



# Numerical phase/group velocity anisotropy in finite difference modeling and migration

Paulo Eduardo Miranda Cunha

PETROBRAS/UFBA

## Abstract

A modelagem e migração pelo método das diferenças finitas encontra no fenômeno da dispersão numérica um sério inconveniente para seu emprego na indústria do processamento sísmico. A eliminação deste limitante exige o emprego de uma malha de alta densidade, o que entretanto eleva enormemente o custo computacional mesmo para o estágio atual da tecnologia da computação. Aqui estudo detalhadamente o fenômeno da variação das velocidades de fase e grupo com a direção de propagação do campo de pressão, efeito este que mostraremos ser dependente das dimensões da célula  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  da malha retangular empregada e da frequência temporal do campo. A este efeito denominei de *Anisotropia Numérica*, pois se trata meramente de um fenômeno numérico asemelhado à anisotropia física real. Demonstraremos usando dados de *GPR, ground penetrating radar*, que, para campos, cuja parte preponderante da energia se propague próxima à direção vertical, poderemos obter redução no volume de memória e tempo de processamento sem grandes efeitos na qualidade dos resultados, pelo emprego da malha lateralmente esparsa.

## TEORIA

Partindo da equação da acústica da onda:

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2(\vec{r})} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = f(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_s), \quad (1)$$

onde  $u(\vec{r}, t)$  é o campo de pressão,  $\vec{r}_s$  a coordenada da fonte pontual e  $f(t)$  sua assinatura temporal. Passando para o domínio  $\omega, K_x, K_y, K_z$  teremos:

$$\omega(\vec{K}) = c|\vec{K}|, \quad c = c_{phase} = c_{group} = \frac{\omega(\vec{K})}{|\vec{K}|}, \quad (2)$$

estas equações 2 fornecem os valores exatos para a velocidade de fase  $c_{phase}$  e grupo  $c_{group}$ , se pudermos nos limitar a uma região suficientemente pequena do espaço para a qual o meio possa ser considerado como homogêneo. Efetuando uma amostragem espacial e temporal uniforme do campo por:

$$u(x, y, z, t) \rightarrow u(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \rightarrow u_{i,j,k}^n$$

$$f(t) \rightarrow f(n\Delta t) \rightarrow f^n,$$

onde:  $u(i, j, k)$  é o campo de pressão no ponto  $(i, j, k)$  da malha;  $(x_s, y_s, z_s)$  as coordenadas da fonte e  $f(t)$  sua amplitude em função do tempo, usando o operador espacial de quarta ordem de precisão:

$$(u_{xx})_{i,j,k}^n = \frac{1}{12\Delta x^2} [ -u_{i-2,j,k}^n + 16(u_{i-1,j,k}^n + u_{i+1,j,k}^n) - 30u_{i,j,k}^n - u_{i+2,j,k}^n ] + O\{(\Delta x)^4\}. \quad (3)$$

vide (Mufti, 1990) onde  $O\{(\Delta x)^4\}$  é o erro cometido na avaliação da 2ª derivada do campo, proporcional à quarta potência do intervalo da malha  $(\Delta x)$ . Usando o operador temporal de segunda ordem de precisão:

$$(u_{tt})_{i,j,k}^n = \frac{1}{(\Delta t)^2} (u_{i,j,k}^{n-1} - 2u_{i,j,k}^n + u_{i,j,k}^{n+1}) + O\{(\Delta t)^2\}, \quad (4)$$

substituindo estes operadores Eq. 3 e Eq. 4 na equação acústica da onda 1 e definindo:

$$a_x = \left( \frac{c_{i,j,k}\Delta t}{\Delta x} \right)^2, \quad a_y = \left( \frac{c_{i,j,k}\Delta t}{\Delta y} \right)^2, \quad a_z = \left( \frac{c_{i,j,k}\Delta t}{\Delta z} \right)^2, \quad (5)$$

então, a equação 6 poderá ser expressa como:

$$u_{i,j,k}^{n+1} = O_{i,j,k}^n + 2u_{i,j,k}^n - u_{i,j,k}^{n-1} + f^n \delta(i - i_s) \delta(j - j_s) \delta(k - k_s), \quad (6)$$

