

# Um Experimento Numérico em Tomografia Geofísica de Difração

M. R. G. Gonçalves, Dep. Engenharia Elétrica/EP/UFBA

A. Bassrei, Dep. Física Geral/IF/UFBA e CPGG/UFBA

## ABSTRACT

Acoustical imaging has a wide range of applications, like medical tomography, non-destructive testing and exploration geophysics among others. In geophysics, one application of acoustical imaging is seismic tomography, either ray tomography or diffraction tomography. Inverse problems are in practice ill-posed, in special, in seismic tomography when one has the so-called limited view angle problem. Thus, several methods have been proposed, like regularization techniques, and used in inverse problems in order to compensate the lack of information. In this work we use regularization as an auxiliary inverse procedure in geophysical diffraction tomography. Within the framework of scattering theory, we employ the first Born approximation, in the acoustic case to calculate the scattered field. The inverse problem is to recover the unknown object function from the known scattered field. Some attention is given to the selection of the regularization parameter  $\lambda$  where a new procedure, based on the L curve is suggested, what we call L modulus.

## INTRODUÇÃO

Os sistemas físicos são descritos por parâmetros intrínsecos. No chamado procedimento direto calculamos as medidas a partir de parâmetros conhecidos (causa  $\rightarrow$  efeito). Já no procedimento inverso calculamos os parâmetros a partir da observação de medidas (efeito  $\rightarrow$  causa). A relação matemática, para o caso linear é dada por  $\mathbf{d} = H\mathbf{m}$ , onde  $\mathbf{d}$  é o vetor de parâmetros de dados ( $M$  componentes),  $\mathbf{m}$  é o vetor de parâmetros de modelo ( $N$  componentes), e a matriz  $H$  de dimensão  $M \times N$  relaciona os dois vetores. No caso ideal, obtemos  $\mathbf{m}^{est}$  invertendo  $H$ :

$$\mathbf{m}^{est} = H^{-1}\mathbf{d}.$$

Porém na prática  $H$  não é quadrada e é geralmente singular, isto é,  $|H| = 0$ , de forma que para resolver o problema usamos o método da regularização.

O imageamento acústico é amplamente aplicado em problemas inversos, tais como geofísica de exploração, tomografia médica, testes não destrutivos, etc. Os problemas inversos são mal-postos em sua grande maioria, portanto para a sua solução torna-se necessário uma regularização. Nesse trabalho

realizamos um experimento numérico em tomografia geofísica de difração, caso acústico bidimensional usando aproximação de Born, com uma geometria de aquisição poço-a-poço. A natureza mal-posta do problema é saneada através de regularização por matrizes de derivadas. Apresentamos uma simulação numérica onde é dada certa atenção para a seleção do fator de regularização  $\lambda$ . Uma abordagem eficiente é a seleção de  $\lambda$  através da curva RMS do erro de  $\mathbf{m}^{est}$  em relação a  $\mathbf{m}$ , que no entanto somente é possível em exemplos sintéticos. A curva L (Hansen, 1992) foi empregada num exemplo sintético, além de um outro critério baseado nessa mesma curva que foi chamado de módulo L por Sá (1996).

## TOMOGRAFIA GEOFÍSICA DE DIFRAÇÃO

A equação da onda para o caso bidimensional é

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

sendo  $U(\mathbf{r}, t)$  a solução da equação e  $c$  a velocidade do meio. Considerando que a solução possa ser escrita como  $U(\mathbf{r}, \omega, t) = e^{-i\omega t} P(\mathbf{r}, \omega)$ , o que representa uma dependência harmônica com o tempo, obtemos a equação de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)P(\mathbf{r}, \omega) = 0,$$

onde o número de onda é  $k = k(\mathbf{r}, \omega) = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ .

As condições consideradas para imageamento são: o meio é acústico 2-D, e a propagação do campo incidente se dá com velocidade constante  $C_0$  (*background*), numa área delimitada por  $A(\mathbf{r})$ , com contraste de velocidade em relação à velocidade do meio. Dessa forma a função objeto é definida como

$$O(\mathbf{r}) = 1 - \frac{C_0^2}{C^2(\mathbf{r})},$$

e representa a perturbação da velocidade em relação a  $C_0$  em cada ponto. Redefinindo o número de onda como função de  $O(\mathbf{r})$ , temos que

$$k^2(\mathbf{r}) = k_0^2 - k_0^2 O(\mathbf{r}),$$

e substituindo na equação de Helmholtz, obtemos

$$[\nabla^2 + k^2]P_S = k_0^2 O(\mathbf{r})[P_O + P_S],$$

onde  $P_O$  é o campo incidente, e  $P_S$  é o campo espalhado. Note que se não houver perturbações no *background*,  $O(\mathbf{r}) = 0$  e portanto o campo espalhado é nulo ( $P_S = 0$ ).

