

# Um algoritmo prático de modelagem 3-D baseado na solução da equação acústica completa da onda

Sérgio Adriano Moura Oliveira

Laboratório de Engenharia e Exploração de Petróleo LENEP/UENF

## Resumo

Este trabalho apresenta a versão 3-D de um algoritmo para solução da equação acústica completa da onda, baseado no método das diferenças finitas. Este algoritmo foi idealizado para requerer um mínimo de operações extra para levar em conta as variações de densidade no meio. Também são exploradas técnicas de programação capazes de reduzir sencivelmente os custos computacionais de tal aplicação. Com isto, a modelagem por solução da equação da onda, que é uma poderosa ferramenta, pode se tornar mais prática para as aplicações da indústria do petróleo.

## Introdução

O crescente investimento em estudos sísmicos de reservatórios, tem criado a necessidade do uso de técnicas de modelagem que sejam capazes de tratar complexidades estruturais, bem como levar em conta o maior número possível de parâmetros petrofísicos. Além do mais, não raro é necessário levar em consideração os aspectos tridimensionais dos reservatórios de hidrocarbonetos. Quando este é o caso, o método do raio ainda é frequentemente usado como uma alternativa prática e barata para a modelagem 3-D. Todavia este método não é capaz de tratar descontinuidades cujo tamanho seja menor que a ordem de grandeza do comprimento de onda dominante e, por isto, não fornece as difrações que ocorrem nas bordas e descontinuidades das estruturas. Para modelagem da resposta sísmica de reservatórios, seria desejável um método preciso, capaz de fornecer todos os eventos presentes em dados reais. Uma alternativa para isto é lançar mão da solução numérica da equação da onda, porém este método é computacionalmente intensivo, o que pode torna-lo inviável para aplicações práticas de modelagem 3-D. Este trabalho apresenta um esquema explícito de solução da equação acústica da onda, baseado no método das diferenças finitas e que é capaz de levar em conta variações tanto de velocidade como de densidade no meio. Este esquema usa um mínimo de operações matemáticas sem, contudo, sacrificar a precisão dos resultados e caso a densidade seja constante por camada, é indicado um algoritmo capaz de reduzir bastante o tempo de computação requerido para esta aplicação.

## Esquema para solução da equação acústica completa da onda

A equação acústica completa da onda é dada pela expressão abaixo

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \nabla \rho \nabla p, \quad (1)$$

Sendo  $p$  pressão e  $\rho$  densidade. Caso esta última seja constante, o termo da direita se anula e temos então a equação acústica simples. Para este caso, um esquema explícito de diferenças finitas, já consagrada, pode ser obtido usando uma aproximação centrada, de segunda ordem, para derivada segunda do campo com relação ao tempo e aproximações de quarta ordem para os cálculos das derivadas segundas do campo com relação as variáveis espaciais (Mufti, 1990):

$$p_{i,j,k}^{n+1} = (c \Delta t)^2 [D_x^2 + D_y^2 + D_z^2] p_{i,j,k}^n + 2p_{i,j,k}^n - p_{i,j,k}^{n-1}. \quad (2)$$

Sendo  $p_{i,j,k}^n = p(\Delta x.i, \Delta y.j, \Delta z.k, \Delta t.n)$  e para os operadores de derivada de segunda ordem é adotada a seguinte aproximação (exemplo com relação a  $x$ ):

$$D_x^2 = \frac{-p_{i+2,j,k}^n + 16p_{i+1,j,k}^n - 30p_{i,j,k}^n + 16p_{i-1,j,k}^n - p_{i-2,j,k}^n}{12 \Delta x^2} \quad (3)$$

Para levar em conta a densidade, temos de adotar uma aproximação para as derivadas primeiras envolvidas nos operadores gradientes de  $p$  e  $\rho$ . Para isto, seria natural optar por uma aproximação também de quarta ordem (ver por exemplo Pinheiro, 1994). Porém esta representa um onus de 24 operações de soma/subtração e 16 multiplicações a mais em cada ponto da malha. Isto é muito quando se tem em mente modelagem 3-D, onde geralmente estão envolvidos milhões de pontos. Este número pode ser sencivelmente reduzido adotando-se aproximações apenas de segunda ordem para

