



DECONVOLUÇÃO HOMOMÓRFICA APLICADA A DADOS SÍSMICOS

Maria de Valdivia C. N. Gomes e Lourenildo W. B. Leite

Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, UFPa, Belém - PA

Abstract

In this work, we deal with the application of a nonlinear deconvolution technique to seismic signals, proposed by Oppenheim (1965), which uses the theory of a class of nonlinear systems, that satisfy a generalized principle of superposition, called homomorphic systems. Such systems are particularly useful in separating signals which have been combined through the convolution operation.

This method offers the considerable advantage that no prior assumption about the nature of the seismic wavelet or the impulse response of the reflection path need be made, that is, it does not require the usual assumptions of a minimum-phase wavelet and a random distribution of impulses. On the other hand, the quality of the results obtained by the homomorphic analysis is very sensible to the signal/noise ratio, as demonstrated.

INTRODUÇÃO

A deconvolução homomórfica é uma técnica não linear para separação de sinais, que transforma uma combinação convolucional em uma combinação aditiva. A estratégia da análise homomórfica de sinais deve levar em conta tanto os modelos de composição dos sinais, como os objetivos da análise. As várias estratégias que têm sido exploradas para a análise sísmica são caracterizadas pelo fato de serem baseadas no modelo invariante no tempo. Portanto, o cepstro complexo do traço sísmico, $x(n)$, consiste de um componente associado com o pulso-fonte, mais um componente associado com a série refletora.

A estrutura do cepstro complexo é tal que, para um número de aplicações, o cepstro dos componentes do sinal tendem a ocupar intervalos distintos no tempo. Esta tendência permite a separação desses componentes por janelamento cepstral. Dentro deste contexto, deconvolução homomórfica se compara favoravelmente com a filtragem linear inversa, já que ela não requer o conhecimento detalhado de um dos componentes do sinal.

PRINCÍPIO GENERALIZADO DE SUPERPOSIÇÃO

É estabelecido para sistemas lineares, com L sendo o operador da transformação do sistema, para quaisquer duas entradas $x_1(n)$ e $x_2(n)$ e qualquer escalar c , que

$$L [x_1(n) + x_2(n)] = L [x_1(n)] + L [x_2(n)] \quad (1)$$

e

$$L [c x_1(n)] = c L [x_1(n)]. \quad (2)$$

Em diversas situações físicas, entretanto, encontramos sinais que podem ser representados em termos de componentes que estão combinados de acordo com uma regra sem ser a de adição, por exemplo, a convolução. Isto leva a consideração de classes de sistemas não lineares que obedecem a um *princípio generalizado da superposição* (Oppenheim, 1965). Para generalizar este princípio, denotamos pelo símbolo \oplus uma regra para combinar entradas, e por \otimes uma regra para combinação de entradas com escalares. Similarmente, \diamond denotará uma regra para combinação de saídas de sistema, e ∇ uma regra para combinar saída com escalares. Então, com T denotando a transformação do sistema, generalizamos as equações (1) e (2), requerendo que

$$T [x_1(n) \oplus x_2(n)] = T [x_1(n)] \diamond T [x_2(n)] \quad (3)$$

e

$$T [c \otimes x_1(n)] = c \nabla T [x_1(n)]. \quad (4)$$

Sistemas não lineares deste tipo são representados algebricamente por transformações lineares entre espaços vetoriais de entrada e saída e têm sido denominados de sistemas homomórficos. Todos os sistemas desta classe podem ser representados como uma cascata de três sistemas ilustrados na Figura 1, a qual é referida como a representação canônica dos sistemas homomórficos. O primeiro sistema, T_{\oplus} , tem a propriedade que

$$T_{\oplus} [x_1(n) \oplus x_2(n)] = T_{\oplus} [x_1(n)] + T_{\oplus} [x_2(n)] = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n) \quad (5)$$

e

$$T_{\oplus} [c \otimes x_1(n)] = c T_{\oplus} [x_1(n)] = c \hat{x}_1(n). \quad (6)$$

