosidade. As ferramentas de poço são calibradas antes de uma perfilagem para minimizar esses erros, mas isso requer conhecimento prévio do tipo de matriz e fluido presente. Consequentemente, aproximações e padrões estabelecidos em laboratório são adotados, o que nem sempre produz o melhor resultado.
Esse quadro é sugestivo de que o desenvolvimento de um esquema de inversão conjunta de perfis pode produzir estimativas melhoradas para porosidade, considerando que tal procedimento integra dados de fontes distintas e possibilita tratamento dos erros. Cada tipo de dado contém informações que não são afetadas da mesma forma pelos diversos tipos de ruídos. Além disso, metodologias de inversão permitem incorporar informação *a priori* derivada dos estudos de física de rocha.
A influência da pressão efetiva, porosidade e conteúdo de argila em arenitos nas velocidades sísmicas VP e VS é descrita pelas seguintes expressões derivadas por Eberhart-Phillips *et al.* (1989):

$$VP = 5.77 - 6.94\,\phi - 1.73\sqrt{C} + 0.446\,(P_e - e^{-16.7\,P_e}), \tag{1}$$

e

$$VS = 3.70 - 4.94\,\phi - 1.57\sqrt{C} + 0.361\,(P_e - e^{-16.7\,P_e}), \tag{2}$$

onde ϕ é a porosidade, C a quantidade de argila e P_e a pressão efetiva. Outra expressão bem conhecida descreve a densidade da rocha ρ como sendo dada por

$$\rho = (1-\phi)\,\rho_m + \phi\,\rho_f, \tag{3}$$

onde ρ_m é a densidade da matriz e ρ_f a densidade do fluido.
Essas simples expressões já são suficientes para introduzir dependência de VP, VS e ρ com a constituição mineralógica da matriz, pela quantidade de filtrado que invade o meio poroso e com as variações de pressão e temperatura. Tal superposição de efeitos torna ambigüo o problema de se estimar a porosidade a partir de observações de VP, VS. Por isso, o processo de inversão demanda um processo cuidadoso de análise da informação *a priori* proveniente de outros dados de engenharia de poço e geologia, além da calibração específica das expressões constitutivas através de análises de física de rocha.
A teoria bayesiana de inferência fornece bases ideais para o tratamento desse tipo de problema, caracterizado principalmente pela análise de incerteza em dados e informação *a priori* e a existência de relações matemáticas entre observações e parâmetros. Neste caso, as observações são os dados de poço e o parâmetro é a porosidade. O presente trabalho consiste no desenvolvimento da metodologia de inversão para aplicação em dados de poço, seguindo o formalismo defendido por Jeffreys (1939), Zellner (1971), Bretthorst (1988) e Jaynes (1996). A metodologia é ilustrada através de um exemplos, utilizando dados sintéticos.

METODOLOGIA

Considere os dados de perfis de porosidade, velocidades de ondas P e S e densidade como sendo representados, respectivamente, pelos vetores $\mathbf{d}_\phi$, $\mathbf{d}_{VP}$, $\mathbf{d}_{VS}$, e $\mathbf{d}_\rho$. O problema consiste em utilizar esses dados e outras informações adicionais (informação *a priori*), representadas por I , para estimar a porosidade intervalar ϕ, através da metodologia bayesiana de inferência. De acordo com essa metodologia, a solução do problema é fornecida pela distribuição posterior de porosidade condicional aos dados e informação *a priori* $p(\phi\,|\,\mathbf{d}_\phi, \mathbf{d}_{VP}, \mathbf{d}_{VS}, \mathbf{d}_\rho, I)$. A distribuição posterior é fornecida pela aplicação do Teorema de Bayes, que neste caso, pode ser escrito como