as derivadas primeiras. Desta forma temos apenas 12 somas e 4 multiplicações a mais por cada ponto da malha. Uma questão que surge naturalmente é se a redução da ordem da aproximação para o cálculo das derivadas não afetaria a precisão dos resultados. Porém comparações com soluções exatas parecem indicar que esta redução não chega a ser significativa para os fins prticos a que se prope este algoritmo (Oliveira, 1998). O esquema inteiro á apresentado a seguir:

$$p_{i,j,k}^{n+1} = (c \Delta t)^2 [D_x^2 + D_y^2 + D_z^2] p_{i,j,k}^n + 2p_{i,j,k}^n - p_{i,j,k}^{n-1} + \frac{(c \Delta t)^2}{\rho_{i,j,k}} [D_x \rho_{i,j,k} D_x + D_y \rho_{i,j,k} D_y + D_z \rho_{i,j,k} D_z] p_{i,j,k}^n, \quad (4)$$

onde adotamos para os operadores de derivada primeira a seguinte aproximação:  $D_x p_{i,j,k}^n = \frac{p_{i+1,j,k}^n - p_{i-1,j,k}^n}{2\Delta x}$ . Na maioria dos modelos considerados em casos práticos, é assumido que a velocidade e densidade não variam continuamente ponto a ponto, mas sim que sejam constante por camada. Neste caso, o problema poderia ser resolvido impondo-se condições de contorno apropriadas ao longo das interfaces. Contudo, isto é dispensável no procedimento apresentado, pois este leva em conta naturalmente estas condições. Repare que as derivadas de  $\rho$ , segunda a aproximação usada, não se anula apenas nos pontos bem próximos às interfaces, de forma que para pontos localizados no interior das camadas, a última parcela de (4) acaba sendo nula. Tendo em mente este fato, os cálculos podem ser acelerados realizando as operações adicionais necessárias para levar em conta a densidade, somente nos pontos de interface. Em tais pontos, tendo sido  $p_{i,j,k}^{n+1}$  calculado previamente segundo o esquema (2), a atualização é feita então de acordo com a atribuição abaixo:

$$p_{i,j,k}^{n+1} \leftarrow p_{i,j,k}^{n+1} + \frac{(c \Delta t)^2}{\rho_{i,j,k}} [D_x \rho_{i,j,k} D_x + D_y \rho_{i,j,k} D_y + D_z \rho_{i,j,k} D_z] p_{i,j,k}^n. \quad (5)$$

A introdução destes termos adicionais parece não afetar a dispersão numérica nem a estabilidade do esquema, ou seja, aconselha-se adotar uma amostragem espacial de no mínimo cinco pontos por comprimento de onda mínimo e deve-se obrigatoriamente satisfazer a condição de estabilidade dada pela desigualdade (6) (caso contrário o algoritmo diverge). Por fim, é necessário introduzidas condições de contorno não irradiantes ao longo das bordas limitrofes do modelo. Este procedimento conjugado com alguns pontos de paredes absorvedoras consegue atenuar satisfatoriamente as reflexões indesejadas.

$$\left(\frac{c_{i,j,k} \Delta t}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{c_{i,j,k} \Delta t}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{c_{i,j,k} \Delta t}{\Delta z}\right)^2 \leq \frac{3}{4}. \quad (6)$$

### Exemplo

Como exemplo, apresentamos a modelagem sísmica envolvendo uma armadilha anticlinal de hidrocarbonetos Fig.(1). Estão presentes interfaces entre camadas de arenito contendo gás, óleo e água com significativos contrastes de densidade. Foi utilizado um pulso tipo Ricker com frequência dominante de 30 Hz. Para análise, foram tomados sismogramas ao longo das Seções A-B e C-D. No sismograma ao longo de C-D (Fig.2) observa-se claramente a reflexões no topo da armadilha (pico preto), reflexões no topo da camada de arenito com óleo (pico branco) e também a reflexão na base da armadilha (pico branco) contendo uma visível anomalia de amplitude. No sismograma ao longo da seção A-B (Fig.3) tabém observa-se a reflexão no topo da armadilha, reflexão no topo da camada de óleo e reflexão na base desta camada, porém agora este último evento está muito mais visível e pode ser observado independentemente da reflexão na base da armadilha. Na Fig.(4) é exibido um sismograma tomado sobre a seção A-B, mas que foi computado considerando a densidade constante e igual em todas as camadas. Neste caso as anomalias de amplitude se mostram muito mais fracas do que no exemplo anterior. Por fim vale ressaltar que para este modelo em particular, os cálculos para levar em conta as variações de densidade contribuíram com um aumento de apenas 1% no tempo total de computação.