A última equação diferencial, tem a seguinte solução integral, chamada de equação de Lippmann-Schwinger:

$$P_S(\mathbf{r}) = -k_0^2 \int_{A(\mathbf{r}')} O(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') [P_O(\mathbf{r}') + P_S(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}'.$$

Note-se a não linearidade do integrando visto que o campo espalhado depende da função objeto. A linearização do problema é feita através da aproximação de Born de primeira ordem e é válida para um espalhamento fraco do campo primário. Sendo o campo total  $P_T(\mathbf{r}) = P_O(\mathbf{r}) + P_S(\mathbf{r})$  e  $P_S(\mathbf{r}) \ll P_O(\mathbf{r})$ , temos:

$$P_T(\mathbf{r}) = P_O(\mathbf{r}).$$

Obtemos assim uma relação linear entre o objeto imagedo  $O(\mathbf{r})$  e o campo espalhado  $P_S(\mathbf{r})$ :

$$P_S(\mathbf{r}) = -k_0^2 \int_{A(\mathbf{r}')} O(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') P_O(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Representaremos o campo primário gerado por uma fonte em  $\mathbf{r}_S$  através da função de Green

$$P_O(\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}'|\mathbf{r}_S),$$

e o campo espalhado em  $A(\mathbf{r})$  é registrado por um receptor situado em  $\mathbf{r}_G$

$$P_S(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_G) = -k_0^2 \int_{A(\mathbf{r}')} O(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}'|\mathbf{r}_S) G(\mathbf{r}_G|\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

A discretização dessa relação conduz à equação matricial  $\mathbf{d} = H\mathbf{m}$ , que deverá ser invertida para a obtenção de  $O(\mathbf{r})$  representado por  $\mathbf{m}$  (Rocha Filho, 1997; Rocha Filho et al., 1996).

## REGULARIZAÇÃO

Devido ao fato do problema inverso ser mal-posto faz-se necessário aplicar algum método de regularização. Aplicamos a técnica de regularização onde são minimizados a derivada dos parâmetros de modelo, para reduzir a flutuação dos dados devido a erros introduzidos pela instabilidade do método de inversão, aproximando o modelo estimado do modelo real. Essa técnica tem sido bastante utilizada na inversão de dados geofísicos; apenas para citar alguns trabalhos poderíamos mencionar Medeiros and Silva (1996) que usaram regularização na inversão de dados de gravimetria, e Bassrei and Rodi (1993), que empregaram a mesma técnica em tomografia de tempos de trânsito.

Considere a função objetivo (Twomey, 1963):

$$\Phi(\mathbf{m}) = \lambda(D_l \mathbf{m})^T (D_l \mathbf{m}) + \mathbf{e}^T \mathbf{e},$$

onde  $\lambda$  é o fator de regularização e  $D_l$  é a matriz de derivada de ordem  $l$ . Fazendo  $\partial\Phi(\mathbf{m})/\partial\mathbf{m} = 0$ , o modelo pode ser estimado por

$$\mathbf{m}^{est} = (H^T H + \lambda D_l^T D_l)^{-1} G^T \mathbf{d}.$$

Note que se  $\lambda = 0$  temos o método dos mínimos quadrados clássico. E se  $D_l^T D_l = I$  obtém-se mínimos quadrados amortecidos.

A escolha do parâmetro  $\lambda$  ótimo consiste na parte crucial deste método. O  $\lambda$  ótimo regulariza a inversão, dando um modelo consistente com os dados observados, dentro de uma faixa aceitável de erro. Podemos analisar o erro médio quadrático (RMS) para os parâmetros de dado e parâmetros de modelos dados respectivamente por

$$RMS_d = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (d_i^{obs} - d_i^{cal})^2},$$

e

$$RMS_m = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (m_i^{real} - m_i^{est})^2}.$$

A curva L (Hansen, 1992) é um gráfico paramétrico onde no eixo das abcissas tem-se o módulo do vetor dos erros nos dados estimados ( $\mathbf{e}$ ), e no eixo das ordenadas o módulo do vetor das derivadas dos parâmetros de modelo estimados ( $D_l \mathbf{m}$ ). Cada ponto da curva é resultado de um modelo resultante de um determinado  $\lambda$ . Trata-se pois de um balanceamento entre  $\mathbf{e}$  e  $D_l \mathbf{m}$ . O melhor modelo é a situação de equilíbrio entre as influências destas dimensões, e ocorre na região onde a curvatura é máxima, também chamada de joelho da curva.

O módulo L, foi sugerido por Sá (1996), e é baseado na curva L, onde pode-se ver que o joelho da curva apresenta menor distância à origem dos eixos. Assim se  $ModL$  mede a distância de um ponto da curva à origem, tem-se que

$$ModL^2 = [\mathbf{e}^T \mathbf{e}]^2 + [(D_l \mathbf{m})^T D_l \mathbf{m}]^2.$$

As coordenadas da curva L são substituídas por esta distância como função de  $\lambda$ . Uma vantagem do módulo L é que se reduz o número de pontos usados com relação à curva L. O melhor modelo tem o  $\lambda$  que apresenta distância mínima.

