



# Un geode de precisión para Uruguay Informe del Proyecto UruGeoide 2000

Walter Humberto Subiza Piña

Universidade Federal do Paraná- Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas  
Centro Politécnico - Bloco VI, Caixa Postal 19011, Curitiba, Paraná, Brasil  
Email:whsubiza@geoc.ufpr.br

## RESUMEN

Se presenta el proyecto UruGeoide 2000, cuyo objetivo es la determinación de un modelo geoidal con precisión centimétrica para Uruguay. La metodología propuesta, está basada en la combinación de un modelo geopotencial, anomalias gravimétricas y un modelo numérico de terreno, a través de la técnica "remove-restore", usando Transformada Rápida de Fourier. Los datos disponibles, así como las investigaciones realizadas en modelos geopotenciales de alto grado y ultra alto grado, son presentados en este informe.

## INTRODUCCIÓN

El impacto de los sistemas de posicionamiento, basados en recepción de señales de satélites, ha venido revolucionando la geodesia desde la década de 1960. Uno de los principales efectos, ha sido la definición, materialización y adopción de sistemas geodésicos de referencia globales. Así, es posible obtener coordenadas cartesianas tridimensionales (y sus correspondientes latitud, longitud y altitud geométrica), en toda condición meteorológica, momento y lugar de la Tierra. Sin embargo, las altitudes geométricas obtenidas, se encuentran referidas a una superficie matemática (el elipsoide), sin significado físico real y deben ser transformadas por algún procedimiento en altitudes ortométricas referidas a un geode determinado. Este hecho, limita seriamente los beneficios ofrecidos por los sistemas de posicionamiento por satélite. Diversas soluciones pueden ser adoptadas, incluyendo el uso de modelos geopotenciales para la obtención de la separación elipsoide-geode, la observación de altitudes geométricas sobre puntos con altitud ortométrica conocida y combinaciones de ambos métodos. Cuando las necesidades de precisión en la transformación son mayores, la determinación de modelos geoidales locales es la solución mas adecuada, pero requiere normalmente de un volumen y variedad de datos mayor.

Uruguay comenzó en 1993 a usar en forma sistemática el GPS (Global Positioning System), como apoyo a su cartografía a escala 1/50.000, realizando desde entonces, esfuerzos tendientes a la determinación de un modelo geoidal local. En 1994, se realiza en cooperación con la Universidad de São Paulo, Brasil, una primera determinación de un modelo adaptado al área de Uruguay. El modelo, denominado GeoidUru 1994 [Denizar et al, 1994], estuvo basado en la separación espectral de la altura geoidal en dos componentes diferentes: una de mayor longitud de onda, obtenida a partir de un modelo geopotencial (GEMT-2, grado de 36) y otra de menor longitud de onda, proporcionada por la integral de Stokes modificada, operando sobre una base de 924 anomalias gravimétricas.

En 1995, la totalidad de la Red Gravimétrica Uruguaya (unas 2300 estaciones), fue ajustada en un trabajo conjunto con la Universidad de Hannover, Alemania [Subiza et al, 1998], a la vez que la cartografía de todo el país estaba disponible a escala 1/50.000. Este volumen de nuevos datos, permitió encarar un nuevo proyecto de determinación de un geode local, que se denominó UruGeoide 2000, siendo su objetivo, el cálculo de un modelo geoidal de precisión centimétrica situado entre las latitudes  $-30^{\circ}$  a  $-35^{\circ}$  y las longitudes  $301.5^{\circ}$  y  $307^{\circ}$  [Subiza, 1999]. La metodología propuesta, así como los avances en cada área de trabajo, o sea: modelos geopotenciales; datos gravimétricos; y datos topográficos, se van a detallar en este trabajo.

## METODOLOGIA PROPUESTA

La determinación del geode es un problema de contorno en la geodesia física. Este problema queda resuelto al hallar un potencial armónico  $T$ , fuera de las masas atrayentes, cuando son dadas las anomalias gravimétricas en toda esa superficie. Dos supuestos debemos adoptar en esta solución: no existen masas fuera de la superficie limitante (el geode) y las observaciones son dadas en toda esa superficie. La solución, si se disponen de las anomalias gravimétricas, está dada por la fórmula de Stokes