onde  $O_{i,j,k}^n$  representa o operador de propagação;  $u_{i,j,k}^n$  o campo **presente** na iteração  $n$ ;  $u_{i,j,k}^{n-1}$  o campo **passado** na iteração  $n - 1$ ; e  $u_{i,j,k}^{n+1}$  o campo **futuro** na iteração  $n + 1$ . Admitindo a solução harmônica para o campo propagante:

$$u_{i,j,k}^n = u_o e^{i(\omega n \Delta t - K_x i \Delta x - K_y j \Delta y - K_z k \Delta z)}, \quad (7)$$

substituindo na equação discreta da onda (Eq. 6) e dividindo todos os termos por  $u_{i,j,k}^n$ , após alguma álgebra obtemos:

$$\omega(\vec{K}, \Delta x, \Delta y, \Delta z) = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left\{ \frac{a_x}{12} [ 16 \sin^2 \frac{K_x \Delta x}{2} - \sin^2 K_x \Delta x ] + \frac{a_y}{12} [ 16 \sin^2 \frac{K_y \Delta y}{2} - \sin^2 K_y \Delta y ] + \frac{a_z}{12} [ 16 \sin^2 \frac{K_z \Delta z}{2} - \sin^2 K_z \Delta z ] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (8)$$

verificamos assim que a frequência angular temporal torna-se função do espaçamento da malha

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$  e do vetor frequência angular espacial  $\vec{K}$ , ou seja  $\omega \equiv \omega(\vec{K}, \Delta x, \Delta y, \Delta z)$ . A velocidade de propagação das superfícies de fase constante para o campo,  $u_{i,j,k}^n$ , monocromático ( $\omega = \omega_o$ ) é obtida dividindo ambos os lados da equação da dispersão discreta Eq. 8 pelo módulo da frequência angular espacial  $K$ , obtendo a equação para a velocidade de fase:

$$c_f = \frac{\omega(\vec{K}, \Delta x, \Delta y, \Delta z)}{K}. \quad (9)$$

A velocidade de propagação da energia, *velocidade de grupo*, é o gradiente da função frequência angular no domínio  $\vec{K}$ :

$$c_g = \nabla_k \omega(\vec{K}, \Delta x, \Delta y, \Delta z), \quad (10)$$

representando o gradiente em coordenadas esféricas no domínio da frequência angular,  $\vec{K}$ :

$$\nabla \omega(\vec{K}) = \frac{\partial \omega(\vec{K})}{\partial K} \hat{e}_k + \frac{1}{K} \frac{\partial \omega(\vec{K})}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{K \sin \theta} \frac{\partial \omega(\vec{K})}{\partial \phi} \hat{e}_\phi. \quad (11)$$

Doravante, limitaremos nossa análise apenas à componente radial da velocidade de grupo, paralela à direção do vetor  $\vec{K}$ , ou seja, perpendicular à frente de onda correspondente à superfície de fase constante:

$$c_g = \frac{\partial \omega(\vec{K}, \Delta x, \Delta y, \Delta z)}{\partial K}. \quad (12)$$

### ANISOTROPIA NUMÉRICA

Ao observarmos atentamente as equações para velocidade de fase 9 e de grupo 12, verificaremos que ambas são funções do vetor  $\vec{K}$  e, portanto, de sua direção, a qual, para meios fisicamente isotrópicos, será a direção de propagação da onda. Concluímos, então, que embora o meio simulado seja isotrópico, as velocidades de fase e de grupo terão valores diferentes para diferentes direções de  $\vec{K}$ . Deste modo, o meio simulado, embora não seja, se comportará como um meio anisotrópico. A este fenômeno denominaremos *anisotropia numérica*. A influência da direção de propagação na razão  $c_f/c$  e  $c_g/c$  já foi mencionada na bibliografia como por exemplo em (Alford et al., 1974), todavia, nossa intenção é um estudo mais detalhado deste tema, objetivando sua aplicação na redução do gasto de memória e tempo de processamento. Se normalizarmos as velocidades de fase e grupo:  $c_{fn} = \frac{c_f}{c}$  e  $c_{gn} = \frac{c_g}{c}$ , definindo  $g_x, g_y, g_z$  como o número de intervalos em que é subdividido o comprimento de onda em cada direção da malha:

