SBGf38299

TRAÇADO CINEMÁTICO DE RAIOS PARA ONDAS SUPERFICIAIS PROPAGANDO-SE EM UM MEIO ANISOTRÓPICO, CONSIDERANDO UMA TERRA ELÍPTICA

Fredy Alex Villaorduña Artola e João Willy Corrêa Rosa

Instituto de Geociências, Universidade de Brasília

Abstract

Aqui, apresentamos os sistemas de equações diferenciais que permitem fazer o traçado cinemático dos raios sísmicos propagando-se em um meio anisotrópico, considerando o modelo de Terra elíptica com raio equatorial constante. Apresentamos duas formas de abordagens. A primeira, desconsiderando a direção da velocidade de grupo. Aqui, será necessário conhecer explicitamente a função de dispersão. A segunda forma,considerando a direção do vetor velocidade de grupo. Neste segundo caso, não será preciso conhecer explicitamente a função de dispersão. Aqui, o sistema cinemático aparecerá como função do "ângulo de anisotropia"

INTRODUÇÃO

Em outro trabalho paralelo a este, tratamos o problema da propagação de ondas superficiais em meios anisotrópicos para o modelo de Terra plana, cuja aplicação é restrita para casos quando modelamos percurso de raios para distâncias menores que 100 km (Aki e Richards, 1979).

Aqui, mostramos as equações do traçado de raios para o estudo de problemas globais. Neste caso, o uso de coordenadas cartesianas planas não é mais adequado, pois devemos considerar o efeito da curvatura da Terra. Para isto, como primeira aproximação, desenvolvemos a cinemática do raio sobre um modelo de Terra esférica, para o qual usamos coordenas esféricas. Logo, introduzimos a estas equações as correções respectivas devido ao efeito da elipticidade da Terra. Estas correções são deduzidas considerando a Terra uma elipsoide com raio equatorial constante. As deduções matemáticas das correções devido à geometria do modelo e à representação mercador do traçado dos raios foram baseados nos trabalhos de Richardus e Adler (1974) e Yomogida (1985). Exceto as considerações geométricas do modelo, a metodologia e os conceitos usados no caso da modelagem de percursos do raio em um modelo de Terra plana, são válidos também para o presente caso.

As componentes do vetor número de onda são expressos como k_α e k_ϕ, onde α e ϕ representam a co-latitude e a longitude.

TRAÇADO DE RAIOS SEM CONSIDERAR A DIREÇÃO DO VETOR VELOCIDADE DE GRUPO

Seguindo exatamente a lógica do primeiro trabalho, a função de dispersão, que representa a Hamiltoniana do nosso sistema, pode ser expresso como:

$$D = H = \frac{1}{2}\left[k^2(\omega,\alpha,\phi,\theta(k_\alpha,k\phi)\right] - \left[\left(\frac{k_\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{k_\phi}{a\,\mathrm{sen}\,\alpha}\right)^2\right] = 0 \qquad (1)$$

As equações canônicas da equação Hamilton - Jacobi (Landau, 1978) , usando coordenadas esféricas, podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \left(\dfrac{\partial D}{\partial k}\right)\dfrac{\partial k}{\partial k_\alpha} + \dfrac{\partial D}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial k_\alpha} \\ \dfrac{d\phi}{dt} = \left(\dfrac{\partial D}{\partial k}\right)\dfrac{\partial k}{\partial k\phi} + \dfrac{\partial D}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial k_\phi} \\ \dfrac{dk_\alpha}{dt} = -\left[\dfrac{\partial D}{\partial k}\dfrac{\partial k}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial D}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial D}{\partial \alpha}\right] \\ \dfrac{dk_\phi}{dt} = -\left[\dfrac{\partial D}{\partial k}\dfrac{\partial k}{\partial \phi} + \dfrac{\partial D}{\partial \theta}\dfrac{\partial \theta}{\partial \phi} + \dfrac{\partial D}{\partial \phi}\right] \end{cases} \qquad (2)$$

Executando todas as derivadas parciais do sistema (2), obtemos:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{k}{a}\left(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial\theta}\right)$$
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{k}{a\operatorname{sen}\alpha}\left[\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial\theta}\cos\theta\right]$$
$$\frac{dk_\alpha}{dt} = k^2\left\{\frac{\cos\alpha\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\alpha}\left[\operatorname{sen}\theta + \left(\frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial\theta}\right)\cos\theta\right] + \frac{1}{k}\frac{\partial k}{\partial\alpha}\right\} \qquad (3)$$
$$\frac{dk_\phi}{dt} = k\frac{\partial k}{\partial\phi}$$

O sistema (3) permite fazer o traçado dos raios. Para isto, só é necessário conhecer as variações do vetor numero de onda com relação ao azimute e às coordenadas esféricas. Aqui, θ é o azimute do vetor número de onda.

