



# Inversão de sondagens elétricas verticais da região de Porto Seguro - BA utilizando norma $L_p$ -variante

Alexandre C. Monteiro      CPRM/CPGG/UFBA \*  
Milton J. Porsani          CPGG/UFBA †

## Abstract

The Porto Seguro area receives a high flow of tourists along the year thus generating problems related to water supply. The water used in the city comes from wells drilled in the Barreiras Formation and its importance has motivated a regional geophysical survey using the electric resistivity method. A total of 31 vertical electrical sounding (SEV) were performed using Schullumberger array. The interpretation of the SEVs has been carried out considering the local geology and logging profile of the drilled wells, allowing for a definition of a model of the area's aquifer. In the quantitative interpretation of the SEVs, a Fortran program has been developed based on the algorithm proposed by Porsani et al, 1998, which uses the linearized inversion method with  $L_p$  variant norm. The inversion method was applied on the synthetic and measured SEV data and was compared with traditional  $L_1$  and  $L_2$  results.

## Introdução

A região de Porto Seguro recebe um grande fluxo turístico ao longo de todo o ano existindo problemas quanto ao abastecimento d'água da cidade cujo suprimento em geral é oriundo de poços perfurados na Formação Barreiras. A importância da água para o abastecimento do município de Porto Seguro motivaram a realização de um reconhecimento geofísico regional utilizando o método de eletrorresistividade. A região de estudo localiza-se entre as coordenadas  $-39^{\circ}08'$ ,  $-16^{\circ}27'$  e  $-39^{\circ}00'$ ,  $-16^{\circ}22'$ . Foram executadas duas campanhas geofísicas tendo sido executadas um total de 31 sondagens elétricas verticais (SEV's), arranjo Schullumberger. A interpretação das SEVs foram integradas com informações da geologia da área e perfis de poços perfurados na região e possibilitaram definir um modelo do aquífero dessa área.

Na interpretação quantitativa das SEV's desenvolveu-se um programa Fortran baseado no algoritmo proposto por Porsani et al, 1998 que utiliza o método de inversão linearizada com norma variante  $L_p$ . O método de inversão foi aplicado sobre dados sintéticos comparando-se ainda com as normas  $L_1$  e  $L_2$  tradicionais, e seguindo-se a aplicação sobre dados reais da área de estudo.

## Geologia da área

A geologia da área de estudo está totalmente inserida na Formação Barreiras e nos cordões litorâneos de idade Quaternária.

**Terciário** - A Formação Barreiras constitui-se de sedimentos continentais costeiros Terciários (Mioceno-Plioceno), que formam extensos tabuleiros, freqüentemente cortados por falésias junto a linha de costa. Os principais constituintes litológicos na área são arenitos maduros que mostram cores variadas, comumente com estratificação plano-paralela e secundariamente estratificação cruzada. A fração pelítica é representada por siltitos e folhelhos intercalados aos arenitos em camadas de espessuras variando de alguns centímetros a dezenas de metros. A espessura destes sedimentos na área com certeza é maior do que 150 m já que as informações de poços disponíveis corroboram esta hipótese.

**Quaternário** - Os depósitos Quaternários são representados principalmente por sedimentos flúvio-marinhos e fluviais. Os primeiros dispõem-se ao longo de toda a costa e principalmente na desembocadura do rio Buranhém. Os depósitos fluviais têm maior expressão no rio Buranhém.

**Cordões Litorâneos** - Os cordões litorâneos ocorrem entre a linha de praia atual e na base das falésias da Formação Barreiras, representam praias antigas, ora apresentando-se paralelos, ora oblíquos às praias atuais. São depósitos arenosos contendo minerais pesados.

**Aluviões** - Os aluviões são caracterizados por material arenoso e areno-argiloso, no leito e nas planícies de inundação e terraços dos principais rios. As areias brancas que ocorrem no topo da Formação Barreiras podem ser originadas dos próprios sedimentos Barreiras por lixiviação do material mais argiloso.