$$p(\phi\,|\,\mathbf{d}_\phi, \mathbf{d}_{VP}, \mathbf{d}_{VS}, \mathbf{d}_\rho, I) = \frac{s(\phi\,|\,I)\, r(\mathbf{d}_\phi, \mathbf{d}_{VP}, \mathbf{d}_{VS}, \mathbf{d}_\rho\,|\,\phi, I)}{h(\mathbf{d}_\phi, \mathbf{d}_{VP}, \mathbf{d}_{VS}, \mathbf{d}_\rho, I)}, \tag{4}$$

sendo que $s(\phi\,|\,I)$ é a distribuição *a priori* de ϕ, $r(\mathbf{d}_\phi, \mathbf{d}_{VP}, \mathbf{d}_{VS}, \mathbf{d}_\rho\,|\,\phi, I)$ é a distribuição conjunta dos dados de poço e $h(\mathbf{d}_\phi, \mathbf{d}_{VP}, \mathbf{d}_{VS}, \mathbf{d}_\rho, I)$ é um termo normalizador. r também pode ser definida como a função verossimilhança de ϕ, uma vez que ajusta os dados observados, conforme relações constitutivas da petrofísica como função de ϕ. Os vetores de dados são independentes uns dos outros, o que permite a decomposição de r como o produto das distribuições marginais dos dados. Desse modo, e tomando κ como o fator de normalização, podemos escrever que

$$p(\phi\,|\,\mathbf{d}_\phi, \mathbf{d}_{VP}, \mathbf{d}_{VS}, \mathbf{d}_\rho, I) = \kappa\, s(\phi\,|\,I)\, r_1(\mathbf{d}_\phi\,|\,\phi, I)\, r_2(\mathbf{d}_{VP}\,|\,\phi, I)\, r_3(\mathbf{d}_{VS}\,|\,\phi, I)\, r_4(\mathbf{d}_\rho\,|\,\phi, I). \tag{5}$$

O próximo passo é definir as relações entre os dados de perfis e a porosidade. Por conveniência, sejam os índices ϕ, VP, VS e ρ substituídos, respectivamente, pelos números de 1 a 4. Assim, podemos escrever

$$\mathbf{d}_\phi \;\rightarrow\; \mathbf{d}_1 = \mathbf{f}_1(\phi) + \mathbf{e}_1, \tag{6}$$
$$\mathbf{d}_{VP} \;\rightarrow\; \mathbf{d}_2 = \mathbf{f}_2(\phi) + \mathbf{e}_2, \tag{7}$$
$$\mathbf{d}_{VS} \;\rightarrow\; \mathbf{d}_3 = \mathbf{f}_3(\phi) + \mathbf{e}_3, \tag{8}$$
$$\mathbf{d}_\rho \;\rightarrow\; \mathbf{d}_4 = \mathbf{f}_4(\phi) + \mathbf{e}_4, \tag{9}$$

onde $\mathbf{d}_i$, $\mathbf{f}_i$ e $\mathbf{e}_i \in \mathcal{R}^{N_i}$, $i = 1, \ldots, 4$, sendo $\mathbf{f}_1$ a identidade, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ e $\mathbf{f}_4$ definidos, respectivamente, com base nas equações (1), (2) e (3) e $\mathbf{e}_i$ são os erros das observações. Para a descrição dos erros, consideramos informação de momentos de primeira e segunda ordens. Neste caso, a distribuição consistente com princípo da entropia máxima é a normal. Isso define as expressões para as distribuições dos dados r_i como sendo da forma

$$r_i(\mathbf{d}_i\,|\,\phi, I) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_i^2}[\mathbf{d}_i - \mathbf{f}_i(\phi)]^T[\mathbf{d}_i - \mathbf{f}_i(\phi)]\right\},\; i = 1, \ldots, 4, \tag{10}$$

onde σ_i^2 é a variância do i-ésimo vetor de erros. Para completar a equação (5), resta definir a distribuição *a priori* s. Vamos considerar s uniforme, podendo ser absorvida na constante κ.
Em geral a variância dos erros é desconhecida, sendo portanto uma parâmetro adicional a ser estimado. Na verdade, nesse caso, precisamos reescrever a distribuição posterior, como sendo

$$p'(\phi, \sigma_\phi, \sigma_{VP}, \sigma_{VS}, \sigma_\rho\,|\,\mathbf{d}_\phi, \mathbf{d}_{VP}, \mathbf{d}_{VS}, \mathbf{d}_\rho, I).$$

