



# 2.5-D finite-difference solution of the acoustic wave equation

Amélia Novais, Federal University of São Carlos.  
Lúcio Tunes Santos, State University of Campinas

## Abstract

Finite differences applied to the full 3-D wave equation is a rather time consuming process. However, in the 2.5-D situation, we can take advantage from the medium symmetry. By taking the Fourier transform in the out-of-plane direction, the 3-D problem can be reduced to a 2-D one. The third dimension is taken in to account by a sum over the corresponding wave vector component. In this way, the 2.5-D finite differences program can be improved by a factor that increases with the size of the model. Numerical examples show the applicability of the method.

## Introduction

Finite difference modeling of wave propagation in heterogeneous media is a useful technique in a number of disciplines, including seismology and ocean acoustics, among others. However, the size of the models that can be treated by finite difference methods in three spatial dimensions has been rather limited except on supercomputers.

In other forward modeling schemes, the medium symmetry in the so-called 2.5-D situation has been made use of in order to reduce the computer costs. The attribute 2.5-D designates a situation where the medium depends on two spatial coordinates only and the seismic line is parallel to the symmetry axis.

In this work, we show how a finite difference scheme can be adapted to the 2.5-D situation. The full 3-D finite difference can be reduced to a repeated 2-D finite difference by applying the Fourier transform with respect to the out-of-plane coordinate to the 3-D wave equation and using the medium symmetry. The resulting 2-D equation is solved by finite difference for different values of the wave vector component. The necessary inverse Fourier transform is realized by a simple sum over all 2-D finite difference results in order to obtain the full 3-D wavefield.

The technique was originally proposed by Zhou & Greenhalgh (1998), using a finite element method in the frequency domain. Here we present the same approach but with a finite difference scheme applied

in the time domain.

## 2.5-D solution

We assume that the seismic wave propagation is governed by the acoustic wave equation

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}/v^2 + f(t)\delta(x - x_s)\delta(y - y_s)\delta(z - z_s), \quad (1)$$

where  $u = u(x, y, z, t)$  is the acoustic wavefield,  $v = v(x, y, z)$  is the velocity of the medium, and  $f(t)$  is a band-limited source function located at  $(x_s, y_s, z_s)$ . The subscripts in equation (1) indicate second-order partial derivatives with respect to the spatial coordinates  $x, y, z$  and time  $t$ .

We assume that the velocity wavefield is a function of  $x$  and  $z$  only, i.e.,  $v = v(x, z)$  and the source is located along the symmetry plane ( $y_s = 0$ ). Applying the Fourier transform with respect to the  $y$ -coordinate, the 3-D wave equation (1) can be reduced to the following form

$$U_{xx} - \kappa^2 U + U_{zz} = U_{tt}/v^2 + f(t)\delta(x - x_s)\delta(z - z_s), \quad (2)$$

where

$$U(x, \kappa, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy u(x, y, z, t) e^{i\kappa y}. \quad (3)$$

The solution of equation (2) will be obtained by a finite-difference scheme followed by the application of the inverse Fourier transform, therefore,

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa U(x, \kappa, z, t) e^{i\kappa y}. \quad (4)$$

In particular, for  $y = 0$  we have

$$\begin{aligned} u(x, 0, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa U(x, \kappa, z, t) \\ &\approx \frac{\Delta\kappa}{\pi} \sum_{k_n \geq 0} U(x, \kappa_n, z, t), \end{aligned} \quad (5)$$

where  $\Delta\kappa$  is the uniform increment in  $\kappa$  and we have used the fact that  $U(x, \kappa, z, t)$  is an even function of  $\kappa$ .

Equation (5) means that the field  $u(x, 0, z, t)$  can be obtained by summing the contributions for all  $\kappa_n \geq 0$ .

### Finite-difference formulas

A set of indices  $i$ ,  $j$  and  $l$  is chosen to establish a finite-difference scheme with uniform grid spacing  $\Delta x$ ,  $\Delta z$  and  $\Delta t$  in  $x$ ,  $z$  and  $t$ , respectively:  $x_i = x_{min} + i \Delta x$ ,  $z_j = z_{min} + j \Delta z$  and  $t_l = t_{min} + l \Delta t$ . Consequently, we denote, for a fixed  $\kappa$ ,  $U(x_i, \kappa, z_j, t_l) = U_{i,j}^l$ .

The finite-difference scheme for solving equation (2) was chosen to be fourth-order accurate in space and second-order accurate in time, and is given by

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{l+1} = & -\frac{1}{12} \{ a_{i,j} [U_{i-2,j}^l + U_{i+2,j}^l - 16 (U_{i-1,j}^l \\ & + U_{i+1,j}^l) + 30U_{i,j}^l] + b_{i,j} [U_{i,j-2}^l \\ & + U_{i,j+2}^l - 16 (U_{i,j-1}^l + U_{i,j+1}^l) + 30U_{i,j}^l] \} \\ & + \Delta t^2 \kappa^2 U_{i,j}^l + 2U_{i,j}^l - U_{i,j}^{l-1} + f_{i,j}^l, \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$a_{i,j} = (v_{i,j} \Delta t / \Delta x)^2, \quad b_{i,j} = (v_{i,j} \Delta t / \Delta z)^2, \quad (7)$$

$v_{i,j}$  denotes the velocity at  $(x_i, z_j)$ , and

$$f_{i,j}^l = \begin{cases} f(t_l), & \text{if } x_i = x_s \text{ and } z_j = z_s, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (8)$$

For initiating the propagation process, we set

$$U_{i,j}^0 = 0, \quad \text{for all } i, j, \quad (9)$$

and define the boundary conditions

$$U_{i,0}^l = U_{0,j}^l = 0, \quad \text{for all } i, j, l. \quad (10)$$

We assume a uniform grid spacing such that  $\Delta x = \Delta z = h$ . Therefore, the maximum value of grid spacing  $h$ , which can be used without causing excessive dispersion of energy, is governed by the condition (Mufti et al., 1996)

$$h \leq \frac{v_{min}}{\vartheta f_{max}}, \quad (11)$$

where  $v_{min}$  is the minimum value of the velocity field,  $f_{max}$  is the maximum frequency of the source pulse, and  $\vartheta$  is the number of samples per minimum wavelength (to be chosen). Moreover, for a given value of the grid spacing, the process becomes numerically unstable unless the time sampling interval satisfies the condition

$$\Delta t \leq \frac{\gamma h}{v_{max}}, \quad (12)$$

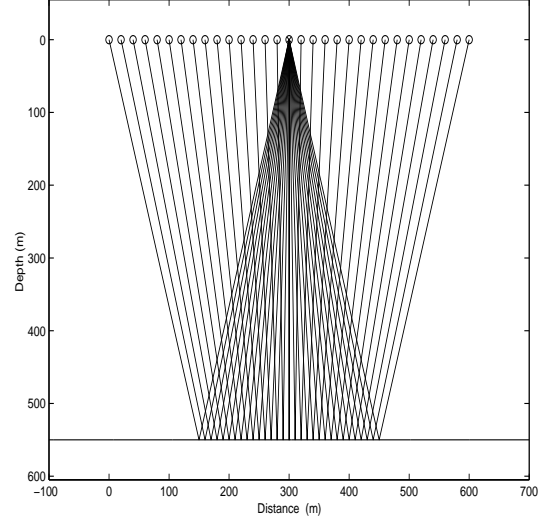


FIG. 1. Model and ray family for the common-shot experiment.

where  $v_{max}$  represents the maximum value of velocity field and  $\gamma$  is a constant. Mufti et al. (1996) show that  $b = 0.5$  and  $\vartheta = 3.5$  are optimum values.

### Numerical Experiments

To illustrate the process discussed above, we provide a simple synthetic experiment. The model is shown in Fig. 1. It consists of a plane interface, separating two homogeneous halfspaces with velocities 3.0 km/s and 3.5 km/s, above and below the interface, respectively. The density in both media is constant and equal to unity. For this model, we have simulated a common-shot experiment, with the ray family also shown in Fig. 1.

In Fig. 2, the common shot section resulting from the 2.5-D finite-differences scheme has been compared with the corresponding section obtained using 3-D finite-differences. In both methods we have used a uniform spatial grid  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 10\text{m}$  and for the point source we have chosen a Küpper wavelet with  $f_{max} = 35$  Hz and  $\Delta t = 1$  ms. The summation (5) was performed with  $\Delta \kappa = 1/1200$  m and  $\kappa_{max} = 0.1$  1/m.

For a more quantitative analysis, the peak amplitudes along the reflections have been picked for all seismograms. These are shown in Fig. 3. The 2.5-D finite-differences overestimate the amplitudes when compared to 3-D finite-differences.

Figure 4 shows the relative error between 2.5-D finite-difference and 3-D finite-difference. Observe that the

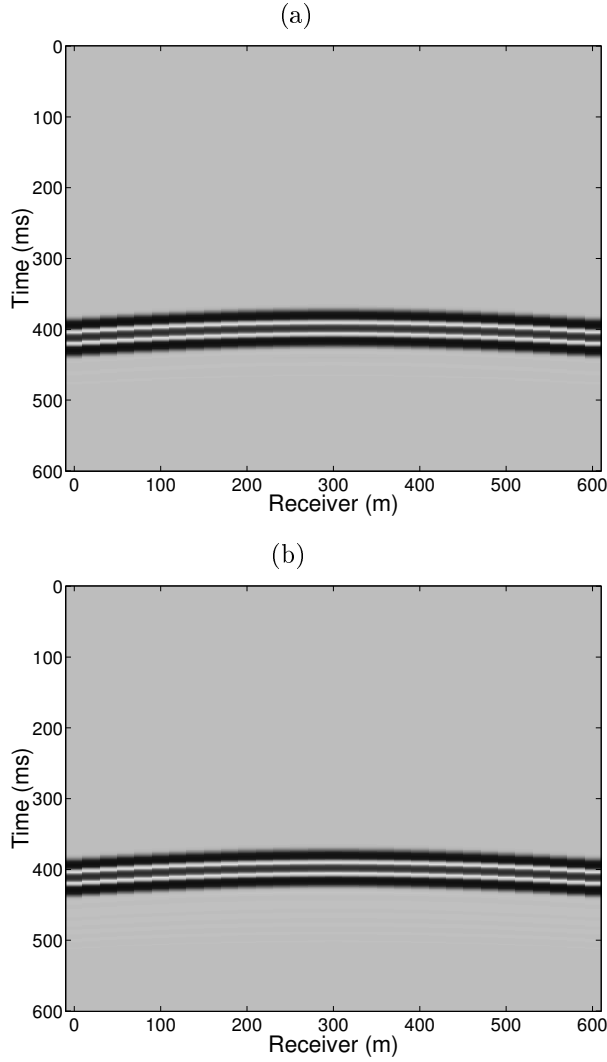


FIG. 2. Synthetic seismograms: (a) 2.5-D Finite-differences, (b) 3-D Finite-difference.

relative error in all traces is less than 5%.

### Conclusions

We have used the approach of Zhou & Greenhalgh (1998) with an application to finite differences in time domain. For a simple model of a plane reflector between two homogeneous acoustic media, we have computed the seismogram corresponding to the described 2.5-D finite-difference scheme. For the same model, we also computed, as a reference, the corresponding seismogram using a 3-D finite-differences scheme. We observed in this case that 2.5-D finite-differences agrees with the 3-D results very well.

Further studies on the subject will include investigations in more realistic models.

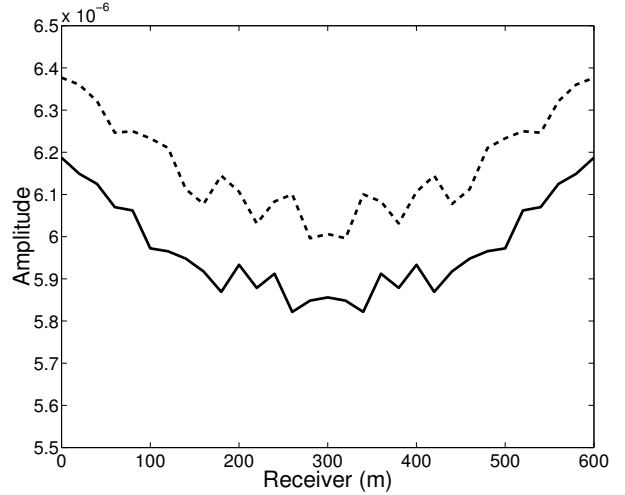


FIG. 3. Peak amplitudes: 2.5-D Finite-differences (dashed line) 3-D Finite-differences (bold line).

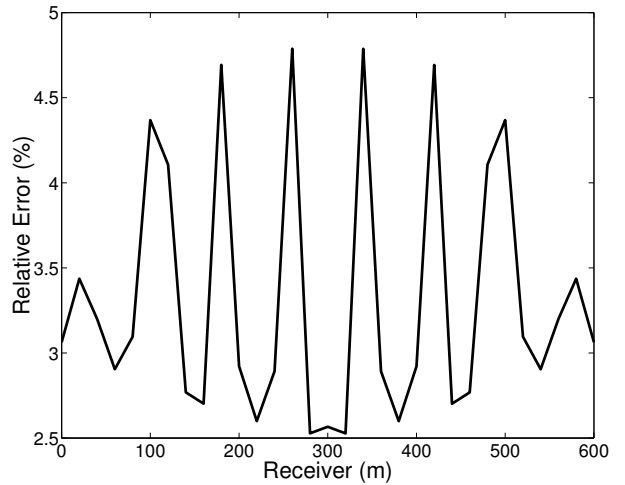


FIG. 4. Relative error between 2.5-D finite-difference and 3-D finite-difference.

### References

1. Zhou, B., and Greenhalgh, S. A., 1998, *Composite boundary-valued solution of the 2.5-D Green's function for arbitrary acoustic media*, *Geophysics*, 63, 1813-1823.
2. Mufti, I. R., Pita, J. A., e Huntley, R. W., 1996, *Finite-difference depth migration of exploration-scale 3D seismic data*, *Geophysics*, 61, 776-794.



# ANISOTROPIA INDUZIDA POR FRATURAS: ASPECTOS CINEMÁTICOS

Fredy Alex Villaorduña Artola

Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia (CPGG). UFBA. fre777@zipmail.com.br

João Willy Corrêa Rosa

Universidade de Brasília (UNB). jwilly@unb.br

## RESUMO

O estudo dos efeitos das perturbações geradas pela presença de fraturas nas rochas da crosta superior, especialmente em reservatórios de hidrocarbonetos é extremamente importante no conhecimento das características dos níveis com potencial produtivo dos campos petrolíferos. Em muitos reservatórios de hidrocarbonetos, a fraca porosidade primária das rochas é melhorada, pela presença de fraturas naturais, as mesmas que chegam a controlar o regime de fluxo dos fluidos. Sendo assim, o conhecimento da configuração espacial das fraturas nos reservatórios torna-se crítico se quisermos otimizar os programas de desenvolvimento de campos petrolíferos.

Os reservatórios, na grande maioria dos casos, se estiverem fraturados, apresentam fraturas verticais e paralelas (transversalmente isotrópicos com eixo de simetria horizontal), dois sistemas de fratura cujas projeções horizontais formam ângulos diferentes de  $90^\circ$  (simetria monoclinica), ou dois sistemas de fraturas ortogonais com diferente densidade de fraturas (simetria ortorrômbica).

Neste trabalho mostramos os efeitos cinemáticos das perturbações que introduziremos, artificialmente, em uma rocha elasticamente isotrópica.

Os causadores das perturbações são as fraturas, com diversas configurações que introduziremos no meio, transformando este em elasticamente anisotrópico.

Primeiro, consideremos um meio isotrópico contendo um sistema de fraturas verticais e paralelas. O tensor *stiffness* associado a este meio pode ser escrito como (Hudson, 1981, 1986):

$$c_{ijkl} = c_{ijkl}^0 + c_{ijkl}^1 + c_{ijkl}^2 \quad (1)$$

Aqui:

$$c_{ijkl}^1 = \frac{d}{\mu} \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)^2 & \lambda(\lambda+2\mu) & \lambda(\lambda+2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\lambda+2\mu) & \lambda^2 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\lambda+2\mu) & \lambda^2 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \mathfrak{S} \quad (2)$$

$$c_{ijkl}^2 = \frac{d^2}{15} \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)q & \lambda q & \lambda q & 0 & 0 & 0 \\ \lambda q & \frac{\lambda^2 q}{\lambda+2\mu} & \frac{\lambda^2 q}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda q & \frac{\lambda^2 q}{\lambda+2\mu} & \frac{\lambda^2 q}{\lambda+2\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi \end{pmatrix} \mathfrak{S}^2 \quad (3)$$

onde  $c_{ijkl}^0$  é o tensor elástico da rocha não fraturada (isotrópica),  $c_{ijkl}^1$  e  $c_{ijkl}^2$  correspondem às perturbações de primeira e segunda ordem devido à

presença das fraturas.  $\lambda$  e  $\mu$  são as constantes de Lamé,

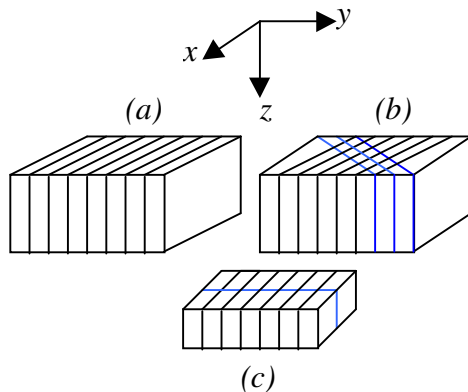
$$q = 15 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + 28 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right) + 28,$$

$$\xi = \frac{2\mu(3\lambda + 8\mu)}{\lambda + 2\mu}, \quad d \quad \text{é a}$$

densidade de fraturas, e  $\mathfrak{S}$  é uma matriz diagonal onde  $((\mathfrak{S}_{11}, \mathfrak{S}_{11}, \mathfrak{S}_{11}, 0, \mathfrak{S}_{33}, \mathfrak{S}_{33}))$  depende dos parâmetros das fraturas.

