



# Inversão Linearizada Bidimensional de Sondagens Elétricas Verticais Utilizando Norma $L_p$

Niraldo R. Ferreira CPGG-DEE/UFBA

Milton J. Porsani CPGG/UFBA

Olivar A.L. de Lima CPGG/UFBA

## Abstract

This paper investigates aspects of the two-dimensional (2D) linearised inversion in the electric geophysical method. The modelling steps has been implemented through the finite differences method and the inversion was carried out by using the Gauss-Newton method extended to the  $L_p$  norm. The approach focuses the robustness of the  $L_1$  norm when some data points are strongly affected by outliers. As a numerical test the inversion of the resistivity parameters corresponding to a vertical dike covered by a horizontal layer is presented.

## INTRODUÇÃO

O método da eletrorresistividade é empregado em diversas áreas da investigação geofísica do subsolo, tais como prospeção de águas subterrâneas e estudos de contaminação ambiental (Ward, 1990). Normalmente assume-se um modelo unidimensional (1D) para o interior da Terra na interpretação dos dados das sondagens elétricas verticais (SEV). Neste caso a modelagem tem solução analítica e a inversão opera com poucos parâmetros. O processamento digital então é feito rapidamente (Rijo, 1977). São exemplos típicos as áreas sedimentares e de aluviões. Este procedimento embora ágil pode não ser adequado em áreas onde há considerável variação lateral da resistividade, sob pena de obter-se interpretações equivocadas (Souza e Rijo, 1995). Métodos de interpretação bidimensional (2D) podem então ser utilizados. Neste caso, as equações diferenciais que regem os fenômenos físicos geralmente não admitem soluções analíticas e recorre-se a técnicas numéricas diversas. Adotou-se aqui o método das diferenças finitas (Medeiros, 1987). O procedimento clássico na inversão é usar o método dos mínimos quadrados (norma  $L_2$ ) (Rijo, 1977; Loke e Barker, 1996). Uma técnica mais geral, contendo a norma  $L_2$  como caso particular é minimizar a norma  $L_p$ . (Ferreira e Porsani, 1995; Scales e Gersztenkorn, 1988). Esta metodologia tem sido recentemente aplicada na inversão eletrorresistiva 1D (Ferreira e Porsani, 1995; Marinho e Lima, 1995; Hering et al, 1995). Neste trabalho utiliza-se o formalismo de norma  $L_p$  para a inversão linearizada 2D de eletrorresistividade e aplica-se essa metodologia a um dado sintético obtido de um dique recoberto por uma camada horizontal.

## MODELAGEM 2D

A resposta de uma Terra 2D a uma fonte pontual de corrente contínua é descrita pela equação de Poisson:

$$-\nabla \cdot \{\sigma(x, z)\nabla\phi(x, y, z)\} = I\delta(x - x_f)\delta(y)\delta(z) \quad (1)$$

onde  $\phi(x, y, z)$  é o potencial elétrico,  $I$  é a corrente elétrica contínua,  $(x_f, 0, 0)$  é a posição da fonte na superfície e  $\sigma(x, z)$  é a distribuição de condutividade. Condições de contorno de Neumann na superfície e mista nas laterais e fundo do modelo são também introduzidas (Medeiros, 1987). Embora a distribuição de condutividade seja 2D, o potencial é 3D. Contorna-se esta dificuldade tomando a transformada de Fourier de (1) na variável  $y$  obtendo:

$$-\nabla \cdot [\sigma(x, z)\tilde{\nabla}\tilde{\phi}(x, k, z)] + k^2\sigma(x, z)\tilde{\phi}(x, k, z) = \frac{I}{2}\delta(x - x_f)\delta(z) \quad (2)$$

onde  $k$  é a variável da transformada de Fourier,  $\tilde{\phi}$  é a transformada de Fourier do potencial e o operador  $\nabla$  agora opera apenas em  $x$  e  $z$ . A discretização da equação (2) por diferenças finitas produz um sistema linear que pode fornecer  $\tilde{\phi}$  para um conjunto ótimo de valores de  $k$ . A transformada inversa de Fourier fornece  $\phi(x, 0, z)$  e as resistividades aparentes  $\rho_a$  são obtidas de  $\rho_a = K_g\Delta\phi/I$ , onde  $K_g$  é o fator geométrico do arranjo de eletrodos e  $\Delta\phi$  são diferenças de potencial escolhidas na superfície.