A inferência bayesiana dispõe de um recurso alternativo à estimativa das variâncias que é a marginalização. O processo de marginalização consiste em eliminar os parâmetros "desinteressantes" através de integração. Neste caso específico, temos que

$$p(\phi\,|\,\mathbf{d}_\phi,\mathbf{d}_{VP},\mathbf{d}_{VS},\mathbf{d}_\rho,I)=\int_0^\infty p'(\phi,\sigma_\phi,\sigma_{VP},\sigma_{VS},\sigma_\rho\,|\,\mathbf{d}_\phi,\mathbf{d}_{VP},\mathbf{d}_{VS},\mathbf{d}_\rho,I)\,d\sigma_\phi\,d\sigma_{vp}\,d\sigma_{vs}\,d\sigma_\rho. \tag{11}$$

A integração com relação a σ de distribuições gaussianas resulta em distribuições do tipo t-student. Isso aplicado às nossas expressões resulta em funções de verossimilhança com a seguinte forma

$$r_i(\mathbf{d}_i\,|\,\phi,I)\propto\left\{[\mathbf{d}_i-\mathbf{f}_i(\phi)]^T[\mathbf{d}_i-\mathbf{f}_i(\phi)]\right\}^{-\frac{N_i}{2}}. \tag{12}$$

Fazendo $N_i=N$, $i=1,\ldots,4$, obtemos a seguinte expressão para a distribuição posterior:

$$p(\phi\,|\,\mathbf{d}_\phi,\mathbf{d}_{VP},\mathbf{d}_{VS},\mathbf{d}_\rho,I)\propto\sum_{j=1}^{N}\left[\phi^4-\phi^3A_j+\phi^2B_j-\phi D_j+E_j\right]^{-N},\ \text{onde} \tag{13}$$

$$A_j = \frac{d_{3j}}{f_{4j}}+\frac{d_{4j}}{f_{3j}}+\frac{d_{2j}}{f_{2j}}+\frac{d_{1j}}{f_{1j}}, \tag{14}$$

$$B_j = \frac{d_{3j}\,d_{4j}}{f_{3j}\,f_{4j}}+\frac{d_{2j}\,d_{3j}}{f_{2j}\,f_{3j}}+\frac{d_{2j}\,d_{4j}}{f_{2j}\,f_{4j}}+\frac{d_{1j}\,d_{3j}}{f_{1j}\,f_{3j}}+\frac{d_{1j}\,d_{4j}}{f_{1j}\,f_{4j}}+\frac{d_{1j}\,d_{2j}}{f_{1j}\,f_{2j}}, \tag{15}$$

$$D_j = \frac{d_{2j}\,d_{3j}\,d_{4j}}{f_{2j}\,f_{3j}\,f_{4j}}+\frac{d_{1j}\,d_{3j}\,d_{4j}}{f_{1j}\,f_{3j}\,f_{4j}}+\frac{d_{1j}\,d_{2j}\,d_{4j}}{f_{1j}\,f_{2j}\,f_{4j}}+\frac{d_{1j}\,d_{2j}\,d_{3j}}{f_{1j}\,f_{2j}\,f_{3j}}, \tag{16}$$

$$E_j = \frac{d_{1j}\,d_{2j}\,d_{3j}\,d_{4j}}{f_{1j}\,f_{2j}\,f_{3j}\,f_{4j}}. \tag{17}$$