TRAÇADO DE RAIOS USANDO "ÂNGULO DE ANISOTROPIA"

O sistema pode ser expresso também em termos do "ângulo de anisotropia" que foi definido, no primeiro trabalho, como o ângulo formado entre os vetores velocidade de fase e velocidade de grupo. A velocidade de grupo, em coordenadas esféricas, pode ser expressa como:

$$U = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\frac{\partial D}{\partial\theta}\right)^2} \qquad (4)$$

O fator $\left(\frac{\partial D}{\partial k}\right)$ corresponde à velocidade de grupo quando o meio é isotrópico. Vemos que, para o caso do meio anisotrópico, aparece um fator adicional $\left(\frac{1}{k}\frac{\partial D}{\partial\theta}\right)$ que está justamente relacionado com a variação da função de dispersão em relação ao azimute. Este fator controla o "ângulo de anisotropia", θ_a. Como é óbvio, quando $\theta_a = 0$, estaremos no caso dos raios se propagando num meio isotrópico, onde $\left(\frac{1}{k}\frac{\partial D}{\partial\theta}\right) = 0$. Introduzimos $dt = \frac{ad\Omega}{U}$ no sistema (2), onde *a* é o raio da Terra, e $ad\Omega$ é um percurso esférico infinitesimal. Assim:

$$\left(\frac{1}{k}\frac{\partial D}{\partial\theta}\right) \qquad (5)$$

O sistema (5) está expresso, explicitamente, em função do "ângulo de anisotropia" e das variações da velocidade de fase em relação ao azimute θ e às coordenadas esféricas (α,ϕ). O valor do "ângulo de anisotropia" pode ser obtido a partir da velocidade de fase. Para isto, só é necessário conhecer a variação da velocidade de fase em relação ao azimute,

$$\theta_a = tg^{-1}\left[\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial\theta}\right)\right] \qquad (6)$$

Finalmente, obtemos:

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{d\Omega} = \cos\left\{\theta + tg^{-1}\left[\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial c}{\partial \theta}\right)\right]\right\} \\ \dfrac{d\phi}{d\Omega} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}\left\{\theta + tg^{-1}\left[\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial c}{\partial \theta}\right)\right]\right\} \\ \dfrac{1}{k}\dfrac{dk_\alpha}{d\Omega} = a\left[\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\operatorname{sen}^2\theta + \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial c}{\partial \theta}\right)\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial c}{\partial \alpha}\right)\right]\dfrac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial c}{\partial \theta}\right]^2 + 1}} \\ \dfrac{1}{k}\dfrac{dk_\phi}{d\Omega} = -\dfrac{1}{c}\left(\dfrac{\partial c}{\partial \phi}\right)a\dfrac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial c}{\partial \theta}\right]^2 + 1}} \end{cases} \qquad (7)$$

O sistema (7) é assim outra forma de representar o sistema traçador de raios.

CORREÇÃO PELO EFEITO DA ELIPTICIDADE

Para deduzir as relações que definem a correção e a transformação usamos os procedimentos seguidos por Richardus e Adler (1974) e Yomogida (1985), de onde se obtém os novos valores para a co-latitude mercador e para a velocidade de fase:

$$\overline{\alpha} = \ln\left(tg\,\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\ln\left(\frac{1-\varepsilon\cos\alpha}{1+\varepsilon\cos\alpha}\right) = \ln\left[tg\,\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1+\varepsilon\cos\alpha}{1-\varepsilon\cos\alpha}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right] \qquad (8)$$

$$\overline{c}(\overline{\alpha},\phi) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\alpha}}{a\operatorname{sen}\alpha}\,c(\alpha,\phi) \qquad (9)$$

Então, as relações (8) e (9) permitem calcular a projeção mercador para um modelo geométrico de Terra elíptica com raio equatorial constante, o que fornece as equações básicas necessárias para, usando o sistema de equações (7), traçar os raios em um modelo de Terra elipsoidal e anisotrópica.

Com isto, terminamos esta parte de nosso trabalho que tinha como objetivo a determinação das equações gerais para o traçado de raios de ondas superficiais em um meio anisotrópico heterogêneo considerando o planeta como tendo a forma de um elipsóide com raio equatorial constante.

CONLUSÕES

Todo o desenvolvimento considerado para o caso do modelo de Terra plana, desenvolvido em um trabalho paralelo, é válido também para o caso deste trabalho, exceto as implicações relacionadas com a geometria da Terra do nosso modelo elíptico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aki, K. e P. Richards (1979) *Quantitative seismology, theory and methods, Freeman, San Francisco.*

Landau, L. (1978) *Física teórica (Mecânica), Editora Mir, Moscou.*

Richardus, P, e R. K. Adler (1972) *Map projections for geodesists, cartographers and geographers, North - Holland Publishing Comp., Amsterdan.*

Spieguel, M. (1993) *Advanced mathematics for engineers and scientists, Schaum`s outline series, McGraw-Hill, New York.*

Yomogida, K. (1985) *Amplitude and phase variations of surface waves in laterally heterogeneous Earth: Ray - and beam - theoretical approach, Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology.*

Villaorduña, F. e J.W. Rosa (1999) *Traçado cinemático de Raios para ondas superficiais propagando-se em meios anisotrópicos, considerando o modelo de Terra Plana, Resumo submetido ao* 6^0 *Congresso Internacional da Sociedade Brasileira de Geofísica.*