$$g_x = \frac{\lambda}{\Delta x}, \quad g_y = \frac{\lambda}{\Delta y}, \quad g_z = \frac{\lambda}{\Delta z}, \quad (13)$$

usando a frequência máxima esperada:  $\lambda = \frac{c}{f_{max}}$ , dimensionando  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  de acordo com as amostragens por comprimento de onda  $g_x, g_y, g_z$  desejadas para cada direção:

$$\Delta x = \frac{c}{f_{max} g_x}, \quad \Delta y = \frac{c}{f_{max} g_y}, \quad \Delta z = \frac{c}{f_{max} g_z}, \quad (14)$$

fixando  $K_z$  para condição de boa amostragem na direção vertical  $z$ , ou seja,  $g_z$  ótimo:  $K_z = \frac{2\pi}{g_z \Delta z}$ , fixando a superfície de frequência angular espacial constante  $|\vec{K}| = K_z$  e representando  $\vec{K}$  em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} K_x &= K \sin \theta \cos \phi, \\ K_y &= K \sin \theta \sin \phi, \\ K_z &= K \cos \theta, \end{aligned}$$

levando na equação 8 normalizada por  $c$  teremos:

$$\begin{aligned} c_{fn}(\vec{K}(\theta, \phi)) &= \frac{\omega(\vec{K}(\theta, \phi))}{cK} = \frac{2}{cK\Delta t} \sin^{-1} \\ &\left\{ \frac{a_x}{12} \left[ 16 \sin^2 \frac{K \sin \theta \cos \phi \Delta x}{2} - \sin^2(K \sin \theta \cos \phi \Delta x) \right] \right. \\ &+ \frac{a_y}{12} \left[ 16 \sin^2 \frac{K \sin \theta \sin \phi \Delta y}{2} - \sin^2(K \sin \theta \sin \phi \Delta y) \right] \\ &\left. + \frac{a_z}{12} \left[ 16 \sin^2 \frac{K \cos \theta \Delta z}{2} - \sin^2(K \cos \theta \Delta z) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (15) \end{aligned}$$

Repetindo os mesmos procedimentos para a velocidade de grupo normalizada:  $c_{gn} = \frac{c_g}{c} = \frac{1}{c} \frac{\partial \omega(\vec{K}(\theta, \phi))}{\partial K}$ . As figuras seguintes mostram a variação das velocidades normalizadas de fase e de grupo com a direção de propagação de ondas planas monocromáticas, mantida, entretanto, constante, a intensidade do vetor frequência angular espacial  $|\vec{K}|$ , ou seja, para comprimento de onda constante em todas as direções. A figura 1 mostra que, para  $g_x = g_y = g_z = 5.5$  significando 5.5 amostras por comprimento de onda, o comportamento, tanto da velocidade de fase quanto da velocidade de grupo, será praticamente isotrópico. Neste caso, como podemos observar, o valor normalizado de ambas as velocidades é próximo da unidade, indicando que:  $c_{fn} \approx c_{gn} \approx c$ . Na figura 2 a amostragem transversal da malha foi drasticamente reduzida para  $g_x = g_y = .875$ , enquanto a amostragem vertical foi mantida no valor ótimo,  $g_z = 5.5$ . Isto significa uma redução de 10 vezes no tempo de processamento e dispêndio de memória. Entretanto, como podemos observar pela figura, para a região interna de um cone de eixo principal paralelo à direção  $z$ , as velocidades serão próximas de  $c$ , o que não ocorre fora. Desta maneira, concluímos que as componentes do campo próximas da vertical se propagarão com velocidades aceitáveis. Este fato poderá ter utilidade na migração de campos gerados por estruturas profundas que se propaguem quase verticalmente.

### MALHA LATERALMENTE ESPARSA

Uma aplicação imediata das idéias desenvolvidas na seção anterior dá-se no incremento lateral do espaçamento  $\Delta x, \Delta y > \Delta z$  da malha 3-D ou 2-D, com o intuito de redução do volume de memória e de tempo de processamento. Para exemplificar este caso, nas figuras seguintes foi utilizado um algoritmo RTM 2-D modificado para migração pós-empilhamento. Migraremos dados *GPR*, *ground penetrating radar*. O levantamento foi realizado ao longo

da superfície de um rio, sendo que a seção escolhida mostra o fundo de canais fluviais cobertos por água e os depósitos de areias de deposição. A tabela 1 mostra os parâmetros de aquisição: A tabela 2 mostra