## SIMULAÇÃO NUMÉRICA

O modelo sintético utilizado, apresentado na Figura 1, tem 10 blocos na horizontal e 20 na vertical, o que implica num total de 200 blocos, sendo as dimensões de cada bloco  $2m \times 2m$ . A velocidade na parte homogênea (*background*) é  $C_o = 3000m/s$ . Existem três feições que simulam heterogeneidades: uma camada central de baixa velocidade com  $C_c =$

2450 m/s, representando portando um contraste negativo, e dois corpos fechados, ambos com um contraste positivo de velocidade, sendo um superior com  $C_s = 3300$  m/s, e o outro inferior com  $C_i = 3450$  m/s. Para a aquisição de dados para o procedimento inverso considerou-se 10 fontes e 10 receptores, o que implica em 100 equações complexas, ou 200 equações reais. Dessa forma temos sistema determinado de 200 incógnitas por 200 equações, porém mal-condicionado. A frequência da fonte é de 200 Hz, e em cada receptor tem-se o campo espalhado que é contaminado por ruído:  $P_S^{cont} = P_S + fkP_S$ , onde  $f$  é a amplitude do ruído e  $k$  representa um número aleatório, com uma distribuição gaussiana.

O modelo recuperado pode ser visto na Figura 2, que mostra uma solução bastante próxima do modelo verdadeiro. Esse resultado foi escolhido com base na Figura 3, que apresenta o erro RMS dos parâmetros de modelo, seja função objeto ou velocidade, em relação ao parâmetro de regularização  $\lambda$ . A curva L (Hansen, 1992) para esse exemplo é apresentada na Figura 4. O “joelho” da curva pode também ser detectado na Figura 5, onde agora seria equivalente ao mínimo da curva do que chamamos de módulo L (Sá, 1996). O valor de  $\lambda$  fornecido pelas Figuras 4 e 5 não é tão bom quanto ao valor  $\lambda$  proveniente da Figura 3. No entanto, a abordagem pelo critério RMS é artificial visto que na prática não conhecemos o modelo verdadeiro para podermos calcular o erro RMS de certa solução em relação ao modelo verdadeiro.

## CONCLUSÕES

As inversões regularizadas possibilitam encontrar um modelo recuperado mais similar ao verdadeiro, principalmente na presença de ruído. Os valores de  $\lambda$  obtidos pela técnica alternativa são diferentes, porém próximos para as diversas ordens de regularização quando comparados com os valores de  $\lambda$  obtidos pelo critério *RMS* do modelo. O critério do módulo L apontou piores resultados que os obtidos com o *RMS* do modelo, mas numa faixa ideal para o melhor  $\lambda$ . O critério *RMS* do modelo é mais confiável, pois conhecemos o modelo verdadeiro, embora seja mais artificial, uma vez que ele não pode ser utilizado em dados reais, onde nunca se tem um conhecimento do modelo verdadeiro. Os resultados são promissores com relação ao módulo L, faltando estudos mais conclusivos para localizar o  $\lambda$  ótimo com maior exatidão.

## AGRADECIMENTOS

M. R. G. Gonçalves agradece ao CNPq pela bolsa de iniciação científica. A. Bassrei agradece ao CNPq pelo suporte através de uma bolsa de pesquisa (300.209/90-8).

## BIBLIOGRAFIA

- Bassrei, A., and Rodi, W. L., 1993.** Regularization and inversion of linear geophysical data. 3º Congresso Internacional da Sociedade Brasileira de Geofísica, Rio de Janeiro, RJ. I, 111–116.
- Hansen, P. C., 1992.** Numerical tools for analysis and solution of Fredholm integral equation of the first kind. *Inverse Problems*, **8**, 849–872.
- Medeiros, W. E., and Silva, J. B. C., 1996.** Geophysical inversion using approximate equality constraints. *Geophysics*, **61**, 1678–1688.
- Rocha Filho, A. A., 1997.** Tomografia Sísmica de Difração: Formulação Matricial Multifrequência e Inversão Integrada, Dissertação de Mestrado, CPGG/UFBA.
- Rocha Filho, A. A., Harris, J. M., and Bassrei, A., 1996.** A simple matrix formulation diffraction tomography algorithm. XXXIX Congresso Brasileiro de Geologia, Salvador, BA. **2**, 312–315.
- Sá, T. J. M., 1996.** Inversão e Seleção de Imagens na Tomografia de Transmissão utilizando Regularização de Ordem Arbitrária, Decomposição em Valores Singulares, Conjugado Gradiente e Entropia. Dissertação de Mestrado, CPGG/UFBA.
- Twomey, S., 1963.** On the numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind by the inversion of the linear system produced by quadrature. *Journal of the Association of Computer Manufacturers*, **10**, 97–101.