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (1)$$

siendo  $R$  el radio medio terrestre (por ejemplo 6370 km) y  $S(\psi)$  la denominada Función de Stokes, que depende sólo de la distancia esférica entre el punto que está siendo calculado y las anomalias gravimétricas consideradas. Como las anomalias gravimétricas deben estar dadas en la superficie limitante, las observaciones gravimétricas son reducidas al geode y dependiendo del procedimiento de reducción, se obtienen anomalias aire libre o Bouguer. Las anomalias aire libre pueden expresarse también, a través de los coeficientes de un modelo geopotencial, usando el siguiente desarrollo en armónicos esféricos [Sideris, 1997]:

$$\Delta g_{GM} = G \sum_{n=2}^{n_{m\acute{a}x}} (n-1) \sum_{m=0}^n [C_{nm} \cos m\lambda_p + S_{nm} \text{sen} m\lambda_p] P_{nm}(\text{sen } \varphi_p), \quad (2)$$

$G$  es un valor medio de la gravedad terrestre,  $C_{nm}$  y  $S_{nm}$  son los coeficientes plenamente normalizados del modelo geopotencial,  $P_{nm}$  son las funciones asociadas de Legendre, plenamente normalizadas y  $n_{m\acute{a}x}$  es el grado máximo a que a sido considerado el modelo geopotencial. El pasaje a las anomalias de bouguer también es simple, si se dispone de un referencial adecuado y las altitudes correspondientes.

La elección de un adecuado elipsoide de referencia, cuyo potencial normal sea el mismo que el geoides, nos proporciona la ondulación geoidal  $N$ , con la denominada ecuación de Bruns

$$N = \frac{T}{\gamma} = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma, \quad (3)$$

donde  $\bullet$  es la gravedad normal y la integración es efectuada en la esfera unitaria.

El supuesto de no existir masas fuera del geoides, conduce a que las mismas deban ser eliminadas matemáticamente con algún tipo de reducción. Esto implica que al ser aplicada la integral de Stokes, no sea obtenida la ondulación geoidal, sino una superficie muy próxima al geoides, denominada de co-geoides. La reducción al geoides es calculada usando una fórmula aproximada, con la anomalía de Bouguer y la altitud del punto considerado.

El procedimiento propuesto para el cculo del modelo geoidal, está basado en la combinación de un modelo geopotencial, anomalías gravimétricas medias y altitudes medias de un MNT, usando para ello la técnica denominada de "remove-restore" [Sideris, 1997]. Básicamente, la técnica consiste en una primera instancia, en eliminar de las anomalías gravimétricas, las componentes de longitud de onda mayores (modelo geopotencial) y menores (topografía), a continuación se aplica la integral de Stokes sobre las anomalías modificadas y finalmente se restauran las componentes retiradas. Matemáticamente puede ser expresado:

$$\Delta g = \Delta g_{AL} - \Delta g_{GM} - \Delta g_H, \quad (4)$$

siendo  $\bullet g_{AL}$ , las anomalías aire libre,  $\bullet g_{GM}$ , la contribución del modelo geopotencial y  $\bullet g_H$  la contribución potencial de la topografía. A continuación, se calcula la contribución de las anomalías gravimétricas en la ondulación geoidal, (longitudes medias del espectro). Diversos procedimientos han sido desarrollados para el cculo, aquí será presentada una simplificación en aproximación plana, de la integral de Stokes (1)

$$N_{\Delta g} = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint_A \frac{\Delta g}{l} dydx, \quad (5)$$

con  $l = \sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}$ ,  $x, y$ , las coordenadas de la anomalía gravimétrica y  $x_p, y_p$  las coordenadas del punto de cculo en una determinada rea  $A$ . La contribución del modelo geopotencial y de la topografía, en la ondulación geoidal es calculada respectivamente por

$$N_{GM} = R \sum_{n=2}^{n_{m\acute{a}x}} \sum_{m=0}^n [C_{nm} \cos m\lambda_p + S_{nm} \text{sen} m\lambda_p] P_{nm}(\text{sen } \varphi_p); \quad (6)$$

$$N_{top} = -\frac{\pi G \rho}{\gamma} h_p^2 - \frac{G \rho}{6\gamma} \iint_A \frac{h^3 - h_p^3}{l^3} dydx \quad (7)$$

Finalmente los efectos calculados son sumados (proceso "restore") para obtener la ondulación geoidal deseada

$$N = N_{GM} + N_{\Delta g} + N_{top}. \quad (8)$$

La variedad y cantidad de datos disponibles, permiten proponer un procedimiento de cculo diferente que el de integración numérica de 1994, cuando los efectos de terreno no fueron considerados. El uso de la Transformada Rápida de Fourier (TRF), en datos ordenados en cuadrículas o mallas, ofrece variadas ventajas, entre las cuales está el menor esfuerzo computacional y la obtención directa de las ondulaciones geoidales, en la misma cuadrícula en que se encuentran los datos de cculo.