O sistema L é um sistema linear convencional. Assim,

$$L [\hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n)] = L [\hat{x}_1(n)] + L [\hat{x}_2(n)] = \hat{y}_1(n) + \hat{y}_2(n) \quad (7)$$

e

$$L [c \hat{x}_1(n)] = c L [\hat{x}_1(n)] = c \hat{y}_1(n). \quad (8)$$

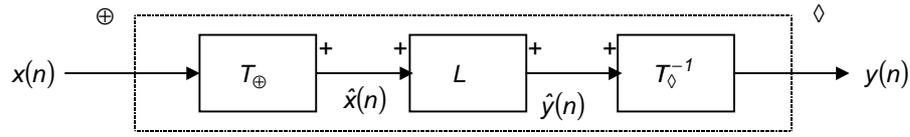


Figura 1 - Representação canônica dos sistemas homomórficos.

Finalmente, o sistema T_{\diamond}^{-1} transforma a operação de adição para a de \diamond . Sendo assim,

$$T_{\diamond}^{-1}[\hat{y}_1(n) + \hat{y}_2(n)] = T_{\diamond}^{-1}[\hat{y}_1(n)] \diamond T_{\diamond}^{-1}[\hat{y}_2(n)] = y_1(n) \diamond y_2(n) \quad (9)$$

e

$$T_{\diamond}^{-1}[c \hat{y}_1(n)] = c \nabla T_{\diamond}^{-1}[\hat{y}_1(n)] = c \nabla y_1(n). \quad (10)$$

Uma vez fixado o sistema T_{\oplus} pelas operações \oplus e \diamond , o mesmo é característico da classe e é, então, chamado de sistema característico para a operação \oplus . Similarmente, T_{\diamond} é o sistema característico para a operação \diamond . Portanto, é claro que todos os sistemas homomórficos com as mesmas operações de entrada e saída diferem somente na parte linear. Este resultado é de fundamental importância, porque implica que, uma vez determinados os sistemas característicos para a classe, ficamos com um problema de filtragem linear.

SISTEMAS HOMOMÓRFICOS PARA CONVOLUÇÃO

Uma importante classe de técnicas de análise sísmica é baseada na representação de um sinal sísmico como uma convolução entre componentes. Um método comum para a separação dos componentes de tais sinais é a filtragem linear inversa. Infelizmente, visto que sistemas lineares não são combinados com a estrutura das combinações convolucionais, a filtragem inversa requer conhecimento detalhado de um dos componentes do sinal. Como uma alternativa, podemos considerar uma classe de sistemas homomórficos que obedecem um princípio generalizado da superposição para convolução. Qualquer sistema não linear T_* que satisfaz a propriedade da superposição convolucional é chamado de sistema homomórfico para convolução. Consideremos sequências combinadas através da convolução

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k) = x_1(n) * x_2(n). \quad (11)$$

O sistema característico, T_* , tem a propriedade

$$T_*[x_1(n) * x_2(n)] = T_*[x_1(n)] + T_*[x_2(n)] = \hat{x}_1(n) + \hat{x}_2(n) \quad (12)$$

e

$$T_*[c \otimes x_1(n)] = c T_*[x_1(n)] = c \hat{x}_1(n). \quad (13)$$

A chave para a representação matemática do sistema característico T_* é baseada no fato de que a transformada-Z de uma convolução de duas sequências é igual ao produto das transformadas-Z de cada uma das sequências. Assim, considerando a equação (11), temos que

$$X(z) = X_1(z) X_2(z). \quad (14)$$

Uma vez que a função $X(z)$ é normalmente complexa, o logaritmo complexo deve ser empregado. Por outro lado, transformadas-Z são transformações lineares no sentido convencional, bem como transformações homomórficas entre espaços vetoriais convolucionais e multiplicativos. Assim, temos

$$\hat{X}(z) = \ln[X(z)] = \ln[X_1(z) X_2(z)] = \ln[X_1(z)] + \ln[X_2(z)]. \quad (15)$$

Se $\hat{X}(z) = \ln[X(z)]$ é uma transformada-Z bilateral, então, ela tem uma expressão em série de Laurent, dada por

$$\hat{X}(z) = \ln[X(z)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{x}(n) z^{-n}, \quad (16)$$

com uma região de convergência que inclui o círculo unitário. Isto é, $\hat{X}(z)$ deve ser analítica em uma região que inclui o círculo unitário. Visto que a fase de um número complexo é uma função plurívoca, a sua continuidade não depende somente das propriedades específicas de $x(n)$, mas também da definição do logaritmo complexo.