## INVERSÃO COM NORMA $L_p$

A formulação de inversão com norma  $L_p$  consiste em obter os parâmetros do modelo que minimizam a seguinte função objetivo:

$$E = \sum_{i=1}^N |g(\rho, x_i) - d(x_i)|^p = \|\mathbf{g} - \mathbf{d}\|_{L_p} = \|\mathbf{r}\|_{L_p} \quad (3)$$

onde  $\mathbf{d}$  é o vetor de resistividades aparentes observadas,  $\mathbf{g}$  é o vetor de resistividades aparentes modeladas,  $\rho$  é o vetor de parâmetros do modelo,  $\mathbf{x}$  é o vetor posição dos pontos de medição,  $\mathbf{r}$  é o vetor desvio,  $N$  é o número de pontos de dados e  $p \geq 1$  é o índice da norma utilizada. Em geral  $g$  é uma função não linear de  $\rho$ . Neste caso o problema é resolvido de forma iterativa por linearizações sucessivas em relação a um modelo corrente. Linearizando  $g$  em torno de uma estimativa inicial  $\rho_0$  tem-se:

$$\mathbf{g}(\rho) \approx \mathbf{g}(\rho_0) + \mathbf{G}\Delta\rho \quad (4)$$

onde  $\Delta\rho$  é o incremento em torno do modelo corrente e  $\mathbf{G}$  é a matriz sensibilidade. A substituição desta expressão na equação anterior resulta em:

$$E = \|\mathbf{G}\Delta\rho - \mathbf{Y}\|_{l_p} \quad (5)$$

A minimização desta equação relativa a  $\Delta\rho$  produz a expressão recursiva (Scales e Gersztenkorn, 1988):

$$\mathbf{G}^T \mathbf{R}_{k-1} \mathbf{G} \Delta\rho_{(k)} = \mathbf{G}^T \mathbf{R}_{(k-1)} \mathbf{Y} \quad (6)$$

onde  $\mathbf{R}$  é uma matriz diagonal, cujos elementos não nulos são definidos por

$$R_i = \begin{cases} |r_i|^{p-2} & \text{se } |r_i| > \epsilon \\ \epsilon^{p-2} & \text{se } |r_i| \leq \epsilon \end{cases}$$

em que  $\epsilon$  é um parâmetro de tolerância pequeno e positivo. A equação (6) é resolvida com o método conjugado gradiente e os parâmetros são atualizados pela expressão

$$\rho_{k+1} = \rho_k + \Delta\rho_k \quad (7)$$

Como é usual na inversão eletrorresistiva 2D, o modelo foi dividido em blocos homogêneos cujas resistividades são os parâmetros desejados. Para evitar a possibilidade de obter-se parâmetros negativos e estabilizar o processo, o problema foi reparametrizado para o do domínio do logaritmo das resistividades (Rijo, 1977).

## RESULTADOS NUMÉRICOS

O modelo de dique escolhido para apresentar um teste numérico encontra-se na figura (1). Assumiu-se na inversão, a geometria como perfeitamente conhecida com 4 blocos homogêneos, tendo cada um a resistividade inicial de 500  $\Omega m$ . Empregou-se o arranjo Schlumberger com 21 estações alinhadas e separadas de 20m. A grade de diferenças finitas tem 252 pontos na horizontal, incluindo uma zona de expansão nas laterais com 5 pontos e os demais nós regularmente espaçados de 5m. Na vertical são 26 nós com 80 pontos por estação, para permitir uma investigação suficientemente profunda. Na inversão foram escolhidos 19 pontos por estação, sendo os pontos de número 3, 7, 10 e 14, perturbados por ruído tipo "outlier". A tabela abaixo indica os parâmetros verdadeiros do modelo e aqueles obtidos através da inversão com as normas  $L_1$  e  $L_2$ . As curvas de SEV das estações 1, 7 e 11, juntamente com as curvas obtidas com o dique apresentando largura zero ou infinita são indicados na figura (2). Os teste indicaram uma convergência para a solução em cerca de 5 iterações. Nota-se que a fraca influência relativa do dique nos dados poderia levar a uma interpretação de camadas planas e paralelas, revelando a ambiguidade presente no problema (Souza e Rijo, 1995).

parâmetros	exatos	norma $L_1$	norma $L_2$
$\rho_1 (\Omega.m)$	80.0	80.0	73.1
$\rho_2 (\Omega.m)$	1000.0	1000.0	1056.5
$\rho_3 (\Omega.m)$	1000.0	1000.0	1056.5
$\rho_4 (\Omega.m)$	150.0	150.0	183.8

## CONCLUSÕES

Apresentou-se um método para a inversão simultânea de SEVs para meios com variação 2D de resistividade. O método foi aplicado sobre dados sintéticos tendo sido utilizado o modelo de um dique vertical enterrado. Para testar a robustez do método de inversão, foram adicionados ruídos espúrios de forte amplitude em alguns pontos de dados. A inversão com base na norma  $L_1$  mostrou-se mais robusta, comparada à norma  $L_2$ , para o tipo de ruído utilizado.