## MODELOS GEOPOTENCIALES

La selección del modelo adecuado, para proporcionar las longitudes de onda mayores en la ondulación geoidal, es un primer paso importante. El modelo EGM96 [Lemoine et al, 1998], es una selección obligada, ya que es el modelo geopotencial desarrollado para dar apoyo al sistema WGS84, base principal en la actualidad del posicionamiento por satélite y el que ha tenido hasta el momento, el tratamiento mas riguroso y consistente en su cculo. El sistema WGS84 es además, compatible en términos cartográficos con los mas precisos sistemas de referencia y con la última definición del sistema geodésico uruguayo en el marco SIRGAS [Subiza et al, 1998b]. Una primera evaluación de modelos fue hecha en 1998, comparando los modelos GeoidUru 1994, OSU91A y EGM96. Los modelos fueron comparados con ondulaciones geoidales, obtenidas por observación GPS sobre puntos de la red altimétrica uruguayo,  $N_{GPS}$ , usando la relación

$$N_{GPS} \approx h - H, \quad (9)$$

siendo  $h$  la altitud geométrica o elipsoidal y  $H$  la altitud ortométrica. Es de destacar que la definición del datum vertical uruguayo, hecha en 1948, presenta entre +0,3 y +0,5 m de diferencia con un datum vertical global, producto del

régimen de aguas mixto que existe en el Río de la Plata. En estos mismos puntos de control, fue calculada la ondulación geoidal con los modelos referidos y la diferencia de cada uno con los datos GPS,  $N_{GEOP}$ , dada por:

$$DN = N_{GPS} - N_{GEOP} \quad (10)$$

A pesar de que el conjunto de puntos de control no era significativo, se pudo apreciar que el modelo EGM96, se adaptaba mejor a los datos GPS, mostrando diferencias en el entorno de  $\pm 1m$ . Con el aumento de la cantidad de datos de control y la aparición de nuevos modelos geopotenciales, en marzo de este año fue realizada una segunda evaluación. Se usó en esta ocasión, una base de datos de 25 estaciones GPS, para la comparación absoluta (expresión (9)) y 26 diferencias de altitudes entre estaciones, para efectuar la comparación relativa.

Los modelos evaluados fueron, dos de alto grado (hasta 360, resolución espacial de unos 50 km) y dos de ultra alto grado (720 grados, resolución espacial de unos 27 km), a saber: **EGM96**, completo hasta el grado de 360; **GFZ97A** (Gruber, 1997), completo hasta el grado de 359; **GPM98AR** [Wenzel, 1998], calculado hasta el grado de 1800, fue usado completo hasta el grado de 720; y **GPM98CR** [Wenzel, 1998], semejante al GPM98AR.

La comparación relativa fue calculada a partir de la fórmula:

$$\Delta DN = \Delta N_{GPS} - \Delta N_{GEOP} = (h_2 - h_1) - (H_2 - H_1) - (\dots) \quad (11)$$

En la evaluación hecha [Subiza, 1999], se halló semejanza de resultados, entre los modelos hasta 360 grados por un lado y los modelos de mas de 360 grados por otro. Los cuatro modelos presentaron buena adaptación a los datos de control, siendo levemente mejores los de grado 720. La diferencia relativa entre la ondulación geoidal obtenida de los modelos y los datos de control, fue relacionada con las distancias entre estaciones y se presenta en el siguiente Gráfico 1, como modelo representativo del análisis efectuado y del error esperado en el cálculo de ondulaciones geoidales usando estos modelos. Los resultados se expresan en forma de diferencia relativa por km, en unidades por mil (0,01 PPM= 1 cm por km). Se concluyó en la *viabilidad de usar un modelo de ultra alta orden (mas de 360 grados), adicionalmente al EGM96, como base para el cálculo de un modelo geoidal, a efectos de comparación entre ellos y selección de la mejor solución*. Se propone calcular, una solución usando el modelo EGM96 hasta 360 grados y dos soluciones más con el modelo GPM98CR hasta los grados de 540 y 720 y determinar con los datos de control, la mejor.