TESTES TEÓRICOS

Para avaliar o comportamento da metodologia proposta, consideramos um modelo sintético simplificado. O modelo consiste de uma camada de 30 metros de espessura, com porosidade de 25.6 % e pressão de 0.4 kbar/cm^2. Esses valores correspondem a uma amostra de arenito (amostra Gulf124155 da tabela 1 de Eberhart-Phillips *et al.* (1989)). A quantidade de argila varia linearmente com a profundidade. No topo, o percentual de argila é 20 %, aumentando em 10 % até a base do pacote. Usando esses dados e as equações (6)-(9) com erros pseudo-aleatórios gaussianos, são simulados os dados $\mathbf{d}_\phi$, $\mathbf{d}_{VP}$, $\mathbf{d}_{VS}$ e $\mathbf{d}_\rho$ com um espaçamento amostral de 30 cm. Além do ruído gaussiano, os dados de porosidade foram acrescidos de um valor constante de 15 % do valor da porosidade real, com a intenção de simular um erro sistemático de calibração.

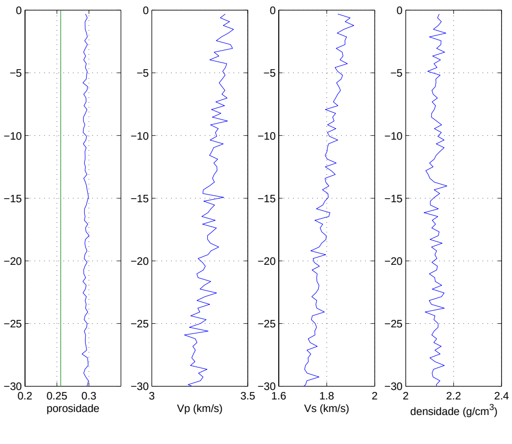

Figura 1: Perfis sintéticos, da esquerda para a direita, para ϕ, VP, VS e ρ.

A inversão consiste na aplicação da equação (13) aos dados $\mathbf{d}_\phi$, $\mathbf{d}_{VP}$, $\mathbf{d}_{VS}$ e $\mathbf{d}_{VS}$, considerando como informação *a priori* o real teor de argila. O objetivo principal é analisar o efeito da existência do suposto erro sistemático desconhecido do perfil de porosidade na inversão conjunta. O cálculo das distribuições posteriores se processa em uma janela móvel de 10 observações a partir dos dados de $\mathbf{d}_\phi$, $\mathbf{d}_{VP}$, $\mathbf{d}_{VS}$ e $\mathbf{d}_{VS}$ em diversas combinações: individualmente, e em conjunto.

A Figura 2 mostra os resultados através de gráficos da profundidade versus porosidade, com as distribuições para a porosidade de cada intervalo de profundidade representada em escala de cores. Os gráficos do topo da

Figura 2 mostram os resultados das inversões considerando apenas um tipo de dado $p(\phi\,|\,\mathbf{d}_\phi, I)$, $p(\phi\,|\,\mathbf{d}_{VP}, I)$, $p(\phi\,|\,\mathbf{d}_{VS}, I)$ e $p(\phi\,|\,\mathbf{d}_\rho, I)$. A inversão do perfil de porosidade claramente mostra o efeito do erro de calibração. A inversão dos demais tipos de perfis isolados produzem bons resultados por utilizarem informações *a priori* corretas. No entato, é interessante notar as aberturas das distribuições que atribuem confiabilidade decrescente para os resultados obtidos pela inversão dos dados de VS, VP e ρ, respectivamente.

Os gráficos da linha de baixo da Figura 2 mostram inversões conjunta de dados. Os três primeiros em pares combinando dados de porosidade com cada um dos outros três tipos de perfis. $p(\phi\,|\,\mathbf{d}_\phi, \mathbf{d}_\rho, I)$ não apresenta nenhuma melhora notável. $p(\phi\,|\,\mathbf{d}_\phi,\, \mathbf{d}_{VP}, I)$ já começa a apresentar melhorias com uma segunda moda de pequena amplitude aparecendo sobre o valor real da porosidade. $p(\phi\,|\,\mathbf{d}_\phi, \mathbf{d}_{VS}, I)$ demonstra comportamento similar ao resultado anterior, mas, de forma consistente com a inversão de dados isolados, gera uma segunda moda ainda mais acentuada. Finalmente, o gráfico final mostra o resultado utilizando todos os perfis, o que produz um resultado satisfatório na correção do desvio de calibração nos dados de porosidade.