Os tensores acima correspondem ao arranjo mais simples de fraturas, isto é, a um só sistema de fraturas verticais (transversalmente isotrópica com eixo de simetria horizontal). Para casos mais complicados, como os casos monoclinico e ortorrômbico, os tensores elásticos são obtidos das perturbações calculadas individualmente para fraturas com diversas orientações e adicionando ao tensor não perturbado.

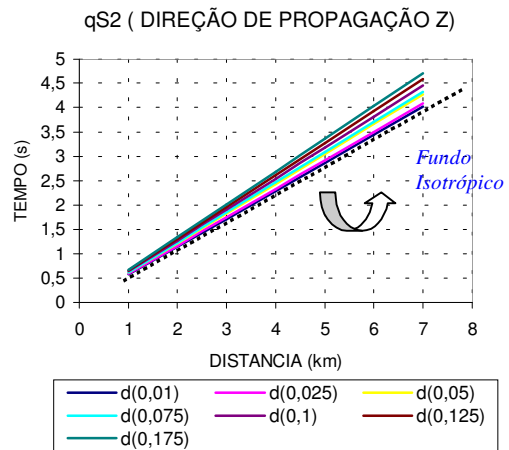
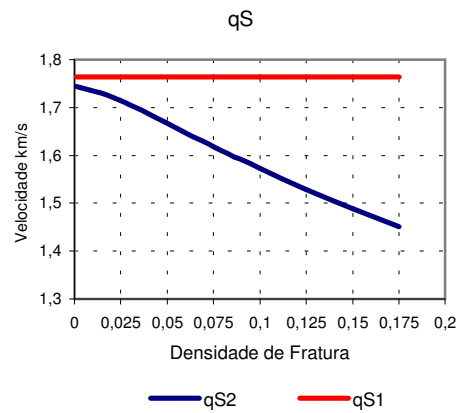
Aqui, mostramos as respostas cinemáticas geradas pelos três tipos de arranjos acima mencionados, restringindo a nossa atenção nas componentes cisalhantes  $qS_1$  e  $qS_2$  que aparecem devido à perturbação.



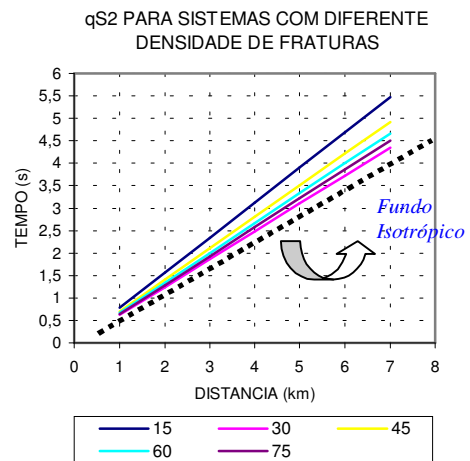
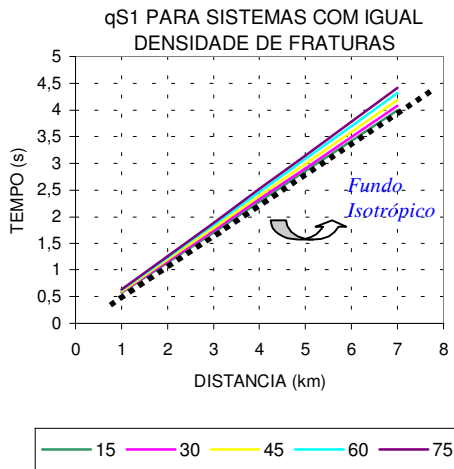
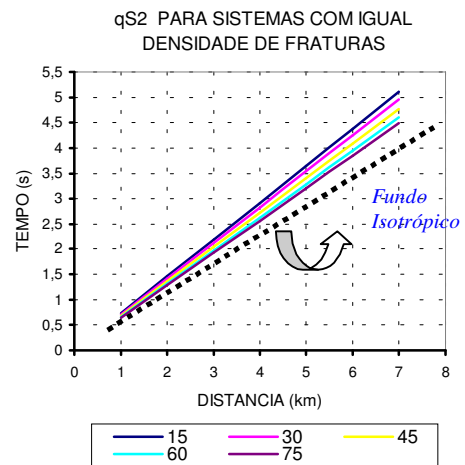
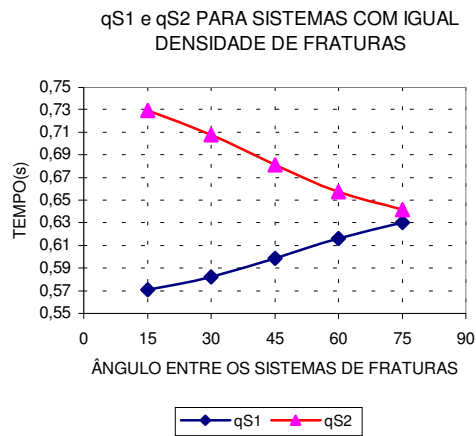
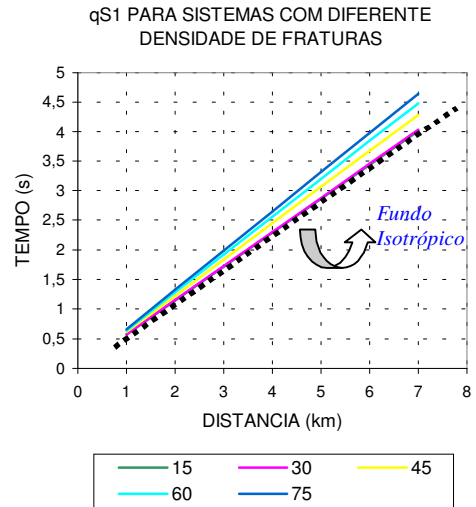
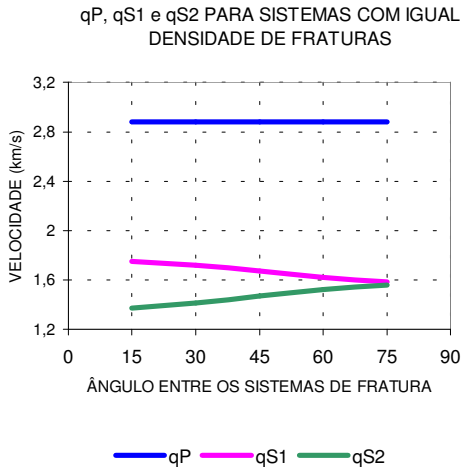
**Figura 1** – (a) modelo transversalmente isotrópico com eixo de simetria horizontal – (b) modelo monoclinico – (c) modelo ortorrômbico.

O modelo inicial para todos os casos é isotrópico. Os parâmetros do modelo inicial são: Velocidade da onda  $P = 3.00 \text{ km/s}$ , Velocidade da onda  $S = 1.764 \text{ km/s}$  e densidade  $\rho = 2.1 \text{ gr/cm}^3$ . Neste fundo isotrópico, introduzimos diversos arranjos de fraturas, isto é, varios padrões de espaçamento de fraturas (densidade de fraturas), e várias combinações angulares entre os sistemas de fraturas (Figura 1).

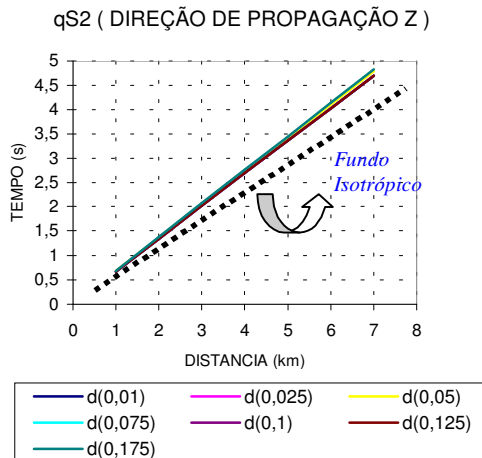
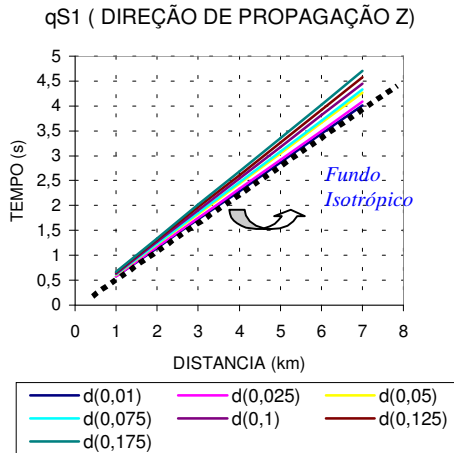
**MODELO(a)** *Simetria elástica transversalmente isotrópica com eixo de simetria horizontal.*



**MODELO (b).** *Simetria elástica monoclínica.*



**Modelo (c)** . *Simetria elástica ortorrômbica.*



**BREVE DISCUSSÃO**

Quando o meio é afetado por somente um sistema de fraturas verticais, nota-se que, na direção de propagação vertical, a componente  $qS_2$  é fortemente afetado pela presença de fraturas. O retardo do

tempo é maior quando o grau de fraturamento da rocha é intenso. A componente  $qS_1$  não é afetada pela presença das fraturas.

Na presença de dois sistemas de fraturas as componentes  $qS_1$  e  $qS_2$  variam com o ângulo formado pelas projeções horizontais dos sistemas de fraturas. Neste caso, estas componentes se comportam de uma forma absolutamente oposta. A velocidade associada com a componente  $qS_1$  diminui quando o ângulo entre as fraturas aumenta, e a velocidade associada com a componente  $qS_2$  aumenta quando o ângulo entre as fraturas diminui.

A componente  $qS_1$  é sensível a somente um dos sistemas de fraturas. A componente  $qS_2$  é sensível aos dois sistemas de fraturas, motivo pelo qual a atenuação causada pela perturbação anisotrópica é maior na componente  $qS_2$ . Quanto menor é o ângulo entre os sistemas de fraturas o efeito destas na velocidade da componente  $qS_2$  é mais acoplada. Quando o ângulo entre os sistemas de fratura fica próximo de  $90^\circ$ , o efeito de um dos sistemas de fratura na componente  $qS_2$  fica insignificante. O efeito desacoplado das fraturas acontece quando os sistemas de fraturas se tornam ortogonais (simetria elástica ortorrômbica).

**REFERÊNCIAS**

Hudson, J. A. 1981. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, **64**, 133-150.

----- 1986. A higher order approximation to the wave propagation constants for a cracked solid, *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **87**, 265-274.



# INFLUÊNCIA DA INCLINAÇÃO DAS FRATURAS QUE INDUZEM ANISOTROPIA NOS COEFICIENTES DE REFLEXÃO E TRANSMISSÃO EM UMA INTERFACE ENTRE MEIOS ISOTRÓPICO/ANISOTRÓPICO.

Fredy Alex Villaorduña Artola

Centro de Pesquisa em Geofísica e Geologia (CPGG), Universidade Federal da Bahia. [fre777@zipmail.com.br](mailto:fre777@zipmail.com.br)

João Willy Corrêa Rosa

Instituto de Geociências, Universidade de Brasília (UnB). [jwilly@unb.br](mailto:jwilly@unb.br)

## RESUMO

Na grande maioria dos trabalhos até agora publicados na área da modelagem sísmica e caracterização de reservatórios, tem se considerado as fraturas que afetam as rochas como sendo verticais. Sabe-se que, mediante uma combinação adequada dos sistemas de fraturas verticais é possível gerar vários sistemas de simetria elástica anisotrópica, tais como a monoclínica, a ortorrômbica, a cúbica, etc. Mas embora a verticalidade seja uma simplificação que facilita o tratamento matemático dos problemas, esta pode não refletir necessariamente a realidade.

Neste trabalho, analisamos a resposta sísmica da variação na inclinação das fraturas e mostramos a sua relevância na determinação dos coeficientes de reflexão e transmissão. A importância do estudo da reflexão e transmissão é óbvia, pois é a parte fundamental na análise da amplitude versus o *offset* (AVO), ou da amplitude versus o azimute (AVA).

Aqui consideramos somente a onda *PP* refletida e transmitida e assumimos que o meio afetado pelas fraturas inclinadas responde como sendo fracamente anisotrópico (WA). Fazemos esta consideração básica, já que assumimos que o *background* da rocha afetada pelas fraturas inclinadas é isotrópica e que, em conjunto, se comporta como anisotrópica somente por causa das fraturas presentes que atuam como perturbadores da isotropia. Assim, usamos o método da perturbação de primeira ordem para a determinação dos coeficientes de reflexão e transmissão associados ao deslocamento.

## DETERMINAÇÃO DO TENSOR *STIFFNESS*

Se considerarmos o caso hipotético de um meio com fraturas horizontais, este meio será transversalmente isotrópico e possuirá um eixo de simetria vertical (VTI). Neste caso, as relações de *stress-strain* podem ser dadas por:

$$\begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}}_{c_{VTI}} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{pmatrix} \quad (1)$$

onde  $\tau_{ij}$  é o tensor de *stress* e  $e_{ij}$  é o tensor de *strain*.

A equação (1) é muito simples e corresponde a um meio com simetria hexagonal, com eixo de simetria vertical, que coincide com o eixo *z* (fraturas horizontais ou camadas finas e horizontais). Mas se o eixo de simetria for inclinado e não for vertical nem horizontal, a matriz que relaciona o *stress* com o *strain* fica bem mais complicada, pois esta dependerá da orientação do plano transversalmente isotrópico, isto é, da inclinação das fraturas.

Para determinar o tensor de *stiffness* associado ao meio que contem fraturas inclinadas, devemos realizar uma rotação do sistema  $x', y', z'$  para o sistema de observação  $x, y, z$ , onde o plano  $x', y'$  é inclinado (plano que contem as fraturas) e o eixo  $z'$  é o eixo de simetria, também inclinado. A orientação do sistema inclinado com relação ao sistema de observação é definido pelos ângulos  $\vartheta$  (ângulo do mergulho das fraturas) e  $\phi$  (direção do plano isotrópico  $x'y'$ , que contem as fraturas). A rotação desejada será o produto das rotações segundo os ângulos  $\vartheta$  e  $(90^\circ - \phi)$ . Assim, a matriz de rotação será:

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta \sin \phi & \cos \phi & \sin \vartheta \sin \phi \\ -\cos \vartheta \cos \phi & \sin \phi & -\sin \vartheta \cos \phi \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (2)$$



Aplicando as regras de transformação, determinamos o tensor *stiffness* correspondente ao meio que contem fraturas inclinadas. O novo tensor pode ser obtido de:

$$\tilde{c} = c_{\text{geral / eixo arbitrario}} = M(c_{VTI})M^T \quad (3)$$

onde:

$$M = \begin{pmatrix} \cos^2 \vartheta \sin^2 \phi & \cos^2 \phi & \sin^2 \vartheta \sin^2 \phi & 2 \cos \phi \sin \vartheta \sin \phi & 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \phi & 2 \cos \vartheta \sin \phi \cos \phi \\ \cos^2 \vartheta \cos^2 \phi & \sin^2 \phi & \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi & -2 \sin \phi \sin \vartheta \cos \phi & 2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \phi & -2 \cos \vartheta \cos \phi \sin \phi \\ \sin^2 \vartheta & 0 & \cos^2 \vartheta & 0 & -2 \sin \vartheta \cos \vartheta & 0 \\ \cos \vartheta \cos \phi \sin \vartheta & 0 & -\sin \vartheta \cos \phi \cos \vartheta & \sin \phi \cos \vartheta & \sin^2 \vartheta \cos \phi - \cos^2 \vartheta \cos \phi & -\sin \vartheta \sin \phi \\ -\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \phi & 0 & \cos \vartheta \sin \vartheta \sin \phi & \cos \phi \cos \vartheta & \cos^2 \vartheta \sin \phi - \sin^2 \vartheta \sin \phi & -\sin \vartheta \cos \phi \\ -\sin \phi \cos \vartheta \cos^2 \phi & \cos \phi \sin \phi & -\sin^2 \vartheta \sin \phi \cos \phi & -\cos^2 \phi \sin \vartheta + \sin^2 \phi \sin \vartheta & -\sin \vartheta \sin \phi \cos \vartheta \cos \phi - \sin \vartheta \cos \phi \cos \vartheta \sin \phi & \cos \vartheta \sin^2 \phi - \cos \vartheta \cos^2 \phi \end{pmatrix}$$

Constata-se que nenhum dos elementos da matriz  $\tilde{c}$  é zero. Isto significa que a não verticalidade das fraturas complica muito o problema.