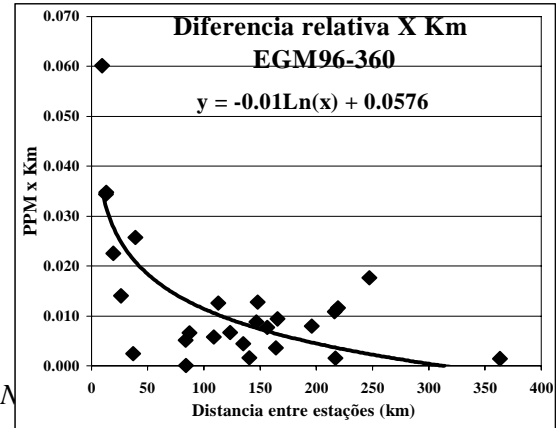


Gráfico 1. Modelo EGM96

DATOS GRAVIMÉTRICOS

La Red Gravimétrica Nacional, fue establecida entre 1967 y 1988, comprendiendo 3 estaciones absolutas y más de 2300 estaciones relativas. La totalidad de las estaciones fue ajustada en 1995, en un proyecto conjunto con la Universidad de Hannover (IfE), Alemania. La siguiente Tabla 1, resume los datos del ajuste [Subiza et all, 1998].

Tabla 1. Detalles del ajuste de la red gravimétrica

No. de estaciones absolutas (1 en Argentina)	4
No.de estaciones relativas	2376
Gravímetros absolutos y relativos	1 y 8
Diferencias de gravedad observadas	5447
Incógnitas	2384
Densidad en Uruguay, 1 estación cada	75 km <sup>2</sup>

El desvío estándar medio, luego del ajuste, fue para las estaciones relativas de  $\pm 0,26 \mu m s^{-2}$ . Fue creado posteriormente un banco de datos gravimétricos, en el cual se incluyeron las anomalías de aire libre y Bouguer. La Tabla 2 y la Figura 2 muestran las estadísticas de las anomalías y la distribución de isoanómalas aire libre en el territorio nacional, expresadas en mgals.

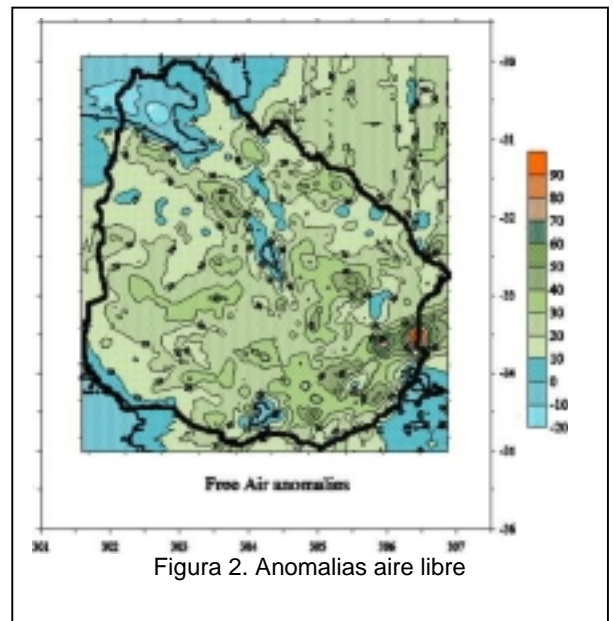


Figura 2. Anomalías aire libre

Tabla 2. Estadísticas de los datos gravimétricos uruguayos

ESTADÍSTICA/ANOMALÍA	AIRE LIBRE	BOUGUER
----------------------	------------	---------

Media	21,650	8,07
Desvío Estándar	12,87	13,21
Mínima	-15,42	-28,09
Máxima	99,77	99,07

Se espera en el correr de este año realizar las siguientes tareas, respecto de los datos de gravedad: *finalizar la colecta de datos*, agregando posibles nuevos datos adicionales; *compatibilizar las anomalías*, teniendo en cuenta los diferentes sistemas geodésicos y gravimétricos; *calcular las anomalías aire libre y Bouguer* de todos los datos, en el área de datos gravimétricos definida y *calcular la malla de anomalías medias* en un espaciamiento a definir entre 10'y 20'.