## O método de inversão linearizada com norma $L_p$

A Inversão de dados de eletrorresistividade é um problema não linear e uma forma de enfrentá-lo é através da linearização com expansão por Taylor em torno do modelo corrente. O método de linearização pode ser modificado para intrinsecamente considerar diferentes valores da norma conforme proposto por Porsani et al. (1998) e apresentado a seguir. Considere a seguinte função  $E(\mathbf{m}, \alpha)$  positiva definida como

$$E(\mathbf{m}, \alpha) = \int dx [\Delta d(\mathbf{m}, x)^2]^\alpha \quad (1)$$

\*Companhia de Pesquisa de Recursos Minerais

†Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia, Universidade Federal da Bahia

onde  $\mathbf{m} = (m_1 \dots m_N)^T$  representa os  $N$  parâmetros do modelo;  $\Delta d(\mathbf{m}, x_i) = d_{obs}(x_i) - g(\mathbf{m}, x_i)$  é o desvio entre o valor observado  $d_{obs}(x_i)$ , e o valor calculado, e  $\alpha$  é um número real diferente de zero. Se definirmos um número  $\beta = \alpha/2$  podemos escrever,

$$E(\mathbf{m}, \beta) = \int dx \left\{ [\Delta d(\mathbf{m}, x)]^\beta \right\}^2 \quad (2)$$

Definindo,

$$f(\mathbf{m}, x) = \Delta d(\mathbf{m}, x)^2 = [d_{obs}(x_i) - g(\mathbf{m}, x_i)]^2, \quad (3)$$

podemos reescrever a equação (1) como segue,

$$E(\mathbf{m}, \beta) = \int dx [f(\mathbf{m}, x)^\beta]^2. \quad (4)$$

Obtém-se uma aproximação da equação (4) linearizando  $f(\mathbf{m}, x)^\beta$  por série de Taylor, e desprezando-se os termos de ordem superior a 1, em torno de uma estimativa inicial dos parâmetros do modelo  $\mathbf{m}_0$ :

$$f(\mathbf{m}, x)^\beta = f(\mathbf{m}_0, x)^\beta - 2\beta f(\mathbf{m}_0, x)^{\beta-1} \Delta d(\mathbf{m}_0, x) \frac{\partial g(\mathbf{m}, x)}{\partial \mathbf{m}} \Big|_{\mathbf{m}_0} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0) \quad (5)$$

Para um conjunto discretos de valores de  $x$  a equação (5) assume a forma:

$$\mathbf{f}_\beta \simeq \mathbf{f}_{\beta_0} - \mathbf{F}_\beta \mathbf{G} \Delta \mathbf{m}, \quad (6)$$

onde

$$\mathbf{f}_\beta = \left( f(\mathbf{m}, x_1)^\beta \dots f(\mathbf{m}, x_N)^\beta \right)^T \quad (7)$$

$$\mathbf{f}_{\beta_0} = \left( f(\mathbf{m}_0, x_1)^\beta \dots f(\mathbf{m}_0, x_N)^\beta \right)^T \quad (8)$$

e  $\Delta \mathbf{m} = \mathbf{m} - \mathbf{m}_0$ , corresponde aos parâmetros de correção do modelo,  $\mathbf{F}_\beta$  é uma matriz diagonal com elementos da diagonal dados por:

$$2\beta f(\mathbf{m}_0, x_j)^{\beta-1} \Delta d(\mathbf{m}_0, x_j) \quad j = 1, \dots, M \quad (9)$$

e  $\mathbf{G}$  é a matriz  $M \times N$  denominada de matriz sensibilidade, também chamada de matriz das derivadas de Frechet. A forma discreta da função objetivo aproximada em termos da equação (6) é

$$E(\mathbf{m}, \beta) \simeq \mathbf{f}_\beta^T \mathbf{f}_\beta. \quad (10)$$

ou de forma explícita,

$$\begin{bmatrix} 1 & -\Delta \mathbf{m}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\beta_0}^T \mathbf{f}_{\beta_0} & \mathbf{f}_{\beta_0}^T \mathbf{F}_\beta \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T \mathbf{F}_\beta^T \mathbf{f}_{\beta_0} & \mathbf{G}^T \mathbf{F}_\beta^2 \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta \mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (11)$$