### PARÂMETROS ANISOTRÓPICOS

Os parâmetros elásticos do meio aqui considerado podem ser expressos em termos de perturbações de um meio com fundo isotrópico. Assim, podemos escrever:

$$a_{ijkl} = a_{ijkl}^0 + \delta a_{ijkl} \quad (4)$$

onde  $a_{ijkl}$  representa os parâmetros elásticos do meio perturbado pelas fraturas,  $a_{ijkl}^0$  representa os coeficientes elásticos do *background* isotrópico não perturbado e  $\delta a_{ijkl}$  representa a perturbação. Em geral, para ser válida a aplicação da teoria da perturbação de primeira ordem (Jech e Psencik, 1989),  $\delta a_{ijkl}$  deve ser necessariamente pequeno quando comparado com  $a_{ijkl}^0$ . Isto significa que o meio precisa ser fracamente anisotrópico. Assim, o método não pode ser aplicado quando estivermos frente a um caso de forte anisotropia. Mas, na maioria dos casos práticos a anisotropia é fraca, o mesmo acontece com o contraste de velocidades nas interfaces.

Isto obviamente facilita grandemente o trabalho, já que podemos usar as idéias básicas de Thompsen (1986), que permite diminuir de forma considerável o número de parâmetros necessários para caracterizar o meio. Isto é muito relevante para nosso caso, já que, embora a simetria associada ao nosso modelo seja transversalmente isotrópica, a inclinação do plano de isotropia (plano que contem as fraturas), transforma a matriz dos coeficientes elásticos, muito mais complicada que para qualquer caso de simetria associado a fraturas verticais.

Psencik e Gajewski (1998), seguindo as idéias básicas de Thompsen (1886), tem generalizado o método e determinado os parâmetros anisotrópicos adimensionais que podem caracterizar meios com simetria anisotrópica arbitrária. As expressões apresentadas por estes autores permitem estudar qualquer tipo de arranjo elástico, mesmo os mais complicados, desde que a resposta anisotrópica do meio seja fraca. Estes parâmetros são os seguintes:

$$\begin{aligned} \delta_x &= \frac{A_{13} + 2A_{55} - \alpha^2}{\alpha^2}, \\ \delta_y &= \frac{A_{23} + 2A_{44} - \alpha^2}{\alpha^2}, \\ \delta_z &= \frac{A_{12} + 2A_{66} - \alpha^2}{\alpha^2}, \\ \chi_x &= \frac{A_{14} + 2A_{56}}{\alpha^2}, \chi_y = \frac{A_{25} + 2A_{46}}{\alpha^2}, \\ \chi_z &= \frac{A_{36} + 2A_{45}}{\alpha^2}, \\ \epsilon_{15} &= \frac{A_{15}}{\alpha^2}, \epsilon_{16} = \frac{A_{16}}{\alpha^2}, \epsilon_{24} = \frac{A_{24}}{\alpha^2}, \\ \epsilon_{26} &= \frac{A_{26}}{\alpha^2}, \epsilon_{34} = \frac{A_{34}}{\alpha^2}, \epsilon_{35} = \frac{A_{35}}{\alpha^2}, \\ \epsilon_x &= \frac{A_{11} - \alpha^2}{2\alpha^2}, \epsilon_y = \frac{A_{22} - \alpha^2}{2\alpha^2}, \\ \epsilon_z &= \frac{A_{33} - \alpha^2}{2\alpha^2}, \gamma_x = \frac{A_{55} - \beta^2}{2\beta^2}, \\ \gamma_y &= \frac{A_{44} - \beta^2}{2\beta^2}, \gamma_{45} = \frac{A_{45}}{2\beta^2} \end{aligned} \quad (5)$$

Dependendo da simetria anisotrópica, alguns deste parâmetros se anulam. O caso extremo acontece quando a simetria é isotrópica. Nesse caso, todos estes parâmetros são zero.

## COEFICIENTES DE REFLEXÃO E TRANSMISSÃO

Os coeficientes de reflexão e transmissão para as ondas  $PP$ , em uma interface que separa dois meios homogêneos fracamente anisotrópicos (para qualquer tipo de simetria), foram deduzidos por Psencik e Vavrycuk (1998) e são expressos como:

$$R_{PP}(\varphi, \theta) = R_{PP}^{iso}(\theta) + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_z + \begin{bmatrix} \left( \Delta \delta_x - 8 \frac{\bar{\beta}^2}{\alpha} \Delta \gamma_x \right) \cos^2 \varphi + \\ \left( \Delta \delta_y - 8 \frac{\bar{\beta}^2}{\alpha^2} \Delta \gamma_y \right) \sin^2 \varphi + \\ 2 \left( \Delta \chi_z - 4 \frac{\bar{\beta}^2}{\alpha^2} \Delta \varepsilon_{45} \right) \cos \varphi \sin \varphi \\ - \Delta \varepsilon_z \end{bmatrix} \sin^2 \theta + \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_x \cos^4 \varphi + \Delta \varepsilon_y \sin^4 \varphi + \\ \Delta \delta_z \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \\ 2 \left( \Delta \varepsilon_{16} \cos^2 \varphi + \right. \\ \left. \Delta \varepsilon_{26} \sin^2 \varphi \right) \sin \varphi \cos \varphi \end{bmatrix} \operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 \theta \quad (6)$$

$$T_{PP}(\varphi, \theta) = T_{PP}^{iso}(\theta) - \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_z + \begin{bmatrix} \Delta \delta_x \cos^2 \varphi + \Delta \delta_y \sin^2 \varphi + \\ 2 \Delta \chi_z \cos \varphi \sin \varphi - \Delta \varepsilon_z \end{bmatrix} \sin^2 \theta + \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_{35} \cos \varphi + \Delta \varepsilon_{34} \sin \varphi - \\ \Delta \chi_x \cos^2 \varphi \sin \varphi - \\ \Delta \chi_y \cos \varphi \sin^2 \varphi - \\ \Delta \varepsilon_{15} \cos^3 \varphi - \Delta \varepsilon_{24} \sin^3 \varphi \end{bmatrix} \sin^3 \theta \cos \theta + \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_x \cos^4 \varphi + \Delta \varepsilon_y \sin^4 \varphi + \\ \Delta \delta_z \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \\ 2 \left( \Delta \varepsilon_{16} \cos^2 \varphi + \right. \\ \left. \Delta \varepsilon_{26} \sin^2 \varphi \right) \sin \varphi \cos \varphi \end{bmatrix} \operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 \theta + \begin{bmatrix} \Delta \varepsilon_x \cos^4 \varphi + \Delta \varepsilon_y \sin^4 \varphi + \\ \Delta \delta_z \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \\ 2 \left( \Delta \varepsilon_{16} \cos^2 \varphi + \right. \\ \left. \Delta \varepsilon_{26} \sin^2 \varphi \right) \sin \varphi \cos \varphi - \\ \Delta \delta_x \cos^2 \varphi - \Delta \delta_y \sin^2 \varphi - \\ 2 \Delta \chi_z \cos \varphi \sin \varphi + \Delta \varepsilon_z \end{bmatrix} \sin^4 \theta \quad (7)$$

Nas equações acima, o símbolo  $\Delta$  denota contraste através da interface, por exemplo:  $\Delta Z = Z_2 - Z_1$ . A barra acima de um símbolo denota a média, por exemplo:  $\bar{Z} = \frac{1}{2}(Z_1 + Z_2)$ .

$R_{PP}^{iso}(\theta)$  e  $T_{PP}^{iso}(\theta)$  representam os coeficientes de reflexão e transmissão para meios isotrópicos com contraste suave.  $\theta$  representa o ângulo de incidência e  $\varphi$  é o azimute. As equações (6) e (7) ficam mais simples quando se introduzem simetrias elásticas geradas por sistemas de fraturas verticais, podendo ser de tipo monoclinico, ortorrômbico, hexagonal (VTI e HTI) ou outro. Quando as fraturas que induzem anisotropia são inclinadas, é necessário usar as equações (6) e (7) na sua forma geral.

A matriz  $\tilde{C}$  é calculada usando a equação (3), onde cada elemento da matriz  $\tilde{C}$  é uma função da inclinação das fraturas e da direção do plano de isotropia transversal (plano que contém as fraturas). As equações que permitem calcular os elementos da matriz  $\tilde{C}$  não são apresentadas aqui por serem muito extensas.

Com o propósito de mostrar o efeito da inclinação das fraturas nos coeficientes de reflexão e transmissão, neste trabalho consideramos um modelo que consiste em uma interface entre um meio isotrópico (camada superior) e um meio anisotrópico (camada inferior). No exemplo, a anisotropia do meio é gerada pela presença de fraturas inclinadas e paralelas. Então, a simetria elástica associada é hexagonal, com eixo de simetria inclinado. A inclinação pode ser absolutamente arbitrária. Com o propósito de visualizar o resultado de uma forma simples, escolhemos os planos  $yz$  e  $xz$  como planos que contêm as ondas incidentes, e é nestas direções azimutais que calculamos  $R_{PP}$  e  $T_{PP}$ .

No exemplo, todos os cálculos foram feitos para um ângulo de incidência fixo. Obviamente, podem ser feitos os cálculos para vários valores de ângulo de incidência considerando uma ampla faixa de azimutes. Aqui, o nosso propósito é mostrar somente a dependência dos coeficientes  $R_{PP}$  e  $T_{PP}$  com relação à inclinação das fraturas.

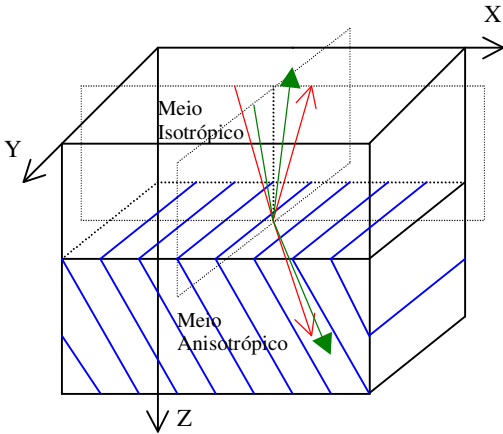


Figura 1. MODELO: Interface isotrópico/anisotrópico. Anisotropia induzida por fraturas inclinadas

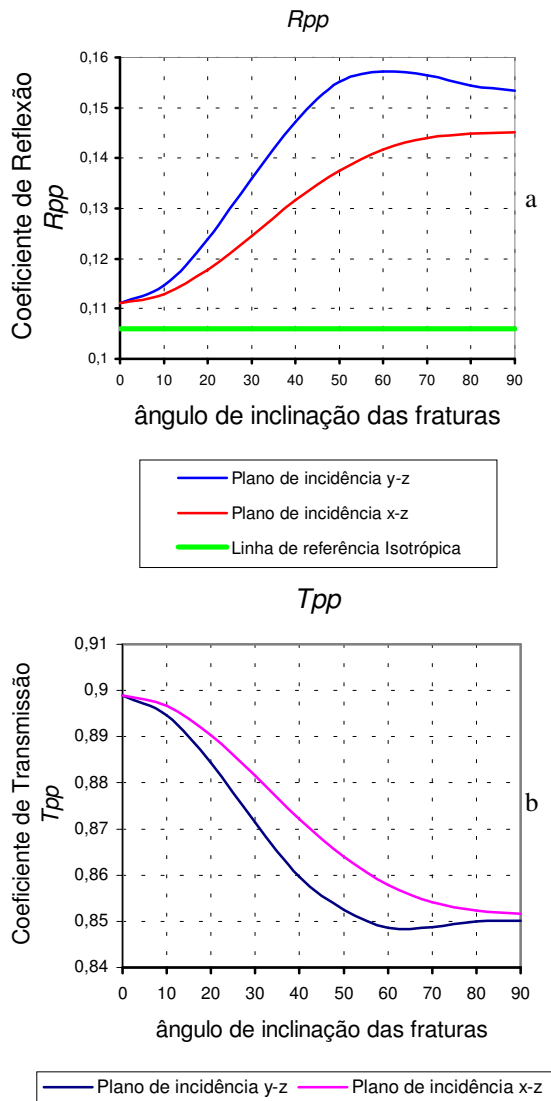


Figura 2. (a) e (b). Variação dos coeficientes de reflexão e transmissão

## DISCUSSÃO

Nota-se claramente que os coeficientes de reflexão e transmissão são fortemente dependentes do ângulo de inclinação das fraturas. Existe uma variação clara de  $R_{pp}$  e  $T_{pp}$  entre os casos extremos que correspondem aos meios com fraturas verticais (HTI) e aos meios com fraturas horizontais (VTI). Devemos esperar que as amplitudes associadas às ondas refletidas sejam fortemente dependentes da inclinação das fraturas que afetam o meio. Isso é muito importante, pois nos leva a reconsiderar os modelos clássicos que envolvem as outras simetrias usadas na modelagem sísmica, principalmente a ortorrômbica e a monoclinica. Para evitar complicações, sempre foram idealizadas simetrias com sendo o resultado da combinação de sistemas de fraturas verticais. Se os sistemas considerassem fraturas inclinadas, devemos esperar que exista pelo menos mais uma variável relevante para ser considerada. Obviamente isso é muito crítico no processo de inversão de dados sísmicos.

Os critérios usados no modelo do meio afetado por fraturas inclinadas, também podem ser usados para caracterizar o efeito do mergulho de camadas finamente estratificadas nos coeficientes de reflexão e transmissão, isso é, nas discordâncias angulares que atuam como interfaces.

## AGRADECIMENTOS

Os autores expressam seu agradecimento ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico CNPq pelo suporte financeiro. Este trabalho faz parte do plano desenvolvido no projeto de pós-doutorado de F. V. Artola no CPGG da UFBA.

## REFERÊNCIAS

- Jech, J., e Psencik, I. 1989. First-order perturbation method for anisotropic media, *Geophys. J. Int.*, **99**, 369-376.
- Psencik, I., e Gajewski, D. 1998. Polarization, phase velocity and NMO velocity of  $qP$  waves in arbitrary weakly anisotropic media, *Geophysics*, **63**, 1754-1766.
- Psencik, I., e Vavrycuk, V. 1998. Weak contrast  $PP$  wave displacement R/T coefficients in weakly anisotropic elastic media, *Pure Appl. Geophys.*, **151**, 699-718.
- Thomsen, L., 1986. Weak elastic anisotropy, *Geophysics*, **51**, 1954-1966.



## Modelagem Acústica 2-D em Paralelo via PVM: Desempenho Computacional Frente a Diferentes Arquiteturas de Hardware

Bulcão, A.; PEC - COPPE/UFRJ; Brasil

Soares, D.M.F.; CENPES/PETROBRAS S/A; Brasil

Mansur, W.J.; PEC - COPPE/UFRJ; Brasil

Bragança, R.S.N. de; CENPES/PETROBRAS S/A; Brasil

### Resumo

O objetivo principal deste trabalho visa a comparação do desempenho computacional do software desenvolvido para a solução de problemas de modelagem acústica bidimensional, regidos pela Equação Escalar da Onda, executados em um cluster de microcomputadores. Varia-se a configuração do cluster através da utilização de diferentes equipamentos de rede (*HUB* e *Switch*), além de se considerar a alteração do número de processadores em cada microcomputador que compõe o cluster.

### Introdução

Na modelagem acústica, devido principalmente a grande complexidade do meio geológico e as condições de contorno do problema, qualquer tratamento analítico das equações diferenciais torna-se impraticável, daí a grande importância dos métodos numéricos de solução de equações diferenciais parciais.

Recentemente as máquinas que tem apresentado um grande poder computacional a um baixo custo, várias delas figurando entre as de maior capacidade computacional na atualidade, são denominadas genericamente de clusters ou Beowulf clusters. Um cluster é um conjunto de computadores ou microcomputadores interligados por uma rede que através do emprego de bibliotecas de envio de mensagens, tais como o PVM (*Parallel Virtual Machine*) ou MPI (*Message Passing Interface*), que funcionam como uma única máquina, multiplicando desta forma o seu poder computacional.

A aplicação dos recursos do processamento em paralelo possibilita a obtenção da solução do problema em um tempo bem mais reduzido. A fim de se alcançar um melhor desempenho dos algoritmos desenvolvidos surgem uma série de questões no que diz respeito a qual configuração de *hardware* possui a melhor relação custo/benefício.

Existem diversas alternativas na especificação das máquinas que compõem um cluster. Neste trabalho pretende-se responder algumas das questões presentes na montagem de um cluster de microcomputadores para a resolução de equações diferenciais transientes através do Método das Diferenças Finitas, tais como:

Qual o tipo de equipamento de rede é o mais adequado para a comunicação entre os microcomputadores de forma a não prejudicar a performance das aplicações?

É vantajosa a utilização de microcomputadores contendo dois processadores (CPU)?

Além de outras questões importantes com relação à implementação computacional, tais como:

A compressão dos dados para posterior envio através da rede acarreta em uma melhoria na eficiência computacional?