A representação matemática do sistema característico inverso T_*^{-1} resulta simplesmente a partir da representação de T_* . Temos por definição que

$$T_*^{-1}[T_*[x(n)]] = x(n). \quad (17)$$

Dadas as representações matemáticas para os sistemas característico T_* e seu inverso T_*^{-1} , o que resta para ser especificado é o sistema linear, L . Teoricamente, qualquer sistema que obedece a superposição para adição, pode ser usado naquele sistema canônico. Entretanto, na prática, encontramos que uma classe particular de sistemas lineares é mais utilizada. Esse sistema tem uma representação no domínio do tempo como

$$\hat{y}(n) = l(n)\hat{x}(n), \quad (18)$$

CEPSTRO COMPLEXO

A saída $\hat{x}(n)$ do sistema T_* é denominada de *cepstro complexo* da entrada $x(n)$. A palavra cepstro foi introduzida no trabalho de Bogert et al. (1963) para a detecção de ecos, onde a parte real do logaritmo do espectro de amplitude do sinal foi denominada como cepstro por paráfrase direta da palavra espectro. Por outro lado, a saída do sistema T_* é referido como cepstro complexo, pelo fato de requerer o uso do logaritmo complexo. O termo complexo foi adicionado por Oppenheim (1965) para enfatizar quando o cepstro é computado, utilizando tanto as informações de amplitude como de fase contidas em $x(n)$. É importante dizer, entretanto, que o cepstro complexo de uma sequência real é também uma sequência real.

A fim de vermos como podemos empregar sistemas homomórficos convolucionais, devemos considerar as propriedades do cepstro complexo descritas a seguir (Tribolet, 1979):

- (a) O cepstro complexo decai, no mínimo, tão rápido quanto $1/n$;
- (b) O cepstro complexo de uma sequência de duração finita, jamais terá duração infinita;
- (c) O cepstro complexo de uma sequência de fase-mínima é causal;
- (d) O cepstro complexo de uma sequência de fase-máxima é anti-causal;
- (e) O cepstro complexo de um pulso cujo espectro é suave, tende a ficar concentrado ao redor de baixos valores de tempo;
- (f) O cepstro complexo de uma sequência de impulsos periódicos é também uma sequência de impulsos periódicos, com o mesmo período.

Essas propriedades são extremamente úteis em várias aplicações, de vez que elas nos permitem prever as características cepstrais de uma grande classe de sequências de impulsos, dada uma quantidade mínima de conhecimento da estrutura temporal correspondente.

Na deconvolução homomórfica, temos como objetivo a filtragem de um sinal composto através de um sistema homomórfico, a fim de recuperar um de seus componentes como saída. Para isto, envolvemos duas considerações básicas. A primeira é que os componentes do sinal ocupam intervalos separados no domínio cepstral, consideração válida para uma classe grande de modelos de sinais, onde um dos componentes é um pulso com espectro suave e o outro é uma sequência de impulsos periódicos, ou de fase-mínima, ou de fase-máxima.

A segunda consideração envolve o desenho da janela cepstral. Esta, normalmente, requer simplesmente a estimativa de uns poucos parâmetros, tais como o período de uma sequência de impulsos periódicos, ou o primeiro tempo de chegada de uma sequência de fase-mínima. Esta estimativa pode, frequentemente, ser feita tanto através de considerações físicas, como por estimativa direta no domínio cepstral. Sob esta ótica, comparamos favoravelmente a deconvolução homomórfica com métodos de filtragem linear inversa, visto que a mesma não requer conhecimento de um dos componentes do sinal.