A expressão (10) mostra que na vizinhança do modelo inicial estimado  $\mathbf{m}_0$ , a função objetivo aproximada pode ser aproximada por uma função quadrática. Se o modelo inicial  $\mathbf{m}_0$  for uma estimativa aproximada do modelo verdadeiro, o mínimo desta função quadrática poderá fornecer uma melhor aproximação do modelo,  $\mathbf{m}$ . A minimização da equação (11) com respeito aos parâmetros  $m_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , produz o sistema de equações normais:

$$\mathbf{G}^T \mathbf{F}_\beta^T \mathbf{f}_\beta = \left( \mathbf{G}^T \mathbf{F}_\beta^2 \mathbf{G} \right) \Delta \mathbf{m} \quad (12)$$

$\mathbf{m}_k$  significa o modelo corrente na iteração  $k$ , desta forma chega-se a seguinte expressão iterativa para  $\mathbf{m}_{k+1}$  em termos do modelo corrente:

$$\mathbf{m}_{k+1} = \mathbf{m}_k + \left( \mathbf{G}_k^T \mathbf{F}_{\beta_k}^2 \mathbf{G}_k \right)^{-1} \mathbf{G}_k^T \mathbf{F}_{\beta_k}^T \mathbf{f}_{\beta_k} \quad (13)$$

A equação (13) reduz-se à expressão dos mínimos quadrados convencional quando  $\beta = 1/2$ .

## Inversão linearizada com norma $L_p$ variante

A solução desejada para a inversão de dados de eletrorresistividade no âmbito da norma  $L_p$  é conseguida através da equação (13), entretanto o mínimo global não necessariamente é alcançado através de uma norma  $L_p$  fixa. Usando  $k$  diferentes  $L_p$  normas a cada iteração, e resolvendo  $k$  vezes a equação (13),  $k$  diferente possibilidades de se atualizar o modelo corrente são calculadas. Avaliando-se o ajuste para cada modelo candidato pode-se selecionar o modelo corrente de melhor ajuste. O algoritmo ora proposto utiliza um conjunto fixo de normas, que a cada iteração é escolhido o mínimo da função objetivo dentre todos os  $k$  modelos calculados, assim para cada modelo corrente e para cada norma  $L_p$  uma solução diferente pode ser obtida, ou seja, um ponto diferente no espaço de parâmetros pode ser obtido para atualizar o modelo corrente. Para quantificarmos a qualidade do ajuste utilizamos a função definida por Porsani et. al. (1993),

$$\Phi(\alpha) = 1 - \frac{2 \sum_{j=1}^N |\Delta d(\mathbf{m}, x_j)|^\alpha}{\sum_{j=1}^N |\Delta d(\mathbf{m}, x_j)|^\alpha + \sum_{j=1}^N |\Delta f(\mathbf{m}, x_j)|^\alpha} \quad (14)$$

onde,  $\Delta f(\mathbf{m}, x_j) = d_{obs}(x_i) + g(\mathbf{m}, x_i)$ . Através de experimentos numéricos com a inversão de dados sintéticos determinamos o valor de  $\alpha = 0.5$  como sendo aquele que fornece melhores resultados. Esse valor é mantido fixo em todo o processo de inversão. Ele é utilizado apenas para quantificar através de uma única função objetivo quão bem os dados calculados se aproximam dos dados observados. Pode-se observar que se  $d_{obs}(x_i) = g(\mathbf{m}, x_i)$ , a equação (14) resulta em 1 para qualquer valor de  $\alpha$ .