### Formulação Matemática

Considerando que a variação de densidade é desprezível e considerando-se apenas a presença de ondas compressoriais tem-se o problema físico governado pela Equação Escalar da Onda (Eq. 1):

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2(x,z)} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + f(t)\delta(x-x_s)\delta(z-z_s) \quad (1)$$

Onde:  $P(x,z,t)$  é a pressão;  $c(x,z)$  é a velocidade de propagação da onda no meio;  $f(t)$  é a fonte sísmica e  $x_s$  e  $z_s$  são as coordenadas espaciais da fonte.

A discretização da equação 1 é feita tradicionalmente através do emprego dos operadores centrais de 2ª e 4ª ordens, respectivamente para a aproximação das derivadas temporais e espaciais [Bordign e Lines 1997]. Além das condições de contorno essenciais e naturais nas simulações numéricas podem ser utilizadas condições de contorno não-reflexivas para simular domínios infinitos [Clayton e Enquist 1977].

### Esquema de Paralelização

A filosofia do processamento em paralelo é, teoricamente, bastante simples. Consiste na divisão de uma determinada tarefa em  $m$  sub-tarefas, que necessitam ou não de intercomunicação entre si, as quais são distribuídas entre vários processadores ou computadores diferentes onde tais informações serão processadas. Desta forma, a princípio, uma tarefa paralelizada em  $m$  processadores será executada  $m$  vezes mais rápida do que seria caso fosse executada em um único processador.

Existem diferentes abordagens para a paralelização de um problema, cada uma delas sendo mais apropriada para um determinado caso específico [Jájá, 1992]. Neste trabalho a estratégia de paralelização empregada baseia-se na decomposição de domínio (*Domain Decomposition*), isto é, o domínio físico do problema é repartido em diversos subdomínios e cada um deles é enviado para ser resolvido por um

## Modelagem Acústica 2-D via PVM

processador diferente. Para manter-se a compatibilidade da solução entre os diversos pedaços torna-se necessário a comunicação entre eles.

Esta abordagem possibilita a solução de problemas de grande porte, que devido a quantidade de memória e o tempo de processamento demandado para sua análise tornariam-se inviáveis de serem executados em um único microcomputador. Tal característica torna-se bem mais evidente em se tratando de problemas 3-D.

A implementação computacional foi feita através da criação de dois programas distintos, denominados *Master* e *Slave*, que se comunicam entre si. A seguir descreve-se as principais atribuições de cada um destes programas.

**Programa *Master*** – (i) Iniciar a análise e ler os dados de entrada, (ii) Dividir e enviar o modelo geológico, e demais parâmetros para os programas *slave*; (iii) Gerenciar e sincronizar a execução dos programas *slave*; (iv) Receber os dados de saída enviados pelos programas *slave* (sismogramas e *snapshots*); (v) Finalizar a análise.

**Programa *Slave*** – (i) Receber a partição do modelo geológico e demais parâmetros que lhe são devidos; (ii) Calcular a solução para um determinado intervalo de tempo; (iii) Enviar e receber os valores das incógnitas nas interfaces das partições dos demais programas *slave*; (iv) Enviar os dados de saída para o programa *master* (sismogramas e *snapshots*).

A figura 1 ilustra esquematicamente o modelo geológico, uma possível decomposição de domínio realizada e as informações de cada uma das partições que devem ser transmitidas aos respectivos vizinhos, além da configuração dos microcomputadores e os programas executados em cada um deles.

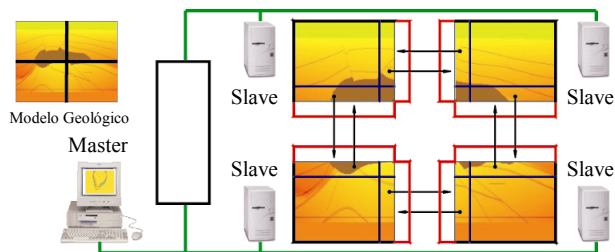


Figura 1 – Representação esquemática do esquema de paralelização.

### Características do Cluster Empregado nas Modelagens

Na obtenção dos resultados apresentados a seguir empregou-se um cluster formado por 08 microcomputadores. Suas características são dadas de acordo com a tabela 1, sendo que foram realizados testes em que um dos processadores foi desabilitado para se simular um cluster composto por microcomputadores contendo um único processador.

Tabela 1 – Características dos microcomputadores do cluster.

CPU	02 processadores Pentium III 550 MHz
Memória	512 Mb
Placa mãe	Intel L440 GX + Server Board

Na intercomunicação entre os microcomputadores foram utilizados diferentes equipamentos de rede. O *HUB* é um equipamento que possui apenas uma única via de comunicação, assim todas as mensagens enviadas concorrem entre si. O *Switch* possui várias vias de comunicação independentes, desta forma o tráfego de mensagens entre 2 microcomputadores não concorrem com as demais mensagens enviadas pelos outros microcomputadores do cluster.

### Resultados Numéricos

No software desenvolvido utilizaram-se internamente valores em dupla precisão para os cálculos das variáveis básicas, desta forma, além de garantir-se uma maior precisão nos cálculos intermediários, tornou-se possível a implementação de um esquema simples para a compressão dos dados a serem transmitidos via rede. Tal esquema consiste na transmissão dos dados em precisão simples, com isto os volumes das mensagens enviadas diminuem em quase 50 %.

Foram efetuados testes comparando-se as respostas obtidas com e sem o emprego do esquema de compressão, realizados em um modelo geológico complexo dividido em 4 partes ao longo de cada uma das direções coordenadas, onde a maior diferença percentual em relação aos valores máximos foi da ordem de  $1 \times 10^{-6}$  %, insignificante para os objetivos pretendidos com tais análises.

Para a medida dos tempos de execução adotou-se a média dos valores registrados para três execuções consecutivas. Empregando-se tal metodologia tem-se melhor representados os efeitos aleatórios inerentes devido a diversos fatores, tais como: as tarefas realizadas pelo sistema operacional, acesso à memória RAM e o próprio hardware de cada um dos microcomputadores envolvidos nestas análises.

A seqüência de teste proposta consiste em se acrescentar uma certa unidade básica, denominada partição, ao domínio físico do problema, deste modo a cada nova partição acrescentada o modelo geológico aumenta de tamanho. A figura 2 ilustra este procedimento, onde as partições estão sendo acrescentadas apenas ao longo da direção longitudinal.

Enviando-se cada partição para um processador diferente mantém-se praticamente fixo o volume de cálculo executado por cada um deles, não importando o número total de partições presentes em uma determinada análise. Considerando-se um esquema de paralelização com 100% de eficiência o tempo total da análise deveria se manter constante. O aumento do tempo total da análise, neste caso, representando uma perda na

## Modelagem Acústica 2-D via PVM

eficiência é devido, basicamente, ao *overhead* do paralelismo, à velocidade de transmissão dos dados e ao tempo de escrita dos resultados (sismogramas e *snapshots*).

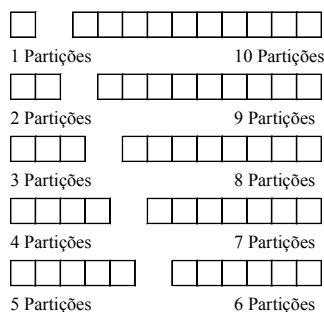


Figura 2 – Filosofia das partições nas seqüências de testes, acrescentadas ao longo da direção longitudinal.

Nas aplicações em paralelo a granularidade é uma importante propriedade, definida como sendo a razão ente os tempos gastos com o processamento e a comunicação entre as tarefas [Jájá, 1992]. Considerando-se partições quadradas o tempo de processamento é proporcional a  $n^2$  e o tempo de comunicação a  $n$ , sendo  $n$  o numero de pontos do grid na lateral da partição. Desta forma, com o propósito de variar a granularidade da aplicação foram realizadas análises com as seguintes dimensões para as partições: 300x300 e 600x600 pontos do grid.

A fim de avaliar-se o impacto da saída dos resultados, isto é o tempo de escrita, foram realizadas seqüências de testes sem a saída dos mesmos. Na tabela 2 encontram-se especificados os parâmetros utilizados nas análises efetuadas.

Tabela 2 – Parâmetros utilizados nas modelagens.

Espaçamento do grid (h)	10 m
Intervalo de tempo	0.0004 s
Tempo total de análise	1.5 s
Intervalo para saída de sanpshots	0.1 s
Velocidade de propagação	3000 m/s
Frequência de corte	60 Hz
Fonte sísmica no centro de cada partição	

Na figura 3, a seguir, apresentam-se os gráficos que resumem os resultados obtidos para o tempo de análise de cada uma das diversas seqüências de testes realizadas.

### Conclusões

De acordo com os resultados apresentados pode-se tecer os seguintes comentários e conclusões:

A compressão de dados só mostrou-se eficiente quando o cluster estava utilizando um equipamento de rede de baixa performance (*HUB*), para os demais casos não houve um ganho significativo.

Com a utilização do *Switch* à 100 Mbps o emprego de microcomputadores *singles* (com apenas um processador) resultou em um melhor desempenho, pois nestes casos, onde o equipamento de rede deixa de interferir significativamente no tempo de análise, o compartilhamento dos recursos da placa mãe (*motherboard*) dos microcomputadores *dual* (com dois processadores) passa a influir para o aumento do tempo de análise.

Observou-se que como a escrita dos resultados é feita em um único *harddisk*, com a agravante de que tais informações são transmitidas ao programa *Master* através dos recursos do PVM, o tempo de análise apresentou um comportamento linear com o aumento do numero de partições; ou seja, a escrita dos resultados não se encontra paralelizada de forma eficiente.

Adotando-se a suposição de que o custo de um microcomputador *dual* seja o dobro de um *single*; supondo-se as mesmas quantidades de recursos por processador, tais como: memória RAM, *harddisk*, etc... e considerando-se apenas os resultados obtidos com o emprego do emprego do *Switch* a 100 Mbps pode-se concluir que a utilização de microcomputadores *single* apresentam uma melhor relação custo/benefício.

Embora as conclusões obtidas com a realização deste trabalho tenham sido obtidas com a execução de softwares desenvolvidos especialmente para a modelagem acústica, tais resultados podem ser extrapolados para softwares desenvolvidos para a solução de outros problemas transientes empregando o Método das Diferenças Finitas, como por exemplo: o caso da Equação da Difusão ou mais especificamente para o caso da Migração Reversa no Tempo (RTM).

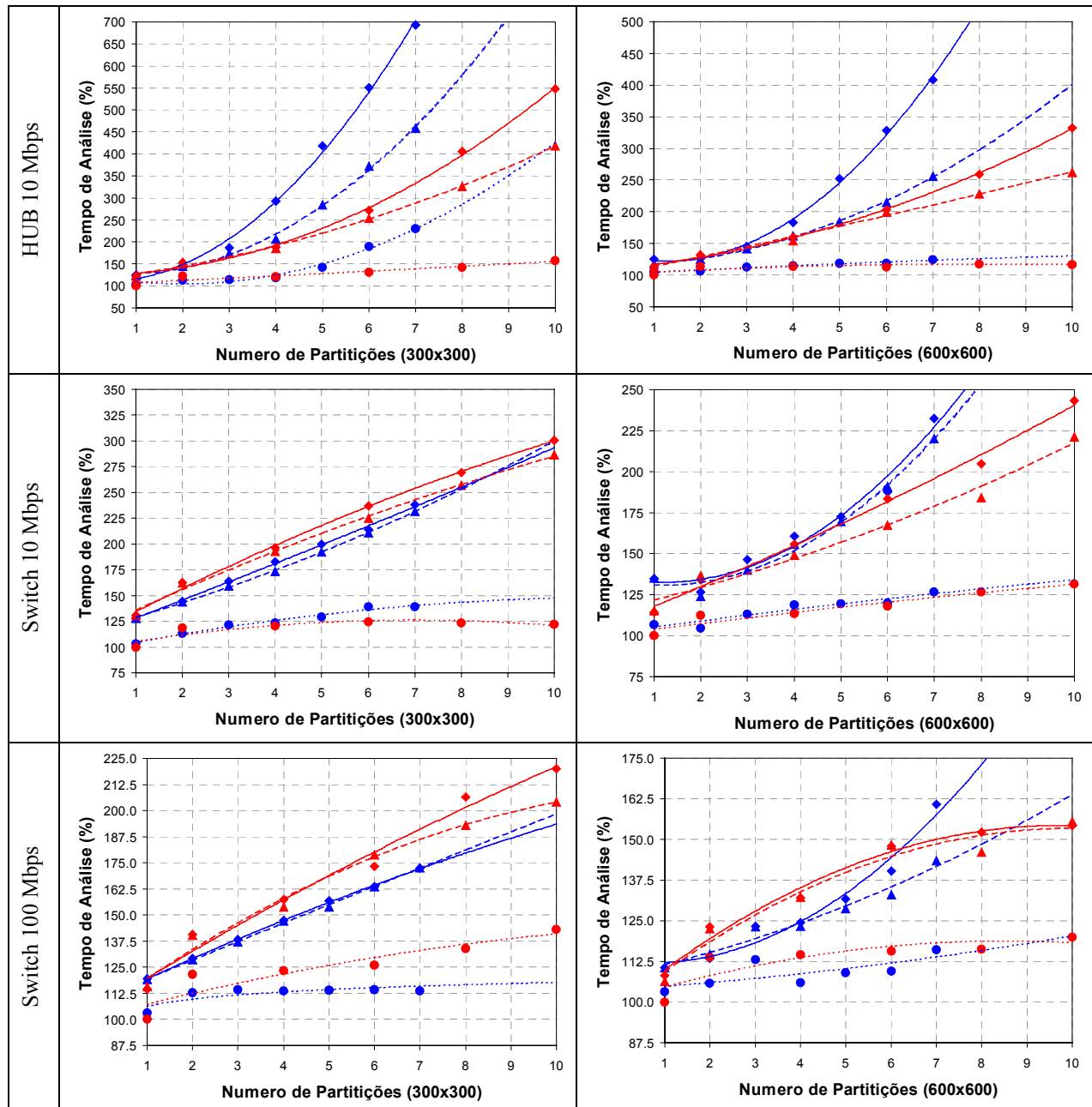
### Agradecimentos

À PETROBRÁS por proporcionar os meios necessários e pela permissão para a publicação deste artigo. Ao CNPq projeto 462304/00-0 (NV) por financiar parte deste trabalho junto a UFRJ.

### Bibliografia

- Bording, R.P.; Lines, L.R.; (1997); *Seismic Modeling and Imaging with Complete Wave Equation*; Course Notes Series, N. 8; Society of Exploration Geophysicists.
- Clayton, R.; Enquist, B.; (1977); Absorbing Boundary Conditions for Acoustic and Elastic Wave Equations; *Bull. Seis. Soc. Am.*, 67:6, pp. 1529-1540.
- Jájá, J.; (1992); *An Introduction to Parallel Algorithms*; Addison-Wesley Pub. Comp.; New York.

## Modelagem Acústica 2-D via PVM



Legenda:

- ◆ - Single processor, escrita dos resultados (sismograma e snapshots), transmissão dos dados da interface em precisão dupla.
- - Single processor, escrita dos resultados (sismograma e snapshots), transmissão dos dados da interface em precisão simples (compressão).
- ▲ - Single processor, sem a escrita dos resultados, transmissão dos dados da interface em precisão simples (compressão).
- ◆ - Dual processor, escrita dos resultados (sismograma e snapshots), transmissão dos dados da interface em precisão dupla.
- - Dual processor, escrita dos resultados (sismograma e snapshots), transmissão dos dados da interface em precisão simples (compressão).
- ▲ - Dual processor, sem a escrita dos resultados, transmissão dos dados da interface em precisão simples (compressão).

Figura 3 – Resumo dos resultados obtidos para o tempo de análise de cada uma das diversas seqüências de testes realizadas.





# Modelagem poroacústica 3-D utilizando a equação de Biot

Alberto A. de A. Queiroz, Marco B. Botelho e Vicente Pinheiro Neto

CPGG/UFBA

## Abstract

An acoustic 3D modeling method with potential application to reservoir characterization, based on Biot's Theory, is presented. The numerical simulation of wave propagation in three-dimensional (3-D) space uses finite difference with second order approximation to time derivatives and fourth order approximation to space derivatives. The model shown here has a diffractor point, simulated by a cube, which has petrophysical properties different from the surrounding 3-D space. So, the modeling procedure presented combines the characteristics of biphasic media, following the Biot's Theory, with the 3-D properties distribution, making it suitable to study real traps.

## Introdução

Os ambientes geológicos que armazenam hidrocarbonetos contêm basicamente uma rocha selante e outra reservatório. O óleo e/ou gás é encontrado nos poros da rocha reservatório, que se comporta como um meio híbrido, com frações sólida e fluida.

Para a indústria de prospecção de petróleo a caracterização dos reservatórios de hidrocarbonetos, são de suma importância no desenvolvimento e produção nos campos de petróleo.