#### DATOS TOPOGRÁFICOS

El área de Uruguay es de aproximadamente 540 km x 450 km, presentando una altitud media máxima de 420 m. La siguiente Tabla 3, presenta las estadísticas del banco de elevaciones medias de Uruguay y el Rio de la Plata:

Tabla 3. Estadísticas del banco de datos de elevaciones

Estadística	Topografía	Batimetría	Total
Media	+ 71,74	-77,76	-3,01
Desvío Estándar	75,11	251,16	-
Máximo	425	-0,1	425
Mínimo	0	-2300	-2300
No. registros	68272	1375	69647

A efectos de considerar los efectos de terreno en una área mayor, se extrajeron altitudes del modelo global GTOPO30, el cual posee una resolución espacial de 1'x 1' (~ 1900 m x 1900 m). El modelo GTOPO30 tiene en la zona, áreas derivadas de una base topográfica matricial (DTED Digital Terrain Elevation Data, resolución horizontal de 90 m, error  $\pm 18$  m) y otras derivadas de una base de datos cartográfica vectorial (DCW, Digital Chart of the World, a escala 1/1:000.000, error  $\pm 97$  m). La Figura 3 presenta los datos disponibles para el cálculo, diferenciándose visualmente las dos fuentes usadas.

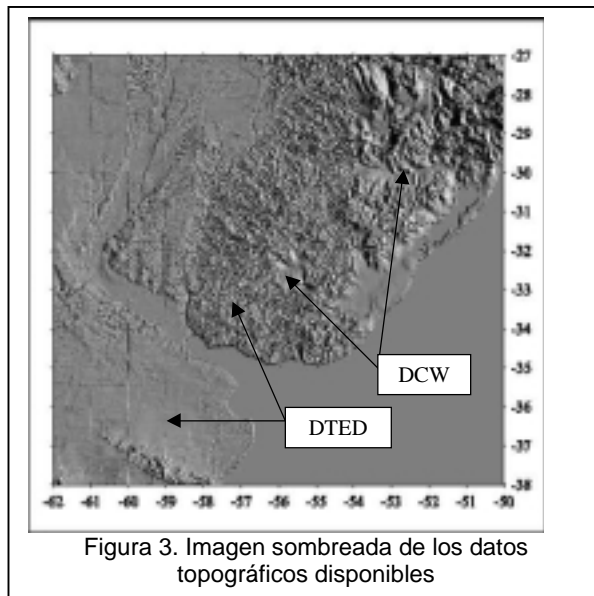


Figura 3. Imagen sombreada de los datos topográficos disponibles

#### CONCLUSIONES

Ha sido revisada la metodología y los datos disponibles para la determinación de un modelo geoidal de precisión centimétrica para Uruguay. Con referencia a la determinación hecha en 1994, se dispone de una mayor cantidad y calidad de datos gravimétricos, así como de un MNT de la región. Se espera completar la colecta y tratamiento de datos en el correr del año, quedando en condiciones de realizar la determinación durante el año 2000.

#### REFERENCIAS

- Blitzkow, D., Cintra, J.P., Servicio Geográfico Militar (SGM), 1994. *A determinação das alturas geoidais no Uruguai - Resultados presentes e perspectivas futuras. Informe Interno SGM, No. 1/94.*
- Gruber, TH., Bode, A. Reigber, CH., Schwinter P., 1997. *D-PAF Global Earth Gravity models based on ERS. In: Proceedings of 3<sup>rd</sup>. ERS Symposium on Space at the Service of our Environment.*
- Lemoine, F. G., Kenyon, S. C., Factor, J. K., Trimmer, R. G., Pavlis, N. K., Chinn, D. S., Cox S. M., Lutcke S. B., Torrence, M. H., Wang, Y. M., Williamson, R. G., Pavlis, E. C., Rapp, R. H., Olson, T. R., 1998. *The Development of the Joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) Geopotential Model EGM96. NASA/TP-1998-206861.*
- Sideris, M.G., 1994 y 1997. *Geoid Determinations by FFT Techniques. En: International School for the determination and Use of the Geoid, Milán, Italia y Rio de Janeiro, Brasil.*
- Subiza, W., Torge, W., Timmen, L., 1998. *The National Gravimetric Network of Uruguay. En: International Association of Geodesy Symposia. Geodesy, Geoid, Geodynamics and Antarctic, Volumen 119.*
- Subiza, W., Pérez Rodino R., Barbato F., Alves Costa, Sonia M, 1998b. *The Redefinition of the Geodetic Reference System of Uruguay into SIRGAS Frame, En: Advances in Positioning and References Frame, International Association of Geodesy Symposia, Volumen 118.*
- Subiza, W., 1999. *A avaliação de modelos geopotenciais para modelagem do geóide local. Pesquisas preliminares para Uruguay. Seminario II de calificación a ser presentado en el Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas. Universidade Federal do Paraná, Brasil.*
- Wenzel, G. -1998- *Ultra High Degree Geopotential Model GPM98A, B and C to Degree 1800. Paper to be submitted to the Bulletin of International Geoid Service.*