### Conclusões

Este trabalho apresentou um algoritmo numérico para solução da equação acústica completa da onda. Este demonstrou precisar de muito pouco tempo extra de computação quando comparado ao tempo requerido para solução da equação acústica simples (sem variação de densidade). Os resultados apontam para uma precisão muito boa. O algoritmo é baseado em uma aproximação explícita de diferenças, o que traz a vantagem de simplificar sua implementação. Por último, vale ressaltar que a velocidade de execução pode ser aumentada significativamente se na programação for adotada a paralelização do código.

### Referências

- Pinheiro, V. N., 1994, *Modelamento de Dados Sísmicos de Reflexão e Transmissão em Meios Bifásicos*, Tese de Mestrado, Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia CPGG/UFBA.
- Mufti, I. R., 1990, *Large Scale Three-Dimensional Models and Their Interpretative Significance*, *Geophysics*, 55, 1166 - 1182.
- Oliveira, S. A. M., 1998, *Modelagem da Resposta Sísmica de Alta Resolução de Reservatórios de Hidrocarbonetos*: Tese de Doutorado, Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia CPGG/UFBA.

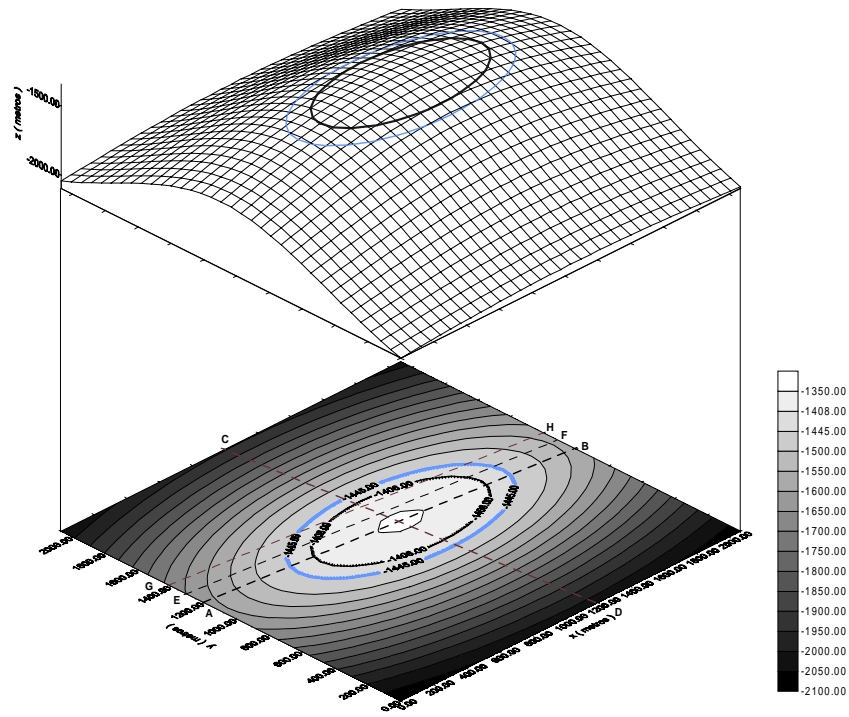


Figure 1: Representação 3-D de uma armadilha anticlinal de hidrocarbonetos. A curva de nível superior representa o contato gás - óleo, e a inferior, o contato óleo - água.