Table 1: Parâmetros do levantamento GPR

Item	Valor
freq. fonte	80 mhz
int. amostragem	1 ns
int. tiro	0.1 m
n. amostras	512
n. traços	1708
$c_{H_2O}$	0.033m/ns
comp.x	170.8 m

o dimensionamento da malha e a redução no tempo de processamento para 6 testes de migração. A seção

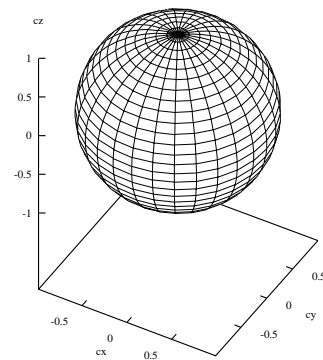
Table 2: Parâmetros de malha para os testes de migração

Teste	$dz(m)$	$dx(m)$	$n.tracos$	$T(2D)$	$T(3D)$
1	0.025	0.050	3416	1	1
2	0.050	0.050	1708	1/2	1/4
3	0.025	0.100	1708	1/2	1/4
4	0.025	0.200	854	1/4	1/16
5	0.025	0.400	427	1/8	1/64
6	0.025	0.800	213	1/16	1/256

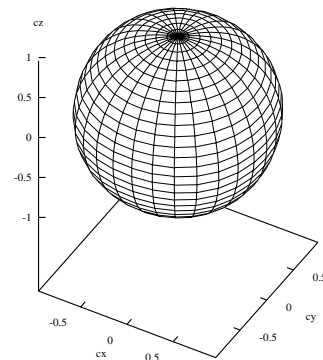
GPR após o levantamento tem 1708 traços com intervalo de amostragem de um nanosegundo, frequência da fonte de 80 mhz, 512 amostras por traço e intervalo entre Pontos de Tiro de 10 cm. A velocidade da lâmina d'água é  $0.033m/ns$  e a usada para migração  $0.0165m/ns$ , que corresponde à condição de imagem  $t/2$ , equivalente a  $c/2$ . A figura 3 mostra a seção migrada com o uso de um intervalo  $dx = 5cm, dz = 2.5cm$ . Podemos observar a boa qualidade do resultado. A figura 4 mostra a seção migrada com o uso de um intervalo  $dx = 5cm, dz = 5cm$ . Podemos observar que o incremento do espaçamento vertical da malha  $dz$  de  $2.5cm$  para  $5cm$  foi suficiente para a deterioração do resultado. Concluímos, assim, que o espaçamento  $dz = 2.5cm$  é o correto para a direção vertical. O número de traços para o teste número 5,  $dx = 40cm$ , figura 5, é 427, 1/8 do número de traços para o teste número 1,  $dx = 5cm$ , tomado como referência, conseqüentemente, 1/8 do tempo de processamento para migração 2-D e 1/64 do tempo para migração 3-D. Concluímos, assim, que o espaçamento  $dx = 40cm$  é possível e obteremos, neste caso, uma redução de 64 vezes no tempo de processamento.

## CONCLUSÕES

Estes estudos atestaram, como pudemos comprovar usando dados *GPR*, *ground penetrating radar*, 2D, que, para campos, cuja parte preponderante da en-



$$\text{Phase velocity: } c_{fn}(\vec{K}(\theta, \phi)) = \frac{ct}{c}$$



$$\text{Group velocity: } c_{gn}(\vec{K}(\theta, \phi)) = \frac{c_g}{c}$$

Figure 1:  $g_x = g_y = g_z = 5.5$

ergia se propague próxima à direção vertical, poderemos obter redução no volume de memória e tempo de processamento sem grandes efeitos na qualidade dos resultados, pelo emprego da malha lateralmente esparsa. Esta é a versão da migração reversa no tempo aos métodos de migração que fazem uso da equação *uni-direcional* da onda e, portanto, só propagam o campo na direção vertical.

## REFERÊNCIAS

- Alford, R. M., Kelly, K. R., and Boore, D. M., 1974, Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation: *Geophysics*, **6**, 843–852.
- Mufti, I. R., 1990, Large-scale three-dimensional seismic models and their interpretive significance: *Geophysics*, **55**, 1166–1182.