Estas características envolvem a delimitação e descrição de estruturas geológicas associadas a deposição, tectônica e diagênese da rocha, além de variações nos parâmetros petrofísicos da rocha reservatório, bem como a saturação de fluidos,

A descrição desses ambientes de forma mais realística passa pela necessidade de se obter informações de porosidade, densidade dos fluidos saturantes (óleo, gás, água), do formato do grão e do arcabouço, da viscosidade do fluido, do módulo de incompressibilidade e da permeabilidade entre outros.

Os ambientes de reservatórios encontrados na natureza se mostram heterogêneos e bifásicos. Bifásicos devido a fração sólida (arcabouço), formada por grãos com propriedades químicas e mineralógicas diferentes, e uma fase fluida composta por óleo e/ou água e/ou gás. A teoria de Biot (1956) explica a propagação da onda acústica em um meio poroso levando em consideração parâmetros de permeabilidade, densidade do fluido, viscosidade e mo-

vimento relativo gerado pela diferença de fase entre o sólido e o fluido.

A simulação numérica feita neste trabalho é uma extensão dos trabalhos de Hassanzadeh (1991), utilizando a equação de Biot (1956) a baixas frequências resolvido com os operadores de diferenças finitas, com aproximações de segunda ordem para as derivadas no tempo e de quarta ordem no espaço, adotando-se um grid 3-D na forma de paralelepípedo para evitar dispersão numérica. A geometria de aquisição dos dados utilizados, com linha deslocada lateralmente do cubo, tem a finalidade de demonstrar a tridimensionalidade do trabalho.

## Teoria de Biot

A teoria de Biot explica a propagação de ondas em meios porosos, levando em consideração efeitos de permeabilidade e fluxo de fluido relativo, gerado quando o deslocamento da partícula fluida está fora de fase, comparado com o deslocamento da partícula sólida. Embora mais realística ainda faz certas restrições assumindo algumas condições de contorno bem sumarizadas por Zhu and MacMechan (1991) a saber: i) O comprimento de onda é grande em comparação ao tamanho médio dos poros. ii) O deslocamento da partícula associada ao movimento de onda sísmica é pequeno para ambas as fases. iii) A fase líquida é contínua e os poros não conectados são tratados como parte sólida, contribuindo com um efeito de densidade menor. iv) A matriz sólida é elástica localmente homogênea e estatisticamente isotrópica. v) O meio é totalmente saturado. vi) A frequência é baixa para que o fluxo do fluido possa ser descrito pela Lei de Darcy. vii) A força da gravidade e o efeito de espalhamento do campo da onda devido aos poros individuais são negligenciados.

A frequência crítica dada pela teoria de Biot (1956) é representada pela seguinte equação:  $f_c = (\eta\phi)/(2\pi\kappa\rho_f)$ , onde  $\eta$  é a viscosidade do fluido e  $\kappa$  é a permeabilidade intrínseca do meio White (1983). A tortuosidade  $\tau = 1 - r(1 - 1/\phi)$  Bourbie et al. (1987) descreve o efeito de acoplamento entre o sólido e fluido, sendo  $r$  o fator de partículas esféricas ( $r = 1/2$ ). A velocidade da onda P2 (P lenta) pode ser expressa por:  $V_{lenta} = V_{fluido}/\sqrt{\tau}$ , onde  $V_{fluido}$  é a velocidade da onda compressional no fluido poroso e  $\tau$  a tortuosidade.



## Equação de Biot

A equação dinâmica que descreve a propagação de ondas compressoriais em um meio poroso é dada por:

$$\nabla^2 (P_e + Q_e) = \rho_{11}\ddot{e} + \rho_{12}\ddot{e} + b(\dot{e} - \dot{\epsilon}) \quad (1)$$

$$\nabla^2 (Q_e + R_e) = \rho_{12}\ddot{e} + \rho_{22}\dot{\epsilon} - b(\dot{e} - \dot{\epsilon}) \quad (2)$$

Na forma matricial temos a equação proposta por Hassanzadeh (1991)

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} e \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{e} \\ \ddot{\epsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & -b_1 \\ -b_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix}$$

Sendo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\rho_{11}R - \rho_{12}Q)/T & (\rho_{12}R - \rho_{22}Q)/T \\ (\rho_{12}P - \rho_{11}Q)/T & (\rho_{22}P - \rho_{12}Q)/T \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (b(R+Q))/T \\ (b(P+Q))/T \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$b = \frac{\eta \cdot \Phi^2}{k} \quad (4)$$

$$T = PR - Q^2 \quad (5)$$

Onde b é o coeficiente de amortecimento e P, Q, R são constantes elásticas.

## Solução das equações de Biot por Diferenças Finitas

Sendo o campo de onda 3-D  $e(x, y, z, k) = (m\Delta x, n\Delta y, p\Delta z, k\Delta t)$  para a parte de deslocamento no sólido e  $\epsilon(x, y, z, k) = (m\Delta x, n\Delta y, p\Delta z, k\Delta t)$  para o deslocamento no líquido e estendendo a solução proposta por Pinheiro and Botelho (1996) para o caso 3-D, o operador laplaciano atua da seguinte forma:

$$\nabla^2 \begin{bmatrix} e \\ \epsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e_{m,n,p}^k + \frac{\partial^2}{\partial y^2} e_{m,n,p}^k + \frac{\partial^2}{\partial z^2} e_{m,n,p}^k \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \epsilon_{m,n,p}^k + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \epsilon_{m,n,p}^k + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \epsilon_{m,n,p}^k \end{bmatrix}$$

onde as derivadas temporais de primeira e segunda ordem são respectivamente:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} e_{m,n,p}^k \\ \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{m,n,p}^k \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} \ddot{e} \\ \ddot{\epsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} e_{m,n,p}^k \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \epsilon_{m,n,p}^k \end{bmatrix} \quad (6)$$

A solução das derivadas espaciais de segunda ordem e com aproximação de quarta ordem no espaço resolvida com o operador de diferenças finitas para as partes sólida e fluida é dada por:

### Parte sólida

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} e_{m,n,p}^k = \frac{1}{12(\Delta x)^2} \left[ -e_{m-2,n,p}^k + 16e_{m-1,n,p}^k - 30e_{m,n,p}^k + 16e_{m+1,n,p}^k - e_{m+2,n,p}^k \right] \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} e_{m,n,p}^k = \frac{1}{12(\Delta y)^2} \left[ -e_{m,n-2,p}^k + 16e_{m,n-1,p}^k - 30e_{m,n,p}^k + 16e_{m,n+1,p}^k - e_{m,n+2,p}^k \right] \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} e_{m,n,p}^k = \frac{1}{12(\Delta z)^2} \left[ -e_{m,n,p-2}^k + 16e_{m,n,p-1}^k - 30e_{m,n,p}^k + 16e_{m,n,p+1}^k - e_{m,n,p+2}^k \right] \quad (9)$$

### Parte Fluida

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \epsilon_{m,n,p}^k = \frac{1}{12(\Delta x)^2} \left[ -\epsilon_{m-2,n,p}^k + 16\epsilon_{m-1,n,p}^k - 30\epsilon_{m,n,p}^k + 16\epsilon_{m+1,n,p}^k - \epsilon_{m+2,n,p}^k \right] \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \epsilon_{m,n,p}^k = \frac{1}{12(\Delta y)^2} \left[ -\epsilon_{m,n-2,p}^k + 16\epsilon_{m,n-1,p}^k - 30\epsilon_{m,n,p}^k + 16\epsilon_{m,n+1,p}^k - \epsilon_{m,n+2,p}^k \right] \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \epsilon_{m,n,p}^k = \frac{1}{12(\Delta z)^2} \left[ -\epsilon_{m,n,p-2}^k + 16\epsilon_{m,n,p-1}^k - 30\epsilon_{m,n,p}^k + 16\epsilon_{m,n,p+1}^k - \epsilon_{m,n,p+2}^k \right] \quad (12)$$

Rearranjando as equações segundo os operadores, temos a solução da equação de Biot para o caso 3-D:

$$e_{m,n,p}^{k+1} = (w_{22}W_1 - w_{12}W_2)/\Delta \quad (13)$$

$$\epsilon_{m,n,p}^{k+1} = (w_{11}W_2 - w_{21}W_1)/\Delta \quad (14)$$

onde,  $\Delta = w_{11}w_{22} - w_{12}w_{21}$ .

$$\begin{aligned} W_1 = & \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[ -e_{m-2,n,p}^k + 16e_{m-1,n,p}^k - 30e_{m,n,p}^k + 16e_{m+1,n,p}^k - e_{m+2,n,p}^k \right] \\ & + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 \left[ -e_{m,n-2,p}^k + 16e_{m,n-1,p}^k - 30e_{m,n,p}^k + 16e_{m,n+1,p}^k - e_{m,n+2,p}^k \right] \\ & + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \right)^2 \left[ -e_{m,n,p-2}^k + 16e_{m,n,p-1}^k - 30e_{m,n,p}^k + 16e_{m,n,p+1}^k - e_{m,n,p+2}^k \right] \\ & + \frac{b_1 \Delta t}{2} \left[ e_{m,n,p}^{k-1} - \epsilon_{m,n,p}^{k-1} \right] + \\ & a_{11} \left[ 2e_{m,n,p}^k - e_{m,n,p}^{k-1} \right] + a_{12} \left[ 2\epsilon_{m,n,p}^k - \epsilon_{m,n,p}^{k-1} \right] \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_2 = & \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 \left[ -\epsilon_{m-2,n,p}^k + 16\epsilon_{m-1,n,p}^k \right. \\
 & \left. - 30\epsilon_{m,n,p}^k + 16\epsilon_{m+1,n,p}^k - \epsilon_{m+2,n,p}^k \right] \\
 & \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta t}{\Delta y} \right)^2 \left[ -\epsilon_{m,n-2,p}^k + 16\epsilon_{m,n-1,p}^k \right. \\
 & \left. - 30\epsilon_{m,n,p}^k + 16\epsilon_{m,n+1,p}^k - \epsilon_{m,n+2,p}^k \right] \\
 & + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta t}{\Delta z} \right)^2 \left[ -\epsilon_{m,n,p-2}^k + 16\epsilon_{m,n,p-1}^k \right. \\
 & \left. - 30\epsilon_{m,n,p}^k + 16\epsilon_{m,n,p+1}^k - \epsilon_{m,n,p+2}^k \right] \\
 & + \frac{b_2 \Delta t}{2} \left[ e_{m,n,p}^{k-1} - \epsilon_{m,n,p}^{k-1} \right] + \\
 & + a_{21} \left[ 2e_{m,n,p}^k - e_{m,n,p}^{k-1} \right] + a_{22} \left[ 2\epsilon_{m,n,p}^k - \epsilon_{m,n,p}^{k-1} \right] \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + \frac{b_1 \Delta t}{2} & a_{12} + \frac{b_1 \Delta t}{2} \\ a_{21} + \frac{b_2 \Delta t}{2} & a_{22} + \frac{b_2 \Delta t}{2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

## Fonte

Para a modelagem foi utilizada uma fonte Gaussiana proposta por Kelly et al. (1976) dada por:

$$f(t) = (T - f_s - t) e^{[-2\pi f(T+f_s-t)/1,25]^2} \quad (18)$$

Onde  $f = 208Hz$  é a frequência dominante de propagação,  $T$  é o período e  $f_s$  é a fase do sinal. O espaçamento  $z$  pode ser calculado em função dos parâmetros  $x$  e  $y$ .

## Modelo 3-D e resultados

O modelo representa dois meios com parâmetros petrofísicos diferentes (tabelas 1 e 2). Seja o meio 1 a rocha encaixante e o meio 2 um corpo heterogêneo, com o formato de um cubo, com 10m de aresta. A face do topo está a 25m de profundidade. O centro de massa do corpo cúbico está nas coordenadas (30,30,30). Para demonstrar a tridimensionalidade das equações de propagação da onda, posicionou-se o arranjo de aquisição deslocado lateralmente do corpo heterogêneo. A fonte está posicionada em  $S(0,100,0)$  e os geofones espalhados ao longo do eixo  $Y$ ,  $G(0,Y,0)$ . O snapshot mostrado na figura 1(b), corresponde ao tempo de 0,04 s e o da fig1(c) ao tempo de 0,045s, ambos registrados na posição espacial  $(x,y=30,z)$  que revelam a onda direta e as reflexões e difrações provenientes do cubo. O sismograma sintético, registrado pelo arranjo acima descrito, nos mostra a onda direta e as reflexões e difrações provenientes do corpo

heterogêneo deslocado lateralmente (fig 2). Vale ressaltar que o cubo comporta-se como um ponto difrator, já que suas dimensões são menores que o comprimento de onda de  $\lambda = 15m$ .

## Conclusões

Apresentamos um método de modelagem em 3-D, utilizando a equação de Biot (1956) para meios poroacústicos. As velocidades dos dois meios são calculadas em função dos parâmetros petrofísicos: porosidade, permeabilidade, viscosidade e densidade do fluido, entre outros, o que torna este procedimento uma ferramenta com grande potencial para investigação de reservatórios pela indústria de exploração.

## Agradecimentos

Os dois primeiros autores agradecem à PGS do Brasil pelo apoio financeiro à execução dessa pesquisa, e também à ANP pela bolsa de pesquisa.

## Referências

- Biot, M. A., 1956, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid.: The journal of the acoustical society of america, **28**, no. 2.
- Bourbie, T., Coussy, O., and Zinszner, B., 1987, Acoustic of porous media: Institut francais de petrole publications, gulf publishing company editions technip edition.
- Hassanzadeh, S., 1991, Acoustic modeling in fluid-saturated porous media: Geophysics, **56**, no. 04, 424-435.
- Kelly, K. R., Ward, W. R., Treitel, S., and Alford, R. M., 1976, Synthetic seismograms: A finite-difference approach.: Geophysics, **41**, 2-27.
- Pinheiro, V., and Botelho, M., 1996, Solução do sistema de equações de biot para meios acústicos porosos usando diferenças finitas com operadores de quarta ordem: Revista Brasileira de Geofísica, **14(2)**, no. 04, 131-145.
- White, J. E., 1983, Underground sound application of seismic waves: Elsevier, Amsterdam New York.
- Zhu, X., and MacMechan, 1991, Numerical simulation of seismic responses of poroelastic reservoirs using biot theory.: Geophysics, **56**, no. 3, 328-339.

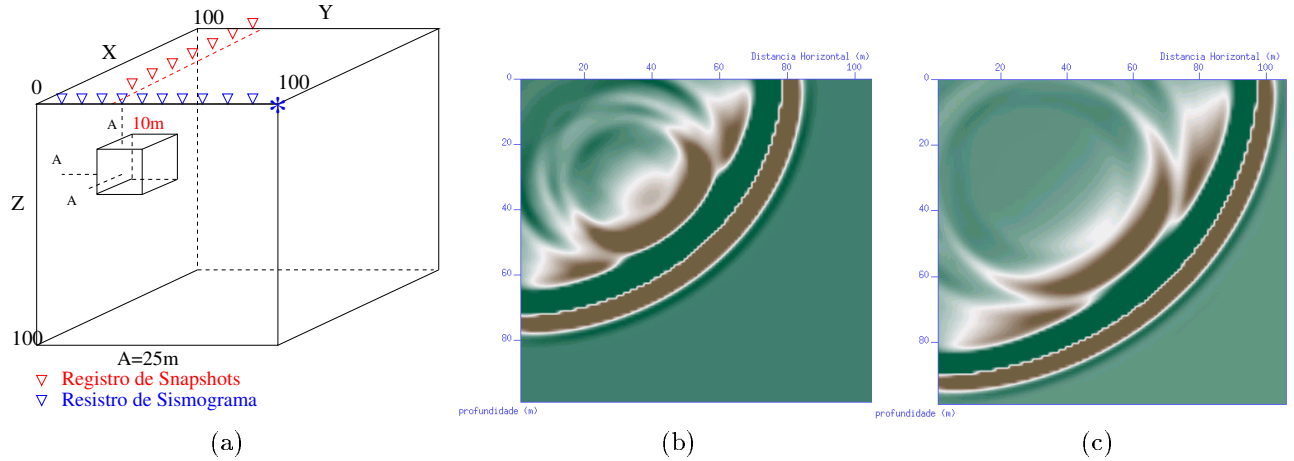


Figura 1: (a) (modelo3-D); (b) (snapshot t=0.04s); (c) (snapshot t=0.045s)

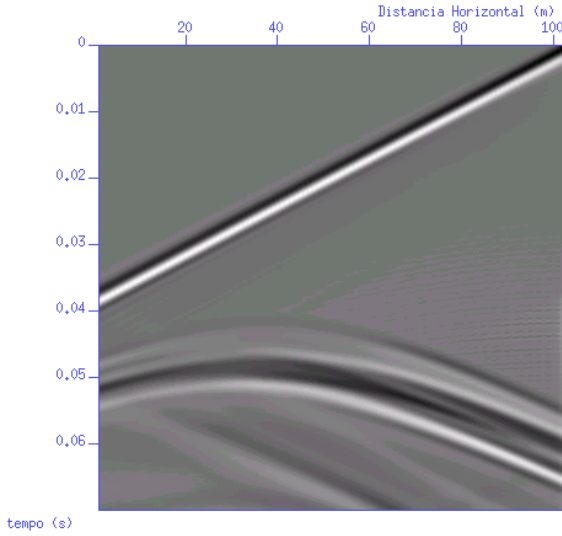


Figura 2: Simograma com  $\Delta t=125 \mu s$   $\Delta x=\Delta y=0.750m$  e  $\Delta z=0.754m$