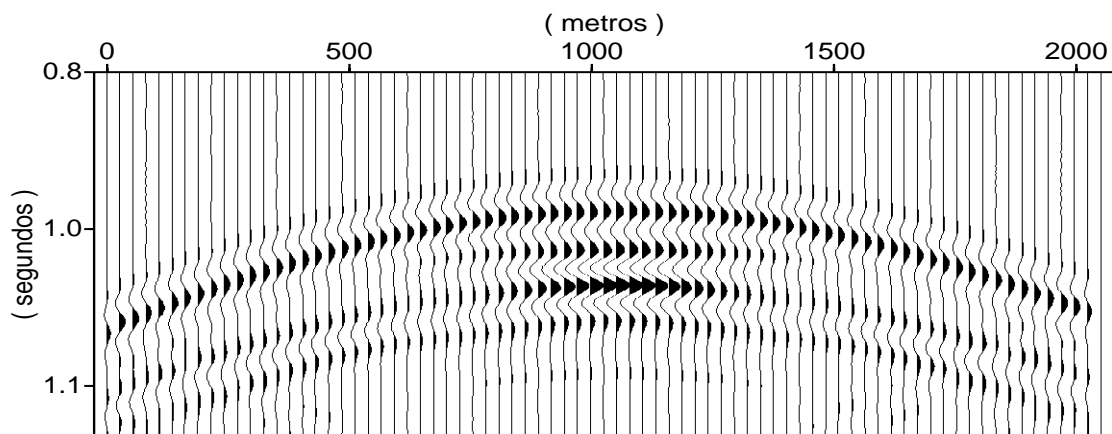


Figure 2: Sismograma ao longo da seção C-D

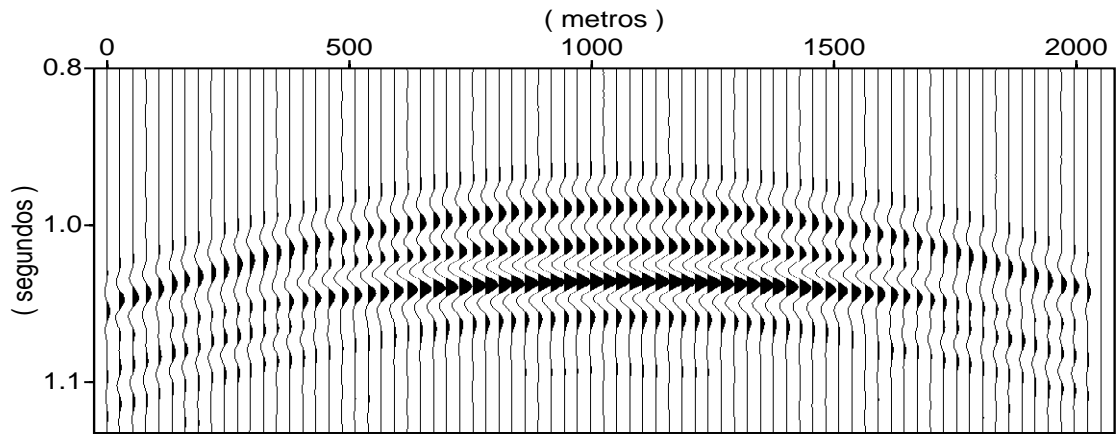


Figure 3: Sismograma ao longo da seção A-B

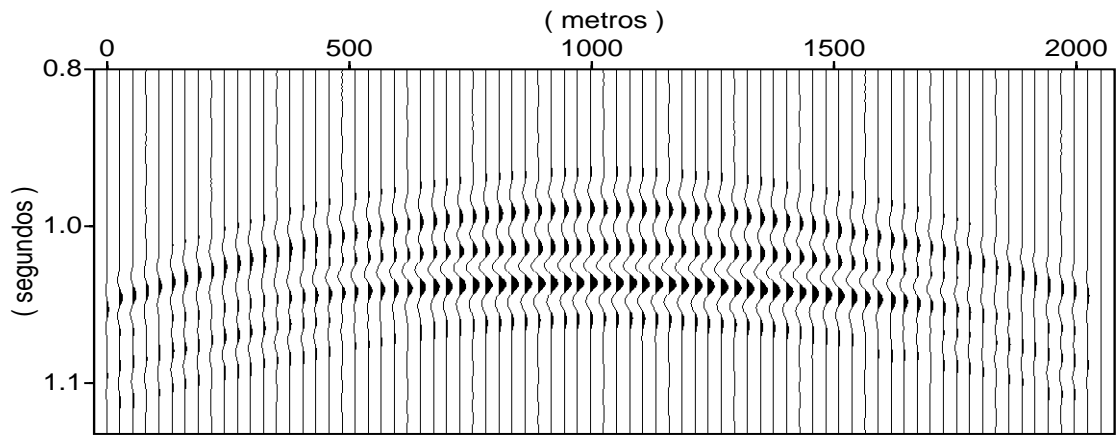


Figure 4: Sismograma ao longo de A-B obtido com a densidade sendo constante