## REFERÊNCIAS

- Ferreira, N.R. e Porsani, M.J., 1995, Inversão linearizada de sondagem elétrica vertical utilizando norma  $L_p$ , 4<sup>o</sup> Congr. Bras. de Geof., 555-558.
- Hering, A., Misiek, R., Gyulai, A., Ormos, T., Dobroska, M. and Dresen, L., 1995, A joint inversion algorithm to process geoelectric and surface wave seismic data. Part I: basic ideas: Geophys. Prosp., 43, 135-156.
- Loke, M.K. and Barker, R.D., 1996, Rapid least-squares inversion of apparent resistivity pseudosection by a quasi-Newton method: Geophys. Prosp., 44, 131-152.
- Marinho, J.M.L. e Lima, O.A.L., 1995, Inversão de dados de sondagem elétrica minimizando a norma  $L_1$ , 4<sup>o</sup> cong. Intern. da SBGf, Rio de Janeiro, Res. Exp., 1007-1009.
- Medeiros, W.E., 1987, Eletro-resistividade aplicada à hidrogeologia do cristalino: Um problema de modelamento bidimensional, Dissert. de Mestrado, PPPG/UFBA, 149p.
- Rijo, L., 1977, Modelling of electric and electromagnetic data, Ph. D. Thesis, University of Utah, Salt Lake City, 242p.
- Scales, J.A. and Gersztenkorn A., 1988, Robust methods in inverse theory: Inverse Problem, 4, 1071-1091.
- Souza, J.A.F. e Rijo, J., 1995, Sondagem elétrica vertical em região do Cristalino: Um exemplo de ambiguidade, 4<sup>o</sup> cong. Intern. da SBGf, Rio de Janeiro, Res. Exp., 1003-1006.
- Ward, S.H., 1990, Geotechnical and environmental geophysics, Resistivity and induced polarization methods, Society of Exploration Geophysicists, 147-190.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CPGG/UFBA, DEE/UFBA e CNPq, que possibilitaram a realização desta pesquisa. N.R. Ferreira agradece aos colegas pelo apoio computacional, especialmente a Vicente Pinheiro Neto e Joaquim Lago.

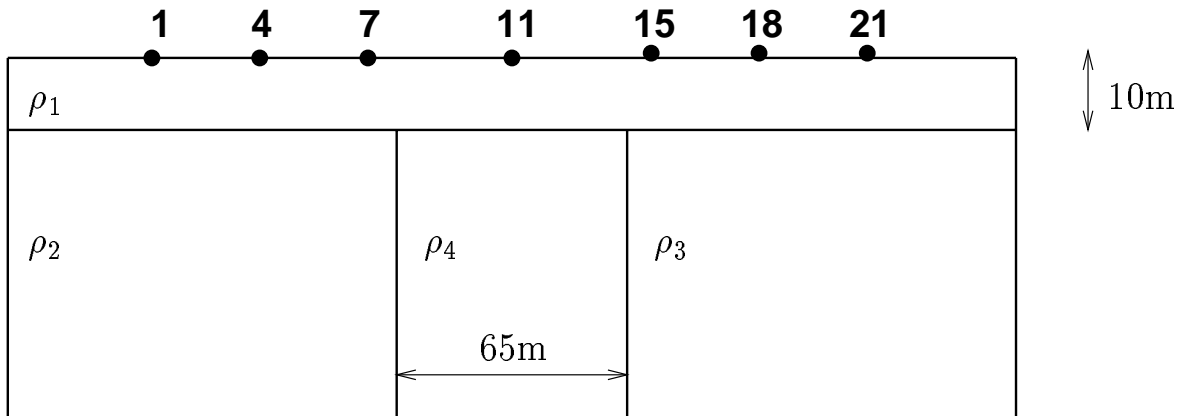


FIGURA 1: Dique infinito. As resistividades dos blocos constituintes são:  $\rho_1 = 80\Omega m$ ,  $\rho_2 = \rho_3 = 1000\Omega m$ ,  $\rho_4 = 150\Omega m$ . Os pontos na superfície indicam a existência de 21 sondagens Schlumberger espaçadas de 20m. Os dados das sondagens 1, 7 e 11 estão representados na figura (2).