Sequências de impulsos de fase-mista apresentam uma estrutura complicada, tornando necessária a prática de ponderar exponencialmente os dados, a fim de garantir uma estrutura tão simples e predizível quanto possível, contribuindo assim para a separação das componentes do sinal no domínio cepstral, utilizando a técnica, primeiro sugerida por Schafer (1968), amplamente utilizada em deconvolução sísmica

$$x_{pon} = \alpha^n x(n), \quad (19)$$

onde α é real e positivo. Portanto, a escolha de um fator de ponderação exponencial α^n , suficientemente pequeno, de tal forma que todos os zeros que se localizam fora do círculo unitário, sejam movidos para o seu interior, converte uma sequência de fase-mista em fase-mínima, introduzindo assim, um grau de liberdade extra na análise homomórfica de sinais, em função de que a sequência de impulsos sendo de fase-mínima tem uma estrutura cepstral que pode ser facilmente determinada.

RESULTADOS OBTIDOS

A fim de ilustrar as potencialidades e as limitações da análise homomórfica, mostramos nas Figuras 2a, 2b e 2c, respectivamente, o pulso-fonte $w(n)$, representado por uma função Berlage, a resposta do meio ao impulso $h(n)$ representada por uma sequência de impulsos, contendo informação sobre a estrutura em subsuperfície, o sismograma sintético $x(n)$, obtido através do modelo convolucional descrito pela expressão (11).

Uma vez que a função fase calculada pelos algoritmos de transformada rápida de Fourier é uma função descontínua. Assim, a fim de que possamos alcançar a condição de que o sistema homomórfico T_* seja único, procedemos o desdobramento, ou restauração, da fase do sismograma, tornando-a contínua, seguida da retirada da tendência linear.

Na Figura 2d mostramos o cepstro do sismograma sintético ponderado exponencialmente com $\alpha = 0,95$, $\hat{x}(n)$, no qual podemos observar que a informação relacionada ao pulso-fonte é compactada na origem, ao redor de zero, enquanto que a contribuição referente à refletividade se dá para valores maiores de n se afastando da origem e estando bem separada da anterior. Para sinais sísmicos, considerados como sendo o resultado da convolução de um pulso-fonte com uma sequência de impulsos, esta observação é geralmente verdadeira. Assim, observamos que os componentes do sinal podem ser removidos simplesmente através da filtragem linear. Para ilustrar este ponto as figuras 2e e 2f mostram o pulso-fonte recuperado e a função refletividade simples recuperada mostrando o bom desempenho do método após a retirada da ponderação exponencial.

A adição de ruído complica o cálculo de uma curva de fase suave, e desde que o cepstro complexo depende da

contribuição da componente de fase da sequência de entrada, a simplicidade do cepstro complexo de uma sequência sem ruído, tal como é ilustrado na Figura 2d, é destruída. Entretanto, desde que a sequência de impulsos seja transformada em fase-mínima, por ponderação exponencial, a porção do cepstro complexo próxima a $n=0$, pode ainda ser usada para recuperar o pulso-fonte sísmico. A Figura 2g mostra o sismograma sintético da Figura 2c juntamente com o ruído aleatório somado, para uma razão sinal/ruído $S/N = 15,65$, medida pela razão das variâncias. Após a ponderação exponencial com $\alpha = 0,95$, calculamos o cepstro complexo do traço ponderado exponencialmente, para posterior filtragem linear, cujo resultado é apresentado na Figuras 2h e 2i. O pulso-fonte recuperado a partir da porção inicial do cepstro, ilustra um aspecto importante da filtragem homomórfica. Embora ele agora apresente ligeira deformação, provocada em decorrência do ruído, ainda apresenta grande semelhança com o original. Entretanto, a informação da série refletora é praticamente imersa em ruído, embora o primeiro refletor seja bem resolvido, tornando assim esta estimativa praticamente sem uso. Desta forma, o pulso sísmico deconvolvido homomórficamente é muito menos sensível ao ruído aditivo do que a sequência de impulsos deconvolvida.