**LEGENDA**

- $k_s$ : Módulo de incompressibilidade do sólido
- $k_f$ : Módulo de incompressibilidade do fluido
- $\mu$ : módulo de rigidez do sólido
- $\rho_s$ : densidade da matriz sólida
- $\rho_f$ : densidade da matriz fluida
- $\phi$ : porosidade do meio
- $\kappa$ : permeabilidade do meio
- $\eta$ : viscosidade do fluido
- $k_o$ : Módulo de incompressibilidade do meio vazio
- $k$ : Módulo de incompressibilidade do meio saturado
- $\rho$ : densidade média do meio saturado
- $f_c$ : Freqüência crítica
- $\tau$ : Tortuosidade
- $V_{p1}$ : Velocidade da onda compressional

tabela I		DADOS DO MODELO						
cubo	$k_s$	$k_f$	$\mu$	$\rho_s$	$\rho_f$	$\kappa$	$\eta$	$\phi$
	$N/m^2$			$Kg/m^3$		$mD$	$cP$	$\%$
1	$11 \times 10^9$	$3 \times 10^9$	$5 \times 10^9$	2400	900	400	1	25
2	$12,5 \times 10^9$	$8 \times 10^9$	$7.5 \times 10^9$	2500	1000	3	0.6	2

tabela II		PARÂMETROS DO MODELO				
cubo	$k_o$	$k$	$f_c$	$\tau$	$\rho$	$V_{p1}$
	$N/m^2$		Hz	-	$Kg/m^3$	$m/s$
1	$0,81 \times 10^9$	$6.7 \times 10^9$	$0.11 \times 10^6$	2,5	2025	2572.7
2	$6,2 \times 10^9$	$12 \times 10^9$	$0.64 \times 10^6$	25,5	2470	3008.9



## Modelagem Sísmica 3-D em Clusters - Análise de Performance

Bragança, R.S.N. de; PETROBRAS S/A; Brasil

Bulcão, A.; PEC - COPPE/UFRJ; Brasil

Soares, Djalma M.F.; PETROBRAS S/A; Brasil

Mansur, W.J.; PEC - COPPE/UFRJ; Brasil

### Resumo

Neste trabalho apresenta-se, além dos conceitos básicos do processamento paralelo, uma completa análise da performance de um software de modelagem sísmica 3-D acústica, de grande importância na indústria petrolífera. A partir dos dados apresentados torna-se possível estimar o tempo total de execução da simulação de um modelo dado, considerando-se seu processamento em um cluster de microcomputadores composto por 72 máquinas.

### Introdução

A necessidade crescente de se obter uma melhor imagem de estruturas complexas em sub-superfície tem levado a um rápido crescimento de aquisições 3-D e à necessidade do emprego de esquemas de imageamento pré empilhamento em profundidade, demandando recursos de computação até pouco tempo inimagináveis. Os atuais avanços nas tecnologias de rede e na performance dos microprocessadores tornaram viável a utilização de vários microcomputadores, formando um cluster, para a simulação computacional de tais casos. A modelagem sísmica via Método das Diferenças Finitas é o núcleo de diversos programas de Migração Reversa no Tempo (RTM) em profundidade. Algoritmos deste tipo, computacionalmente intensos, são fortes candidatos a se beneficiarem desta nova tecnologia de hardware, obtendo os recursos computacionais necessários para tais simulações, reduzindo drasticamente o tempo total de execução.

### Definições

Para a melhor compreensão das grandezas estudadas neste trabalho as seguintes notações são foram utilizadas:

L	Número de máquinas em uma tarefa paralela
N	Número de pontos do grid nas 3 dimensões
n	Número de pontos do grid em uma dimensão
T1	Tempo total de execução da análise usando-se código serial
T	Tempo total de execução da análise usando o código paralelo
	<ul style="list-style-type: none"><li>• <math>T^A</math> Tempo total de execução de uma análise de A segundos</li><li>• <math>T_L</math> Tempo total de execução da análise usando-se o código paralelo com L máquinas</li></ul>
T <sub>proc</sub>	Parcela de T devida aos cálculos numéricos
T <sub>com</sub>	Parcela de T devida à comunicação entre as tarefas
T <sub>s</sub>	Parcela de T referente à parte serial do programa (leitura de dados)

T<sub>p</sub> Parcela de T referente à parte paralela do programa (cálculo numérico + *overhead*)

das notações acima algumas relações são obtidas:

$$T = T_s + T_p$$

$$T_p = T_{proc} + T_{com}$$

### Alguns Conceitos de Processamento Paralelo

#### • Speedup

O ganho em tempo decorrente da paralelização do código é comumente conhecido com *speedup* (S) e indica quantas vezes o código paralelo é mais rápido que o equivalente serial, e pode ser calculado através da equação:

$$S = \frac{T1}{T_L}$$

Onde T1 é o tempo de execução do código serial e T<sub>L</sub> o do paralelo usando L máquinas.

#### • Eficiência

A eficiência (E) de um programa paralelo pode ser calculada pela equação:

$$E = \frac{S}{L} = \frac{T1}{(L \cdot T_L)}$$

Portanto a eficiência de um programa serial é sempre 100% e um programa paralelo com eficiência de 100% rodando em L máquinas rodará L vezes mais rapidamente que o serial.

#### • Granularidade

A granularidade (G) é uma importante propriedade das aplicações paralelas e é definida pela razão entre os tempos de processamento (T<sub>proc</sub>) e comunicação (T<sub>com</sub>).

$$G = \frac{T_{proc}}{T_{com}}$$

Uma baixa granularidade significa que se está dependendo muito tempo em comunicação e pouco no processamento i.e. na resolução do problema em si. Logo quanto maior a granularidade melhor será o desempenho da aplicação.

### Metodologia

O Método de Diferenças finitas foi empregado para a resolução da equação diferencial do problema e em sua formulação foram utilizados operadores centrais de 2<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> ordens para as aproximações das derivadas temporais e espaciais, respectivamente. Como estratégia de paralelismo do algoritmo empre-

## Modelagem Sísmica 3-D em Clusters

gou-se a técnica da decomposição de domínio, onde o domínio físico do problema foi subdividido em partições, tendo sido então cada uma delas enviadas para serem processadas em um dos microcomputadores que compõem o cluster.

Tal estrutura de paralelismo foi implementada com a criação de dois programas distintos, denominados *Master* e *Slave*, comunicando-se através do PVM (Parallel Virtual Machine), uma camada de software de domínio público desenvolvida especialmente para este fim. Detalhes sobre a estrutura de programação adotada podem ser obtidos em [1,2]

As características do cluster usado para a realização deste trabalho encontram-se na tabela 1:

Tabela 1: Especificações do Cluster

Número de nós	72
Interconexão dos nós	Fast ethernet Switch
Processador	Pentium III (Katmai) 550 Mhz 512Kb cache
Memória RAM por nó	768 Mb
Sistema de disco	SCSI RAID5 via NFS

O tempo total de execução do programa de modelagem acústica desenvolvido é proporcional ao número pontos do *grid* e ao número de incrementos de tempo necessários para se alcançar o tempo final de análise do modelo geológico a ser analisado. Neste trabalho consideraram-se apenas partições cúbicas de modo que  $N = n^3$ . Espera-se que o tempo de processamento  $T_{proc}$  seja proporcional a  $N$ , o que implica em:  $T_{proc} \propto n^3$ , por outro lado, o tempo de comunicação  $T_{com}$  é proporcional a soma das áreas de contato entre as diversas partições que compõem o modelo geológico, assim:  $T_{com} \propto n^2$ . Portanto a granularidade deverá apresentar um crescimento linear com  $n$ .

Para se obter um panorama geral do comportamento do software desenvolvido, realizaram-se várias baterias de testes considerando-se modelos geológicos homogêneos com partições variando de 50 x 50 x 50 até 350 x 350 x 350 pontos do grid. Os parâmetros utilizados em todas as modelagens encontram-se na tabela 2.

Tabela 2: Parâmetros das modelagens por Dif. Finitas

Espaçamento do grid	12,5 m
Intervalo de tempo	0,0004 s
Tempo total de análise	0,02 s
Frequência de corte	28 Hz
Modelo	Homogêneo, $V=3,0$ Km/s

Foram efetuados testes considerando-se arranjos cúbicos com as partições, formando assim o modelo geológico do problema. A figura 1 apresenta

os quatro tipos de arranjos, considerando-se:  $(1)^3 = 1$ ,  $(2)^3 = 8$ ,  $(3)^3 = 27$ ,  $(4)^3 = 64$ . partições. Desta maneira os modelos geológicos assim formados variam de 50 x 50 x 50 (1 partição) até 1400 x 1400 x 1400 (64 partições) pontos do grid.

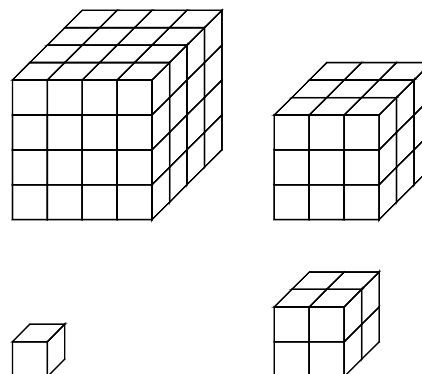


Figura 1: Modelos compostos de 1, 8, 27 e 64 partições.

Para agilizar a obtenção dos tempos de execução das análises efetuadas, mediu-se separadamente o tempo  $T_s$  de leitura do modelo ( que independe do tempo de análise escolhido) e o tempo  $T_p$  de cálculo, este último realizado para uma análise reduzida de 0,02 segundos. O tempo de execução para uma análise típica de 5 segundos é então calculado pela expressão:

$$T = T^{5.0} = T_s + 250 * T_p^{0.02}$$

Qualquer menção a  $T$  refere-se a  $T^{5.0}$  ou seja, ao tempo total de execução projetado para uma análise típica de 5 segundos.

Para minimizar pequenas flutuações nos tempos de execução obtidos com a realização das seqüências de modelagens, cada análise foi repetida três vezes e as médias dos tempos foram extraídas. Tais flutuações são atribuídas principalmente ao uso da CPU por outras tarefas pertinentes ao sistema operacional. Destaca-se que nas análises realizadas não foram considerados os tempos despendidos para a escrita dos resultados das modelagens (sismogramas e *snapshots*).

Certos tamanhos de partição apresentaram um comportamento anômalo nos tempos de processamento. Na vizinhança de um destes pontos anômalos foram efetuadas análises adicionais com um menor incremento no tamanho da partição.

Como critério para caracterizar um ponto como sendo “anômalo” tomamos como premissa que o tempo de execução  $T_p$  sempre cresce com  $N$ . Assim sua diminuição com o aumento de  $N$  significa que o valor de  $T_p$  anterior é anômalo e deverá ser desconsiderado.

## Modelagem Sísmica 3-D em Clusters

### Resultados

A figura 2 apresenta o gráfico do tempo total de execução  $T_1$  em função do número total  $N$  de pontos da *grid* para o processamento em um único microcomputador (serial) e comprova que à exceção dos pontos considerados anômalos, esta relação é linear. A curva contínua representa a reta que melhor se ajusta aos pontos fornecidos e sua equação é:

$$T_1 = 7.2069E-3 * N \text{ segundos}$$

A figura 3 é resultante da superposição dos gráficos  $T \times N$  para os arranjos com 1, 8, 27 e 64 máquinas, com suas respectivas retas ajustadas que fornecem as equações da tabela 3.

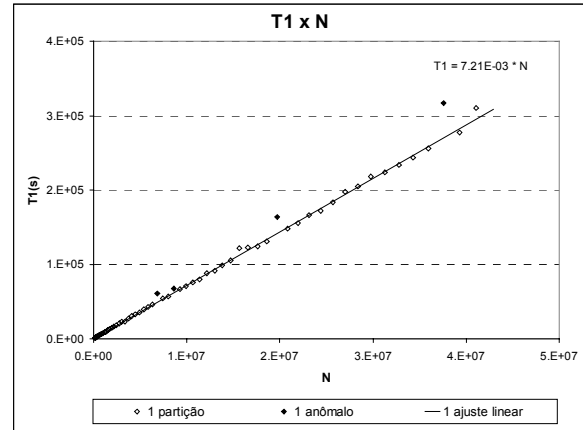


Figura 2: Gráfico  $T \times N$  para 1 partição (serial)

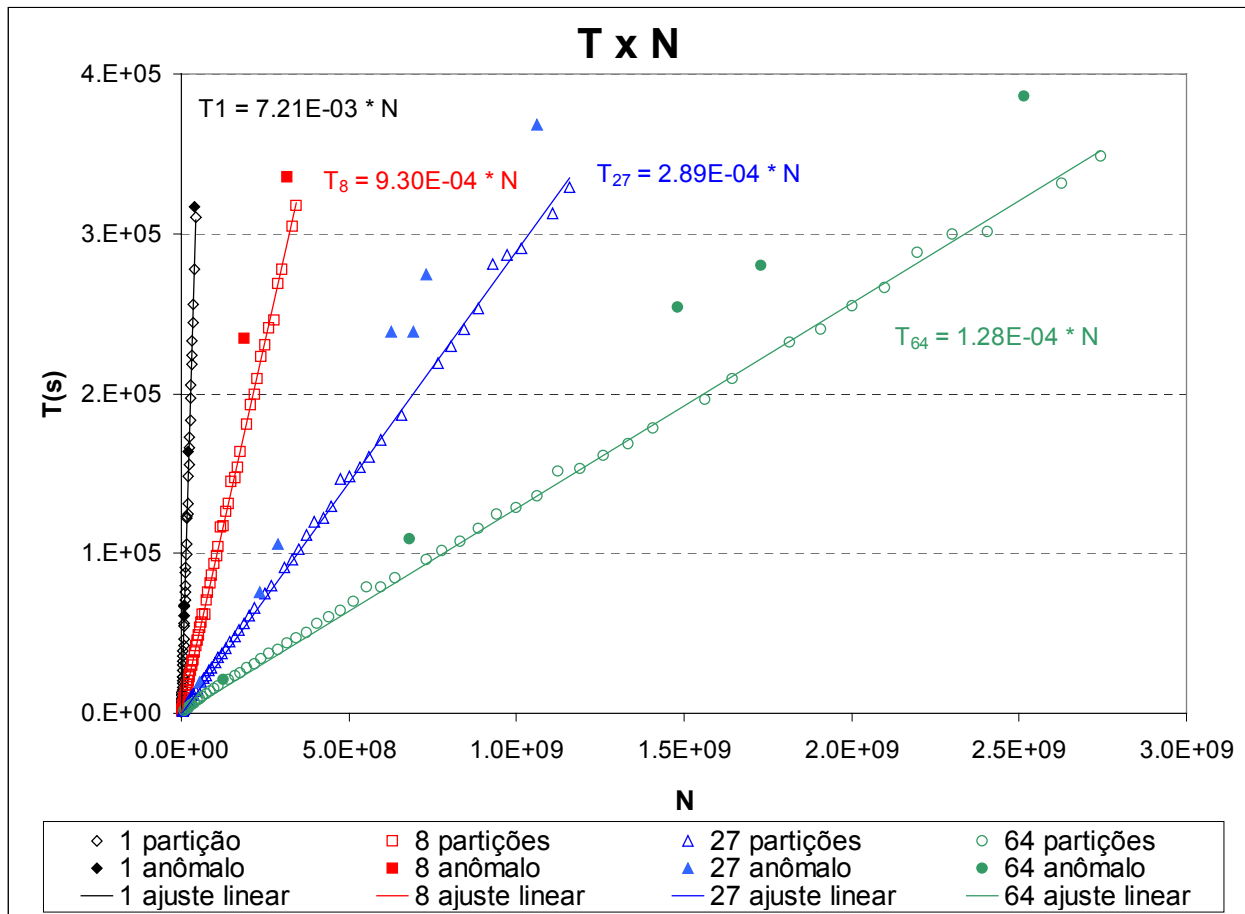


Figura 3: Gráfico  $T \times N$  para os arranjos cúbicos com 1, 8, 27 e 64 máquinas.

Tabela 3: Funções de tempo ajustadas para os arranjos com 1, 8, 27 e 64 partições

$T_1 = 7,2069E-3 * N$ segundos
$T_8 = 9,3013E-4 * N$ segundos
$T_{27} = 2,8954E-4 * N$ segundos
$T_{64} = 1,2820E-4 * N$ segundos

Novamente observa-se a presença de pontos que não recaem sobre as respectivas retas ajustadas.

Para explicar a presença de anomalias observadas, fez-se um refinamento do gráfico  $T \times N$  na vizinhança de um ponto anômalo, com várias combinações de uso de memória cache, obtendo-se a figura 4. Nota-se que para as configurações onde o cache L2

## Modelagem Sísmica 3-D em Clusters

estava presente, a anomalia se deu para  $N=1,85E+8$  e que a mesma não ocorreu quando o cache L2 estava ausente.