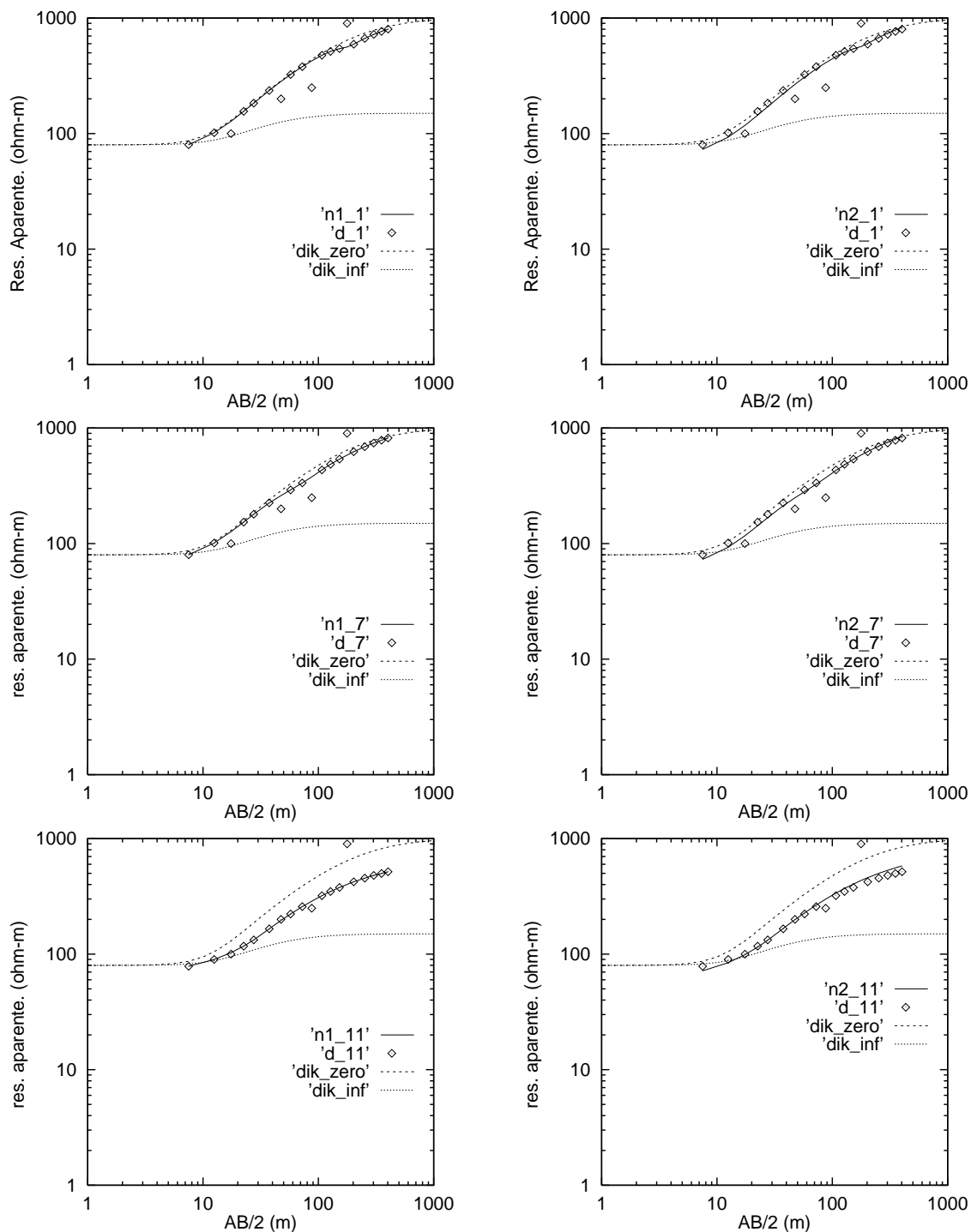


FIGURA 2: Sondagens Schlumberger das estações número 1, 7 e 11. Em cada figura tem-se a seguinte simbologia: (—) indica o dado calculado com o modelo ótimo; (◊) representa os dados sintéticos; as outras duas curvas de referência, indicam diques de largura infinita e nula. As 3 curvas da esquerda correspondem a norma L1 e as da direita são associadas a norma L2.