## Inversão de dados sintéticos

Para a inversão de dados sintéticos utilizou-se os modelos de curvas padrões de três camadas A, H, K e Q onde foi adicionado ruído em alguns pontos variando entre 5% e 15%. Como pode ser observado na tabela 1 vemos o melhor desempenho da norma  $L_p$  variante para todos os tipos de curvas testados em comparação com as normas  $L1$  e  $L2$  tradicionais, existindo até a situação no caso da curva do tipo A em que para o mesmo modelo Inicial a norma  $L1$  não conseguiu fazer a inversão. A figura 2 mostra a evolução do ajuste dos modelos para a curva do tipo H. Observa-se que as curvas para as normas  $L1$  e  $L2$  estabilizam em patamares correspondentes a mínimos locais da função objetivo, e divergem após um certo número de iterações. Por outro lado a curva obtida com a norma  $L_p$  variante cresce continuamente ultrapassando os valores das normas  $L1$  e  $L2$ . Este comportamento também foi observado para os demais tipos de curva estudados.

## Inversão de dados de Campo

Para a apresentação dos resultados das inversões efetuadas nos dados de campo mostramos aqui uma seção geolétrica (figura 1) efetuada com o programa Fortran utilizando norma variante  $L_p$ , os resultados alcançados foram excelentes se comparados as normas  $L1$  e  $L2$ . As inversões basicamente mostraram três camadas com resistividade diferentes e espessuras quase que idênticas, com base na informação de poços foram interpretadas da seguinte forma: A primeira camada é uma camada resistiva

comportando-se como um pacote sedimentar com pouca ou nenhuma água aprisionada, a espessura é em torno de 20 metros. A segunda camada possui resistividade um pouco menor e espessura em torno dos 80 metros e foi interpretada como sendo uma alternância entre os arenitos e os pelitos da Formação Barreiras e as chances de se encontrar água neste pacote são favoráveis. A última camada relevante aparece com resistividade menor que as outras duas a partir dos 100 metros de profundidade e foi interpretada como sendo a presença da água preenchendo os vazios dos sedimentos Barreiras. Um pacote com resistividade de  $463\Omega m$  representa a parte superior da SEV 42 sendo uma variação faciológica dentro destes sedimentos.

**Conclusões**

Nesta pesquisa utilizamos o método de inversão linearizada com norma variante para interpretação de SEV's da região de Porto Seguro. Essa abordagem demonstrou ser superior à inversão linearizada com norma fixa. O método possui a habilidade de evitar o aprisionamento do modelo corrente em mínimos locais e explora de forma abrangente e efetiva o espaço de parâmetros. Resultados numéricos obtidos com a inversão de SEV's correspondentes a dados sintéticos e reais sugere o emprego do presente método para demais problemas inversos de geofísica.

**Agradecimentos**

Milton J. Porsani agradece ao CNPq pelo apoio à pesquisa, Alexandre C. Monteiro agradece à CPRM pela oportunidade de realização do mestrado na UFBA.

**Referências**

Bittencourt, A. C. S. P.; Villas Boas, G. S.; Flexor, J. M. e Martin, L., 1979, Geologia dos depósitos quaternários no litoral do Estado da Bahia. In: INDA, H (Ed.), Geologia e Recursos Minerais do Estado da Bahia. Textos Básicos, v. 1, 2-21, SME/CPM, Salvador

Folha SE.24 Rio Doce, geologia, geomorfologia, pedologia, vegetação, uso potencial da terra, 1987, Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, Rio de Janeiro: IBGE, 1987 548p., 6 mapas: il.-(levantamento de recursos naturais; V. 34)

Ferreira N. R., 1998, Inversão linear e não linear bidimensional de dados de eletrorresistividade, PPPG/UFBA, Relatório de tese de doutorado, (Não publicado)