## AGRADECIMENTOS

à PETROBRAS e ao CPGG/UFBA pela oportunidade de realizar este trabalho.

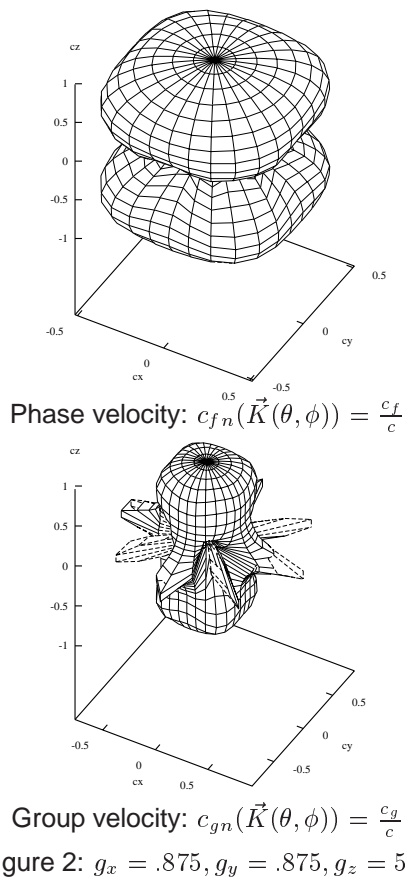


Figure 2:  $g_x = .875, g_y = .875, g_z = 5.5$

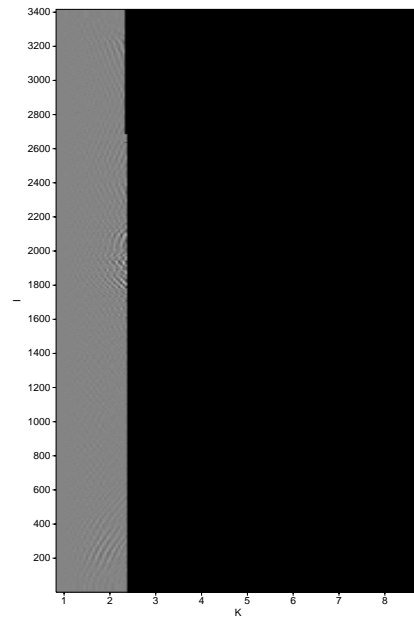


Figure 4: Seção migrada  $dx = 5cm, dz = 5cm$

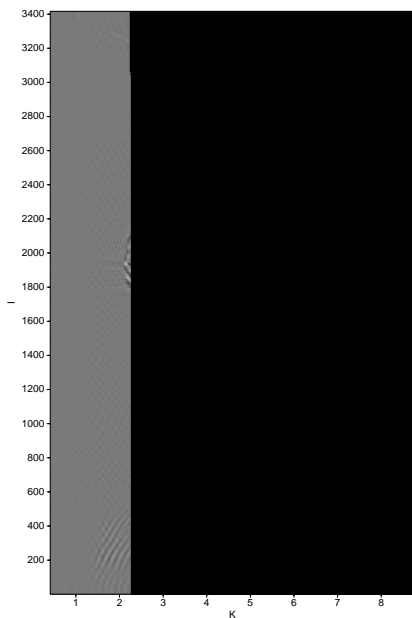


Figure 3: Seção migrada  $dx = 5cm, dz = 2.5cm$

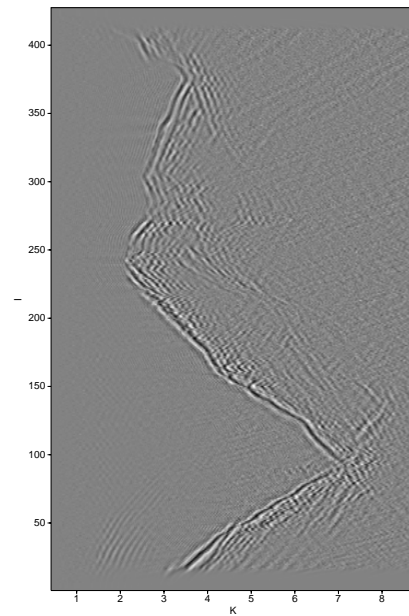


Figure 5: Seção migrada  $dx = 40cm, dz = 2.5cm$