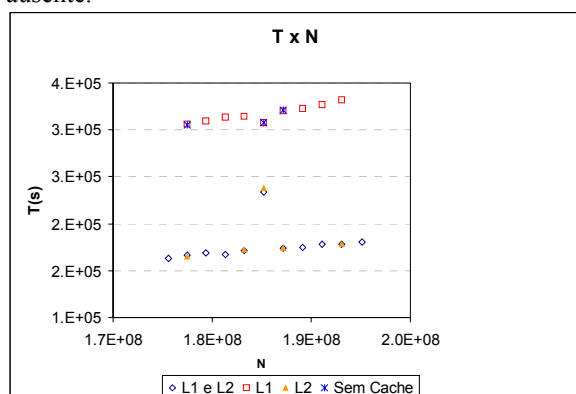


Figura 4: Gráfico T x N para um arranjo cúbico 2 x 2 x 2 = 8 máquinas na vizinhança de  $N=1,85E+8$  para várias configurações de cache.

A partir dos coeficientes das equações da tabela 3 pode-se calcular o *speedup* e a eficiência do cluster, gerando assim a tabela 4.

Tabela 4: Eficiência e Speedup obtidos a partir das curvas ajustadas.

Coefficiente	Eficiência	Speedup
7,2069E-3	100,00 %	1,00
9,3013E-4	96,85%	7,75
2,8954E-4	92,19%	24,89
1,2820E-4	87,84%	55,22

### Análise dos resultados e conclusões

O gráfico da figura 2 mostra que à exceção de pequenas flutuações e dos pontos anômalos, o comportamento da análise serial é linear. A figura 3 mostra que um comportamento quase linear ocorreu para arranjos com 8, 27 e 64 máquinas indicando que o *overhead* de comunicação do cluster é ainda pequeno para o volume de processamento envolvido. Mesmo grandes modelos, com  $N=2,74$  bilhões de pontos, ocupando 44 Gbytes de memória RAM distribuídas em 64 máquinas, não prejudicaram o desempenho do cluster. Isto se deve à elevada granularidade do problema, principalmente para grandes valores de N. Para pequenos valores de N pode-se observar um ténue desvio das retas ajustadas, principalmente nas curvas correspondentes a 27 e 64 partições, indicando que a baixa granularidade destes casos leva a um pequeno atraso ( $\propto n^2$ ) no tempo de análise.

O gráfico da figura 3 é de extrema importância visto que ele permite estimar o tempo de processamento dado um determinado tamanho de modelo e o número de máquinas que o processarão.

Como bem mostra a figura 4, os pontos que não recaíram sobre as curvas ajustadas são explicados com sendo anomalias geradas por algum efeito de batimento entre o tamanho da partição alocada em memória e o tamanho da memória cache L2 do microprocessador, visto que o fenômeno só ocorre para alguns poucos tamanhos de partição e apenas quando o cache L2 está habilitado. A figura também mostra que apesar da ausência do cache L1 não provocar mudança significativa, o cache L2 reduz em média 46 % o tempo de execução exceto no caso anômalo, em que o cache L2 teve sua performance comprometida, reduzindo o tempo de execução em apenas 23,5 %.

A proporção  $T_s/T_p$  entre o tempo de processamento despendido na leitura do modelo e o tempo utilizado no cálculo é muito pequena, tornando a parte serial desprezível e contribuindo para a obtenção de um elevado fator de eficiência e *speedup* médios para o cluster

O uso de clusters de microcomputadores para a modelagem sísmica 3-D acústica é uma realidade dado o seu baixo custo e visto que sua performance manteve-se bastante elevada (próxima de 90%) mesmo para 64 máquinas.

A solução de rede utilizada (*fast ethernet switch*) comportou bem o tráfego gerado pelo problema, mesmo para um grande número de máquinas, não gerando nenhum tipo de *overhead* que destruísse o comportamento quase linear de T x N para 64 máquinas e grandes valores de N.

### Referências

- [1] Myczkowski, J.; McCwan, D.; Mufti, I.; (1991); Finite-Difference Seismic Modeling in Real Time, *Geophysics*, TheLeading Edge. 6, 49-52.
- [2] Ewing, R.; Sharpley, R.; Mitchum, D.; Oleary, P., Sochacki, J.; (1994), Distributed Computation of Wave Propagation Models Using PVM. *IEEE Parallel & Distributed Technology*, 2, 26-31.

### Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer à PETROBRAS pela permissão da publicação deste trabalho, ao Chefe da Gerência de Técnicas de Exploração João Cláudio Conceição que em todos os momentos defendeu a construção do cluster SISMO3 no CENPES, ao Programa de Ampliação de Fronteiras Exploratórias da PETROBRAS (PROFEX) que financiou todo o projeto e ao colega Alexandre Gamma que em muito colaborou em sua construção.

Ao CNPq projeto 462304/00-0 (NV) por financiar parte deste trabalho junto a UFRJ.



# Modelagem Sísmica com as Equações Elástica e de Biot em Meios Simulando Reservatórios de Hidrocarbonetos

Gino Francisco dos Passos e Marco A. Barsottelli Botelho

CPGG/UFBA

## Abstract

This work presents a study on the seismic response of porous media, saturated by different fluids, according with the Biot/Gassmann theory. Elastic and poroelastic finite difference modelling results are compared, for a reservoir rock model, with frequencies in the seismic range (10-100 Hz). Elastic isotropic modelling is accomplished in an effective medium, corresponding to a poroelastic medium with the same parameters but viscosity, tortuosity and permeability. Poroelastic modelling is tested for the presence of the slow P wave, showing measurable results with non viscous fluids. Attenuation and dispersion of the fast P and the S waves are not apparent, denoting little influence, due to global flow, of practical values of permeability and viscosity on this frequency range.

## Introdução

A avaliação da resposta sísmica de um reservatório de hidrocarbonetos constitui em fonte de informações importante para o melhor aproveitamento do potencial de exploração, delimitação de capas de gás e em processos de recuperação secundária. O mapeamento de parâmetros petrofísicos pode ser elaborado conhecendo-se a influência destes na velocidade sísmica e na amplitude das reflexões, assim como na dispersão das velocidades e na atenuação do sinal.

A teoria de Biot/Gassmann para meios porosos (Gassmann (1951), Biot (1956)) consegue descrever com acurácia a resposta sísmica de um meio constituído de grãos esféricos sintéticos. Arenitos limpos tem suas características físicas bem aproximadas por esse modelo, resultando principalmente nos relacionamentos entre as velocidades sísmicas (e, por extensão, refletividades P e S), a porosidade, os módulos elásticos e a densidade do fluido e da matriz rochosa.

A elaboração de um meio efetivo elástico que agregue as características petrofísicas de um meio poroelástico é útil para comparação e validação dos resultados da modelagem poroelástica. A existência da onda lenta de Biot, entretanto, só pode ser modelada em meio elástico se um caráter de

visco-elasticidade for introduzido, à partir do efeito esperado na atenuação sísmica (Carcione (1998)). Este efeito, que é subestimado pela teoria de Biot para meios homogêneos, pode ser modelado em termos de valores realísticos de atenuação quando se consideram meios de Biot heterogêneos finamente acamadados em razão de variações randômicas de permeabilidade (Gurevich and Lopatnikov (1995)).

Este trabalho consiste de um estudo comparativo entre as modelagens elástica e poroelástica, em meios homogêneos e isotrópicos, simulando meios porosos saturados com diferentes tipos de fluidos.

## Equação Elástica da Onda em Meios Efetivos

A elaboração de meios efetivos para a modelagem elástica (Nolen-Hoeksema (2000)) parte da descrição dos módulos de corpo e de cisalhamento de meios porosos saturados, considerados meios monofásicos elásticos.

O módulo de corpo ( $k$ ), assim, é considerado composto de duas partes: o módulo de corpo do arcabouço insaturado ( $k_o$ ) mais o módulo de corpo dos poros preenchidos por fluido ( $k_p$ ), de maneira análoga aos módulos de cisalhamento ( $\mu$ ,  $\mu_o$  e  $\mu_p$ ):  $k = k_o + k_p$  e  $\mu = \mu_o$ , sendo  $\mu_p = 0$ , desprezando-se o módulo de cisalhamento dos fluidos.

O conceito de porosidade crítica ( $\phi_c$ ) aparece em Nur et al. (1998). Apresenta-se que as rochas se comportam de maneira diferente em diferentes domínios de porosidade (acima ou abaixo de uma dada porosidade crítica). Esta porosidade crítica define o limite em que a rocha passa de sustentada pela matriz a sustentada pelo fluido, ou seja, de material rochoso a uma suspensão fluida.

Segundo Nur et al. (1998), estimativas excelentes para parâmetros elásticos de meios efetivos porosos saturados, simulando arenitos limpos, podem ser obtidos com a utilização do imitante de Voigt modificado, para porosidades abaixo da porosidade crítica ( $\phi < \phi_c \approx 0.40$ ).

O limitante de Voigt fornece os módulos elásticos do meio efetivo à partir de uma simples interpolação linear entre os módulos elásticos do material do arcabouço e do fluido, com pesos de



$(1 - \phi)$  e  $\phi$ , respectivamente, onde  $\phi$  é a porosidade.

Levando-se em conta o efeito de porosidade crítica, temos o limitante de Voigt modificado, que apresenta como pesos  $(1 - \phi/\phi_c)$  e  $\phi/\phi_c$ , sendo a interpolação feita entre os módulos elásticos do material do arcabouço e o módulo dos poros, calculado com a aproximação de Reuss, com  $k_s$  e  $k_f$  sendo os módulos de corpo do material sólido e do fluido, respectivamente:

$$k_o = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_c}\right) k_s \quad (1)$$

$$k_p = \frac{\phi}{\phi_c} k_{Rc} \quad (2)$$

$$\mu_o = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_c}\right) \mu_s \quad (3)$$

onde  $k_{Rc} = 1/(\phi_c/k_f + (1 - \phi_c)/k_s)$  é o limitante inferior de Reuss com a porosidade crítica.

De posse dos módulos de corpo ( $k = k_o + k_p$ ) e de rigidez ( $\mu = \mu_o$ ), obtemos a constante de Lamé ( $\lambda = k - 2\mu/3$ ), processando a modelagem com a equação elástica da onda, para deslocamentos de partícula ( $\mathbf{u}$ ), através de:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla\nabla \cdot \mathbf{u} - \mu\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \quad (4)$$

sendo a densidade dada por:  $\rho = (1 - \phi)\rho_s + \phi\rho_f$ , onde  $\rho_s$  e  $\rho_f$  as densidades do material sólido e do fluido, respectivamente.

## Equação Elástica de Biot da Onda em Meios Bifásicos

Apesar de haver sido generalizada de diversas maneiras (acomodando anisotropia, por exemplo), a teoria de Biot considera inicialmente o mesmo modelo utilizado por Gassmann: uma matriz porosa vazia que se comporta macroscopicamente como um meio elástico isotrópico, e o espaço poroso saturado por um único fluido viscoso.

Biot, entretanto, define o deslocamento da matriz e o deslocamento médio do fluido, permitindo movimento relativo entre os dois. Suas equações de onda (Biot (1956)) levam à existência de dois tipos de onda compressional (P-rápida e P-lenta) e um tipo de onda de cisalhamento (S).

Uma função de dissipação, que inclui a viscosidade do fluido e é proporcional ao movimento relativo entre sólido e fluido, contribui em cada termo das equações de movimento, implicando na modelagem de fenômenos de atenuação e dispersão.

Biot elaborou equações de onda levando em conta uma frequência limite, acima da qual o fluxo nos poros deixa de ser laminar (Poiseuille):  $f_L = \frac{\pi\eta}{4d^2\rho_f}$ , onde  $d$  é o diâmetro médio dos poros.

Em arenitos limpos com  $d \approx 4 \cdot 10\mu m$ , saturados por água ( $\eta = 1cP$ ,  $\rho_f = 1000kgm^{-3}$ ), a frequência limite se encontra em torno de  $f_L = 2 \cdot 10^3 Hz$ . As equações de onda de Biot para o regime de baixas frequências se aplicam, assim, em modelagem sísmica. Levando-se em conta os deslocamentos da parte sólida  $\mathbf{u}$  e os deslocamentos relativos entre a parte fluida e a parte sólida  $\mathbf{w}$ , temos (Zhu and McMechan (1991)):

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ E & F \end{pmatrix} \nabla\nabla \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ -G \end{pmatrix} (-\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}) + \begin{pmatrix} D \\ -H \end{pmatrix} \dot{\mathbf{w}} \quad (5)$$

onde  $A, B, C, D, E, F, G$  e  $H$  são funções dos parâmetros efetivos do meio bifásico:  $\phi, \rho_s, \rho_f, k_s, k_f$  e  $\mu_s$ , definidos e utilizados anteriormente, além da viscosidade ( $\eta$ ), da tortuosidade ( $a$ ) e da permeabilidade ( $\kappa$ ).

## Modelagem por Diferenças Finitas

Os operadores de diferenças finitas utilizados neste trabalho são as aproximações de segunda ordem, centrais, empregando malha regular quadrada. A função fonte utilizada foi a primeira derivada da gaussiana, e o esquema de bordas de absorção é o mesmo de Cerjan et al. (1985).

As equações (4) e (5), formuladas em termos de operadores de diferenças finitas, fornecem como solução os campos de deslocamento  $\mathbf{u}$  (e  $\mathbf{w}$  na modelagem poroelástica) em tempo futuro ( $\mathbf{u}_{i,j}^{k+1}$  (e  $\mathbf{w}_{i,j}^{k+1}$ )) à partir dos campos em tempo presente ( $k$ ) e passado ( $k-1$ ), conforme Thedy (1995) e Roque (1997).

## Resultados

Os modelos utilizados apresentam-se como arenitos limpos com as seguintes propriedades:  $k_s=3.5e10$  Pa,  $\mu_s=0.75e10$  Pa,  $\rho_s=2650.kg/m^3$ ,  $a=1$  (tortuosidade, subestimada aqui por conveniência numérica),  $\kappa=1.0e-12m^2$ , saturados ora por água ( $k_f=2.4e9$  Pa,  $\rho_f=1.0e3$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta=1.0e3$  Pa.s), ora por gás ( $k_f=2.2e7$  Pa,  $\rho_f=1.0e2$  kg/m<sup>3</sup>,  $\eta=1.5$  Pa.s).

Modelagem Sísmica de Reservatórios

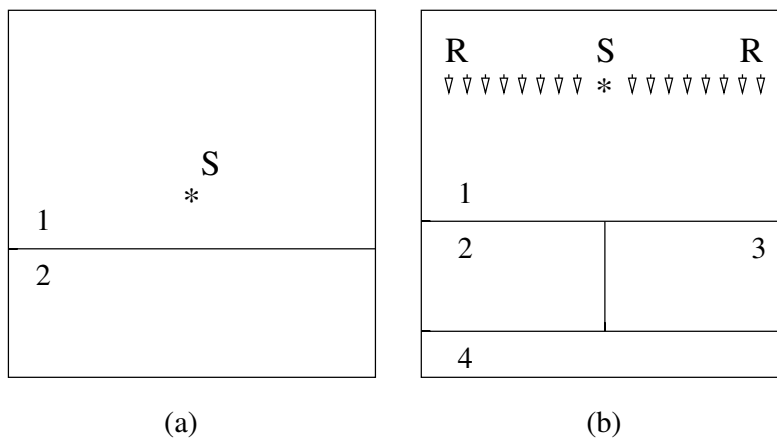


Figura 1: Modelos geológicos 1 (a) e 2 (b)

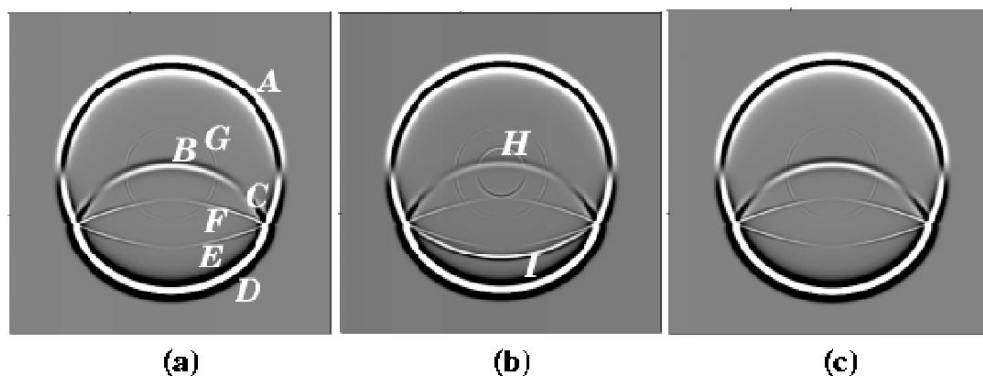


Figura 2: Instantâneos de modelagens poroelásticas (a e b) e elástica (c), Modelo 1

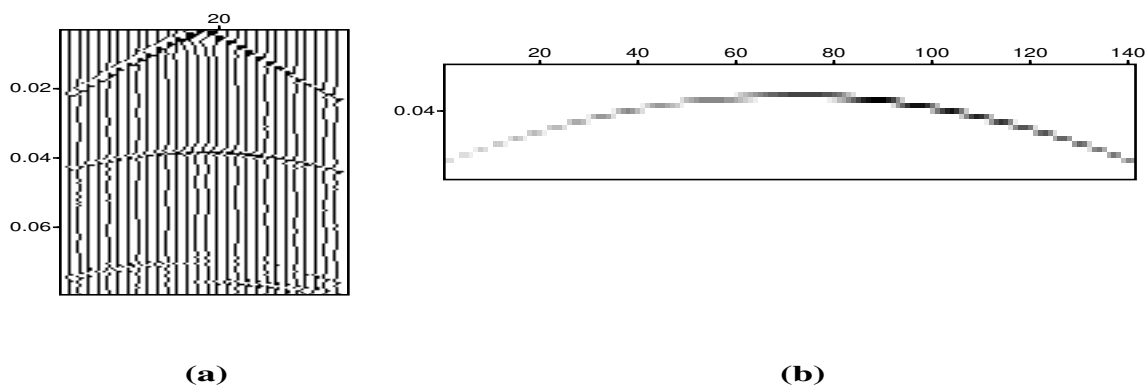


Figura 3: Sismograma sintético (a) e detalhe (b), Modelo 2

O modelo 1 (Figura 1-a) mostra meios homogêneos sobrepostos, separados por uma interface plana horizontal. Os meios simulam arenitos apresentando uma interface gás/água (meios 1 e 2), à porosidade de 30%. Os resultados são apresentados na forma de instantâneos do campo de deslocamentos verticais ( $u_z$ ), no tempo  $t=30\text{ms}$ , sendo a fonte de ondas P de frequência central de 50 Hz localizada a 30m acima da interface. Observam-se na Figura 2-a, modelagem poroelástica: (A) P direta; (B) P refletida; (C) P refratada; (D) P transmitida; (E) S transmitida; (F) S refletida; (G) S direta residual da fonte (imperfeição da fonte impulsiva discreta). Na Figura 2-b, a modelagem poroelástica é testada com fluidos não-viscosos (p.e., hidrogênio líquido): (H) onda P-lenta da fonte; (I) onda P-lenta transmitida. Nota-se que a conversão na interface atenua a P refletida. A Figura 2-c mostra a modelagem simplesmente elástica equivalente à mostrada na Figura 2-a. Observa-se que, para esta faixa de frequências e modelo realístico, não é possível distinguir qualquer diferença entre as duas modelagens.