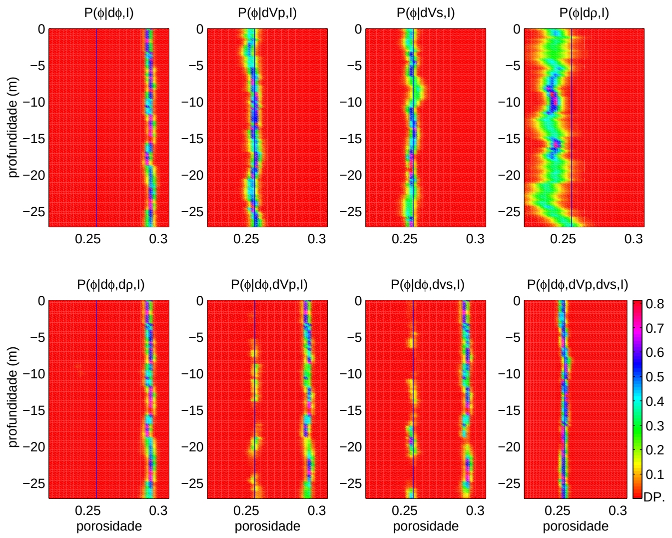

Figura 2: Resultados para inversão dos perfis individuais (acima) e combinados (abaixo) conforme indicado nos gráficos. O traço azul indica o valor real da porosidade.

CONCLUSÕES

A teoria bayesiana de inferência dispõe de recursos para o tratamento de uma quantidade significativa de informação de uma forma relativamente simples no processo de inversão conjunta de perfis de poço. Resultados da aplicação dessa metodologia para a inferência de porosidade intervalar em um modelo sintético demonstram que: a) em ordem decrescente, os dados mais informativos a respeito da porosidade são VS, VP e ρ; e b) a inversão conjunta de perfis pode reverter efeitos de erros sistemáticos em situações idealizadas. Combinações de incertezas mais complexas para permitir o tratamento sistemático de dados reais serão alvos de investigações futuras. A extensão da metodologia para incluir dados de sísmica de superfície deve resultar numa nova metodologia para a caracterização de reservatório.

REFERÊNCIAS

Bretthorst, L., 1988, Bayesian spectrum analysis and parameter estimation. *In Lecture Notes in Statistics* **48**, Springer-Verlag, New York.

Burge, D.W., Neff, D.B., 1998, Well-based seismic lithology inversion for porosity and pay-thickness mapping. The Leading Edge, **17**, p. 166-171.

Eberhart-Phillips, D., Han, D., Zoback, M. D., 1989, Empirical relationships among seismic velocity, effective pressure, porosity, and clay content in sandstone. Geophysics, **54**, 82-89.

Gassmann, F., 1951, Elastic waves through a packing of spheres. Geophysics, **16**, 673-685.

Han, D., Nur, A., Morgan, D., 1986, Effects of porosity and clay content on waves velocities in sandstones. Geophysics, **51**, 2093-2107.

Jaynes, E. T., 1996, *Probability Theory - The Logic of Science*. Edição preliminar fragmentada, disponível através do endereço eletrônico http://bayes.wustl.edu.

Jeffreys, H., 1939, *Theory of Probability*. Oxford University Press, London.

Raymer, D., Hunt, S., Gardner, J. S., 1980, An improve sonic transit time-to-porosity transform. Society of Professional Well Log Analists, 21st Annual Meeting, paper P.

Wyllie, M. R. J., Gregory, A. R., Gardner, L.W., 1956, Elastic wave velocities in heterogeneous and porous media. Geophysics, **21**, p. 41-70.

Zellner, A., 1971, *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. John Wiley and Sons, New York