Porsani M. J., Stoffa, P. L., Chundururu, R. K. and Sen, M., 1993a. Evaluation of measures of error using a genetic algorithm. Expanded Abstract of 3rd Ann. Int. Metg. of Brazilian Geophysical Society 1 85-90

Porsani M. J.; Niwas S.; Ferreira N. R., 1998, Robust inversion of vertical electrical sounding data using  $L_p$  variant norm : submetido para a revista Geophysical Prospecting, PPPG/UFBA, Universidade Federal da Bahia

Silva Filho, M. A. da et alli, 1974, Projeto Sul da Bahia: relatório final. Salvador, DNPM/CPRM, 1974. 15v.

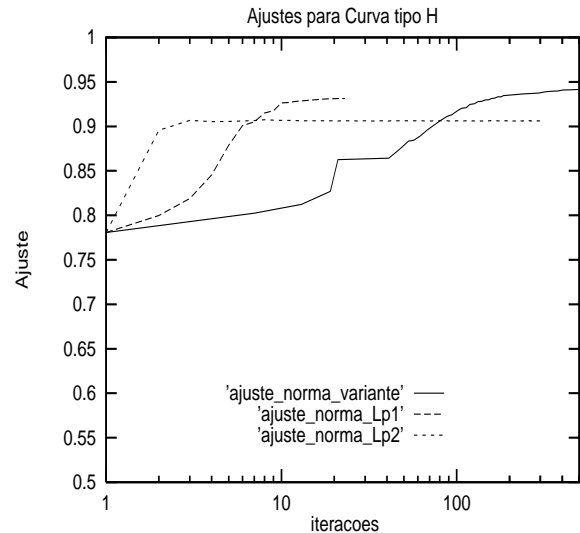


Figura 2: Evolução do ajuste para curva do tipo H.

Curva do tipo Q					
	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$h_1$	$h_2$
Modelo Inicial	230.00	85.00	35.00	7.50	250.00
Modelo Real	200.00	100.00	20.00	10.00	200.00
Norma $L1$	199.99	100.00	19.99	9.99	199.99
Norma $L2$	202.44	102.73	18.85	9.94	204.58
<b>Norma <math>Lp</math></b>	<b>199.99</b>	<b>100.00</b>	<b>20.00</b>	<b>10.00</b>	<b>199.99</b>
Curva do tipo K					
	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$h_1$	$h_2$
Modelo Inicial	50.00	650.00	6.00	7.00	50.00
Modelo Real	40.00	800.00	10.00	10.00	60.00
Norma $L1$	39.99	768.40	9.93	9.93	62.49
Norma $L2$	39.82	812.99	11.03	9.94	57.59
<b>Norma <math>Lp</math></b>	<b>39.99</b>	<b>800.17</b>	<b>9.99</b>	<b>10.00</b>	<b>59.98</b>
Curva do tipo H					
	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$h_1$	$h_2$
Modelo Inicial	126.50	15.00	1000.0	12.00	40.00
Modelo Real	100.00	20.00	800.00	15.00	50.00
Norma $L1$	99.97	18.78	790.65	15.45	46.73
Norma $L2$	99.37	21.24	1154.96	14.93	55.56
<b>Norma <math>Lp</math></b>	<b>100.03</b>	<b>20.00</b>	<b>799.68</b>	<b>14.99</b>	<b>50.02</b>
Curva do tipo A					
	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$h_1$	$h_2$
Modelo Inicial	19.50	60.00	234.00	3.50	34.80
Modelo Real	15.00	80.00	180.00	5.00	58.00
Norma $L1$	-	-	-	-	-
Norma $L2$	15.07	83.90	190.84	4.93	71.68
<b>Norma <math>Lp</math></b>	<b>14.99</b>	<b>80.00</b>	<b>180.00</b>	<b>4.99</b>	<b>58.00</b>