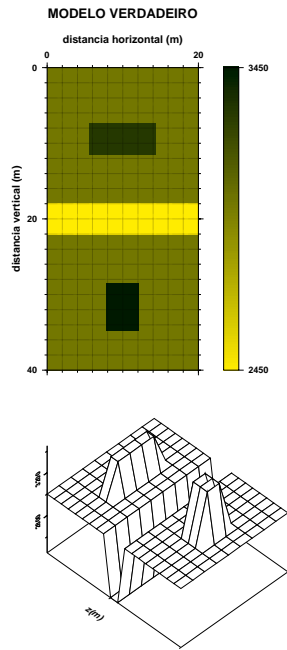


Figura 1: Modelo verdadeiro; velocidade em  $m/s$ .

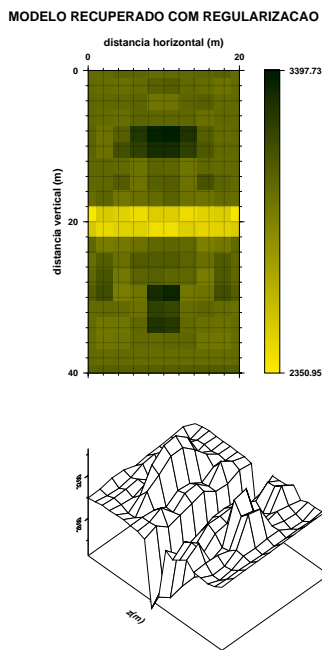


Figura 2: Modelo recuperado; velocidade em  $m/s$ .

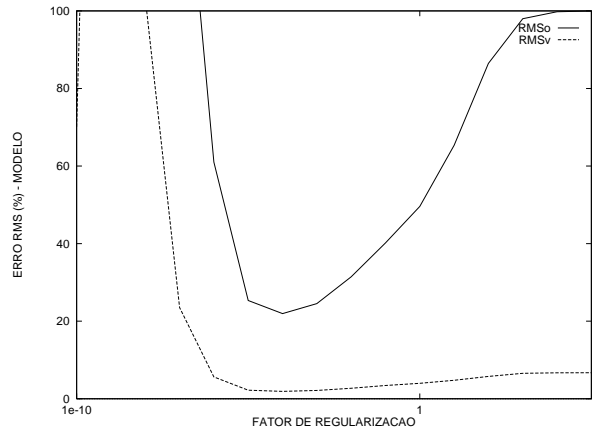


Figura 3: Curva de RMS do modelo referente ao exemplo sintético. O sub-índice “o” refere-se à função objeto, e o sub-índice “v” à velocidade.

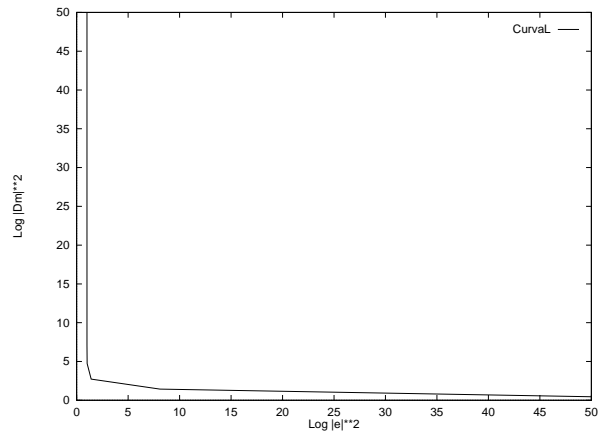


Figura 4: Curva L referente ao exemplo sintético, conforme Hansen (1992).

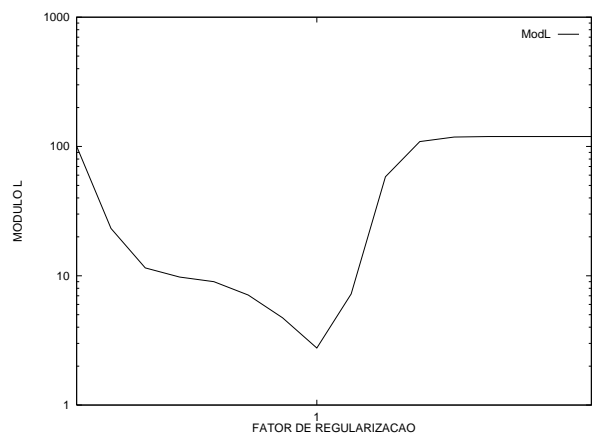


Figura 5: Curva do módulo L referente ao exemplo sintético, conforme sugerido por Sá (1996).