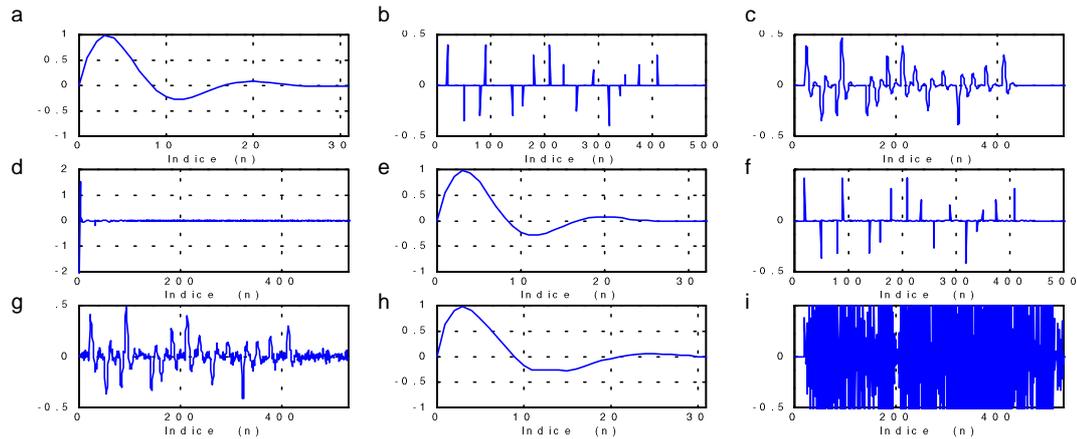


Figura 2 - (a) Pulso-fonte representado pela função Berlage; (b) Função refletividade simples; (c) Sismograma sintético; (d) Cepstro complexo do sismograma ponderado com $\alpha = 0,95$; (e) Pulso-fonte recuperado; (f) Função refletividade simples recuperada; (g) Sismograma sintético com ruído aditivo ($S/N = 15,65$); (h) Pulso-fonte recuperado apresentando ligeira deformação; (i) Função refletividade simples não recuperada.

CONCLUSÕES

Embora na sismica de exploração o pulso-fonte seja frequentemente considerado como sendo de fase-mínima, esta suposição não pode ser feita no caso da sismologia de terremotos. A deconvolução homomórfica aparece como um método poderoso de recuperação do pulso-fonte e, portanto, também da resposta do meio ao impulso. Mais importante, esta técnica remove a necessidade de fazermos as considerações usuais de um pulso de fase-mínima e de uma sequência de impulsos aleatória, uma vez que componentes de fase-máxima e de fase-mista são deconvolvidos tão facilmente quanto os de fase-mínima. Portanto, a deconvolução por filtragem homomórfica é um método atrativo e complementar, já que em primeiro lugar, reduz uma operação de convolução a uma superposição aditiva das componentes, e em segundo lugar, frequentemente alcança a separação das componentes individuais no domínio cepstral.

O ruído aditivo pode causar grandes problemas no uso do método homomórfico, porque é difícil determinar seu efeito e posição no cepstro complexo. O cálculo do cepstro complexo converte sequências que são convolvidas em sequências que são somadas, porém não é óbvio o que acontece para o ruído aditivo neste processamento. A qualidade dos resultados obtidos pela análise homomórfica é, assim, muito sensível à razão sinal/ruído com distribuição normal, por causa dos efeitos indesejáveis do ruído no espectro de fase.

REFERÊNCIAS

- Bogert, B. P.; Healy, M. J.; Tukey, J. W. 1963. *The Quefrency Analysis of time Series for Echoes: Cepstrum, Pseudo-Auto-covariance, Cross-Cepstrum, and Saphe Cracking. Time Series Analysis.* New York, John Wiley & Sons, Inc.
- Gomes, M. V. C. N. 1998. *Aplicação de Deconvolução Homomórfica a Dados Sísmicos.* Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências. Tese (Mestrado em Geofísica).
- Oppenheim, A. V. 1965. *Superposition in a Class of Nonlinear systems.* Technical Report; 432. Cambridge, Research Laboratory of Electronics, M.I.T.
- Schafer, R. W. 1968. *Echo Removal by Discrete Generalized Linear Filtering.* Technical Report; 466. Cambridge, Research Laboratory of Eletronics, M. I.T.
- Triboleet, J. M. 1979. *Seismic Applications of Homomorphic Signal Processing.* New Jersey, Prentice Hall.