Tabela 1: Resultados da inversão para dados sintéticos

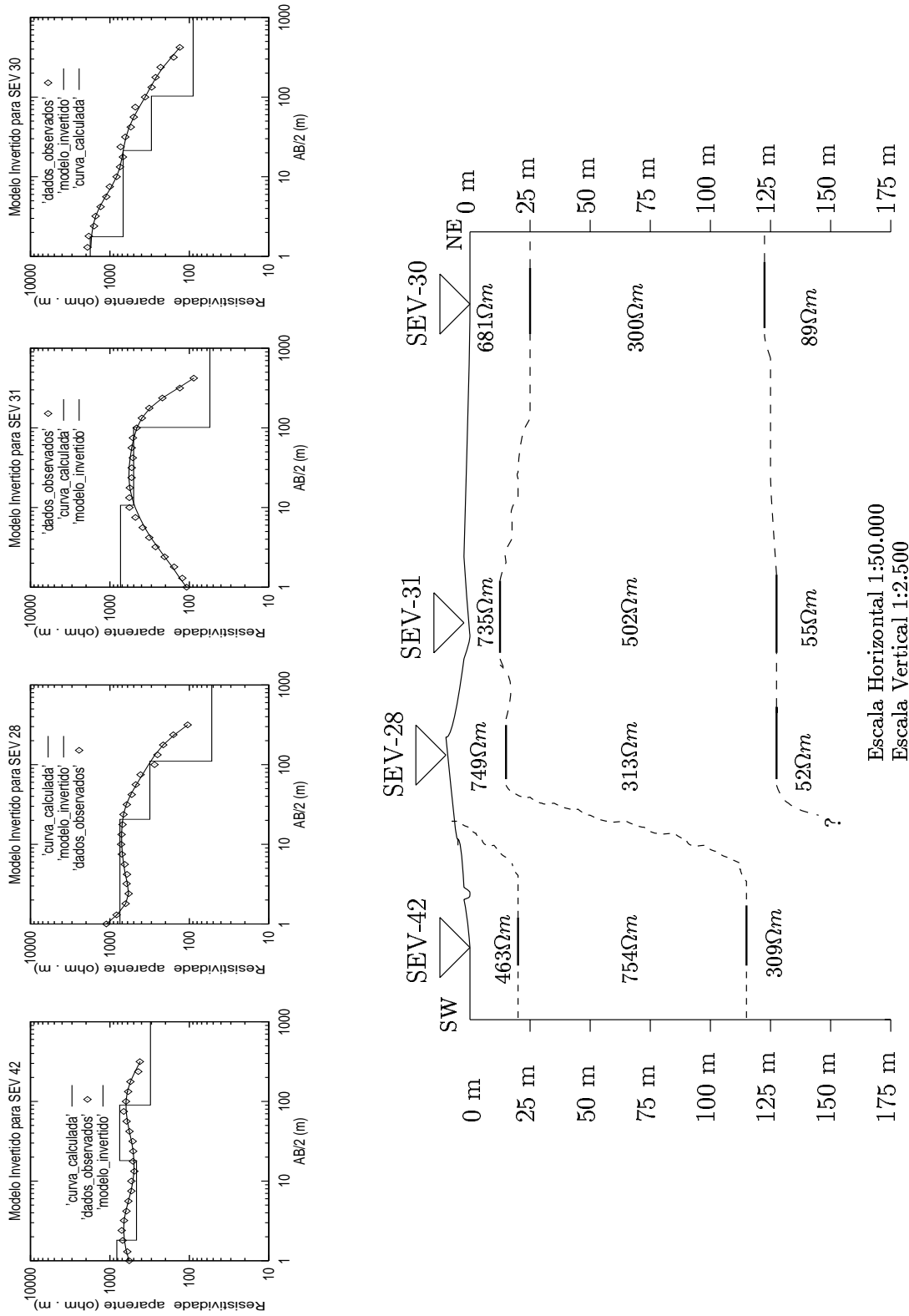


figura 1 : Seção geolétrica interpretada a partir de dados reais