O modelo 2 (Figura 1-b) apresenta uma camada plano-horizontal de porosidade 30% inserida em um meio (partes 1 e 4), saturado por água, com porosidade de 20%, sendo que a metade esquerda (parte 2) da camada é saturada por água e a metade direita (parte 3) saturada por gás. Os resultados são apresentados na forma de um sismograma sintético (Figura 3-a), sendo a fonte situada em S e os 140 receptores R situados na linha horizontal que contém a fonte, simulando um arranjo “split spread”. Nota-se que a reflexão do topo da camada (destaque na figura 3-b) apresenta maiores amplitudes para a metade que contém gás (“bright spot”).

## Conclusões

Este estudo mostra que a modelagem por diferenças finitas de meios efetivos, simulando reservatórios de hidrocarbonetos, pode oferecer uma ferramenta muito útil na interpretação sísmica. A modelagem elástica, sendo mais simples e rápida que a modelagem poroelástica das equações de Biot, provê resultados com a mesma qualidade, para a faixa de frequências da aquisição sísmica (10-100 Hz), desde que os meios efetivos agreguem, em suas constantes elásticas, as características bifásicas do reservatório.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à ANP e à PGS do Brasil pelo apoio financeiro. Agradecemos ao geofísico Fernando de Roque e à PETROBRAS pela colaboração durante a pesquisa.

## Referências

- Biot, M. A., 1956, Theory of propagation of elastic waves in a fluid saturated porous solid. I. Low frequency range: *Journal of the Acoustical Society of America*, **28**, 168–178.
- Carcione, J., 1998, Viscoelastic effective rheologies for modelling wave propagation in porous media: *Geophysical Prospecting*, **46**, 249–270.
- Cerjan, J., Kosloff, D., Kosloff, R., and Reshef, M., 1985, A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations: *Geophysics*, **50**, 705–708.
- Gassmann, F., 1951, *Über die Elastizität poröser Medien*: *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich*, pages 1–21.
- Gurevich, B., and Lopatnikov, S., 1995, Velocity and attenuation of elastic waves in finely layered porous rocks: *Geophysical Journal International*, **121**, 993–947.
- Nolen-Hoeksema, R. C., 2000, Modulus-porosity relations, Gassmann’s equations, and the low-frequency elastic wave response to fluids: *Geophysics*, **65**, 1355–1363.
- Nur, A., Gary, M., Dvorkin, J., and Galmudi, D., 1998, Critical porosity: A key to relating physical properties to porosity in rocks: *The Leading Edge*, March, pages 357–362.
- Roque, F., 1997, *Amplitude vs. ângulo (AVA): influência dos parâmetros petrofísicos em meios poroelásticos*: CPGG/UFBA - Diss. de Mestrado.
- Theedy, E. A., 1995, *Modelagem sísmica em meios poroelásticos*: CPGG/UFBA - Diss. de Mestrado.
- Zhu, X., and McMechan, G. A., 1991, Numerical simulation of seismic responses of poroelastic reservoir using Biot theory: *Geophysics*, **56**, 328–339.



## Modelagem Sismoestratigráfica 3D de Alta Resolução na Formação Quebradas, Cretáceo Superior, da Bacia Potiguar

Leodilson Góes da Silva, Vivaldo A. Rocha, Olinto G. S. Jr & Frederico A. F. Gomes, PETROBRAS S/A, Brazil

### Resumo

A caracterização da arquitetura tridimensional de um reservatório petrolífero requer a integração de diferentes tipos de informações, modelos conceituais e medidas físicas que permitirão sua interpretação geológica mais detalhada, com grande impacto sobre sua economicidade. Nesse contexto procura-se ressaltar a efetividade da abordagem dos processos sedimentológicos em testemunhos quando utilizados em conjunto com dados de perfis e dados sísmicos 3D

A área estudada contém dois reservatórios principais portadores de óleo, pertencentes à Formação Quebradas. Esta unidade litoestratigráfica representa a sedimentação ocorrida entre o Cenomaniano médio e o Turoniano inferior da Bacia Potiguar submersa. Utilizando-se a impedância acústica média como atributo sísmico guia para obtenção de parâmetros de reservatório, a modelagem sismoestratigráfica 3D permitiu a obtenção de volumes 3D com topo, base e espessuras de cada parassequência, além de volumes 3D da distribuição de parâmetros de reservatório, tais como porosidades e permeabilidades.

### Introdução

A área de trabalho está situada na Plataforma Continental do Rio Grande do Norte, à aproximadamente 10Km da costa, em lâmina d'água de 9m, encontrando-se totalmente recoberta por sísmica 3D. As unidades litoestratigráficas, que constituem a coluna sedimentar perfurada pelos poços na área, são representadas pelas Formações Tibau/Guamaré, Macau, Ubarana, Jandaíra, Quebradas, Ponta do Mel, Açú e Alagamar, como mostra a seção sísmica da figura 1.

A Formação Quebradas representa a sedimentação ocorrida entre o Cenomaniano médio e o Turoniano inferior da Bacia Potiguar submersa e equivale às unidades Açú-3 e Açú-4 da Formação Açú, na parte emersa da bacia. A porção basal é caracterizada por intercalações de arenitos e folhelhos que constituem o Membro Redonda. Enquanto a porção superior, denominada Membro Porto do Mangue, é essencialmente argilosa com a presença de arenitos estuarinos, além de margas e calcilitos, depositados em ambientes transicionais a francamente marinhos. Neste trabalho, o ponto de partida foi a descrição litoestratigráfica, a análise sequencial dos testemunhos de três poços e a definição do modelo geológico conceitual. Com base nos dados sísmicos,

de perfis, além de dados lito/bioestratigráficos, a Formação Quebradas foi subdividida em duas seqüências deposicionais de terceira ordem, sendo reconhecidos os seus limites e respectivos tratos de sistemas. A Seqüência A, de idade Mesocenomaniana, que foi considerada sem interesse para hidrocarbonetos e a Seqüência B, de idade Neocenomaniana-Eoturoniana, que contém os reservatórios produtores de óleo.

### O Modelo Sismoestratigráfico

O contexto acústico em que ocorrem os reservatórios produtores é ressaltado pela presença das duas formações de carbonatos, uma sotoposta (Fm. Ponta do Mel) e outra sobreposta (Fm. Jandaíra) às seqüências constituintes dos objetivos, o que propicia um contraste de impedância bastante significativo e de fácil identificação nas seções sísmicas (Fig. 2).

O modelo sismoestratigráfico inclui os depósitos deltáicos pertencentes à fase progradacional do Trato de Sistemas de Mar Baixo da Seqüência B. Em seção sísmica esses depósitos mostram refletores com mergulhos fortes representando as linhas de progradação das frentes deltáicas e apresentam terminações em *onlap* e *downlap* sobre a discordância que constitui o limite inferior desta seqüência. Os deltas desta fase foram submetidos a processos de regressão forçada (Posamentier & Allen, 1993). No sentido do mergulho deposicional os sedimentos da *healing phase wedge* desenvolvem-se em situação de *onlap* sobre a última clinofórmula da fase progradacional. Esses sedimentos representam a fase inicial do Trato Transgressivo e foram originados a partir da erosão e resedimentação dos depósitos deltáicos da fase anterior. Os dois reservatórios portadores de óleo denominados zonas QB-10 e QB-20 são constituídos de arenitos deltáicos com forte retrabalhamento por marés. Em um arcabouço estratigráfico de alta resolução, esses arenitos fazem parte de um conjunto de parassequências com empilhamento progradacional, cujo limite individual superior é marcado abruptamente pela presença de folhelhos e siltitos de plataforma, os quais representam as superfícies de inundações de cada uma das parassequências (Fig. 3).

### Inversão Sismoestratigráfica 3D

O volume de dados sísmicos utilizado é constituído de 157 *inlines* e 201 *crosslines*, ocupando uma área

## Modelagem Sismoestratigráfica 3D

de 19.5 km<sup>2</sup> e totalizando mais de 30 mil traços de informações sísmicas, que posteriormente foram correlacionadas com os 6 poços existentes na área. As amarrações entre os dados de poços e os dados sísmicos beneficiaram-se da existência de 2 WST's, além de perfis sônicos e densidades em todos os poços. A amarração também foi auxiliada pelo fato de os contrastes de impedância entre as principais camadas serem bastante distintos, gerando refletores com caráter distintos e fortes amplitudes.

Após o ajuste global dos marcadores estratigráficos regionais, através dos perfis acústicos e radioativos dos poços, com os dados sísmicos em amplitude, foi realizada a interpretação estrutural-estratigráfica das seqüências definidas anteriormente. O resultado deste mapeamento foi a construção do modelo sismoestratigráfico 3D *a priori*, o qual foi utilizado como entrada na obtenção das imagens tridimensionais em impedâncias acústicas (fig. 4).

O principal tratamento efetuado nos dados sísmicos, com o objetivo de uma caracterização mais acurada dos reservatórios, é denominado de "Inversão sismoestratigráfica" (Johann, 1997). Esta metodologia é constituída de seis etapas principais: a) calibração quantitativa 3D sísmica-perfis de poços; b) deconvolução de fase zero; c) interpretação estrutural e estratigráfica regional dos dados sísmicos 3D; d) modelagem 3D em impedância acústica; e) inversão sismoestratigráfica 3D e, finalmente, f) interpretação detalhada das imagens em impedância acústica e em refletividades associadas

## Modelagem Geológica 3D

A metodologia utilizada para construção do modelo numérico 3-D consiste em simular o reservatório em duas etapas. A primeira corresponde à elaboração de um modelo para distribuição espacial de fácies sedimentares dentro de um arcabouço estratigráfico de alta resolução. De posse deste modelo, a etapa seguinte consiste em popular as células com valores de porosidade e permeabilidade correspondentes a cada uma das fácies. A técnica utilizada foi o método das funções aleatórias Gaussianas truncadas (Souza Jr., 1997) que permite a realização de simulações que honram os dados de poços e são condicionais à informações sísmicas possuidoras uma boa correlação com propriedades intrínsecas do reservatório.

## Conclusões

A Formação Quebradas foi subdividida em duas seqüências deposicionais de terceira ordem, sendo reconhecidos os seus limites e respectivos tratos de sistemas, designadas: **Seqüência A**, de idade Mesocenomaniana e Seqüência B, de idade Neocenomaniana-Eoturoniana.

A impedância acústica média de cada parasseqüência, foi o atributo sísmico guia usado para obtenção volumétrica da porosidade e da permeabilidade dos reservatórios.

A modelagem sismoestratigráfica 3D permitiu a obtenção dos seguintes produtos para fins de cubagem e avaliação da jazida: volumes 3D com topo, base e espessuras de cada parasseqüência, aqui consideradas como camadas para efeito de simulação de fluxo; volumes 3D da distribuição de parâmetros de reservatório, como: porosidades e permeabilidades.

## Referências

- Johann, P.R.S., 1997, Seismic inversion and stochastic modeling of a turbidite reservoir. PhD Thèse. *Université Pierre et Marie Curie*.
- Posamentier, H.W. & Allen, G.P., 1994, Siliciclastic Sequence Stratigraphy: Concepts and applications. Short Course Notes (preliminary) . Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto de Geociências. 89p.
- Souza Jr., O.G. 1997 Stratigraphie séquentielle e modelisation probabiliste des reservoirs d'un cone sousmarin profond.(Champ de Namorado, Brésil). Thèse de Doctorat, de l'Université Pierre et Marie Curie.

## Agradecimentos

Os autores gostariam de deixar registrado os sinceros reconhecimentos a todos os colegas que com suas contribuições técnicas viabilizaram a realização deste trabalho. Agradecimentos especiais a Carlos Eduardo Abreu, Paulo R. S. Johann, Aníbal C. Alves e Enio L. Rossetti.

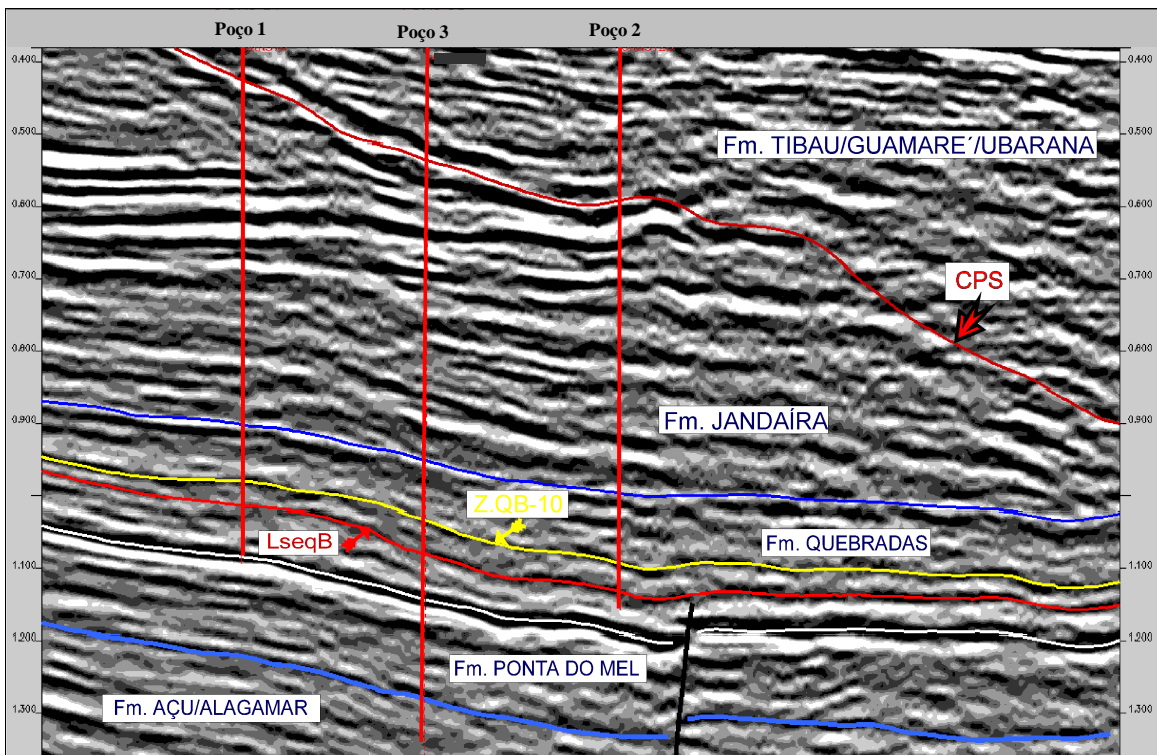


Figura 1 - Seção sísmica (DIP) mostrando o pacote sedimentar atravessado pelos poços na área. LseqB = Limite inferior da Seqüência B; Z.QB-10 = Refletor correspondente ao topo da Zona QB-10; CPS = Discordância do Campaniano Superior (pré-Ubarana).

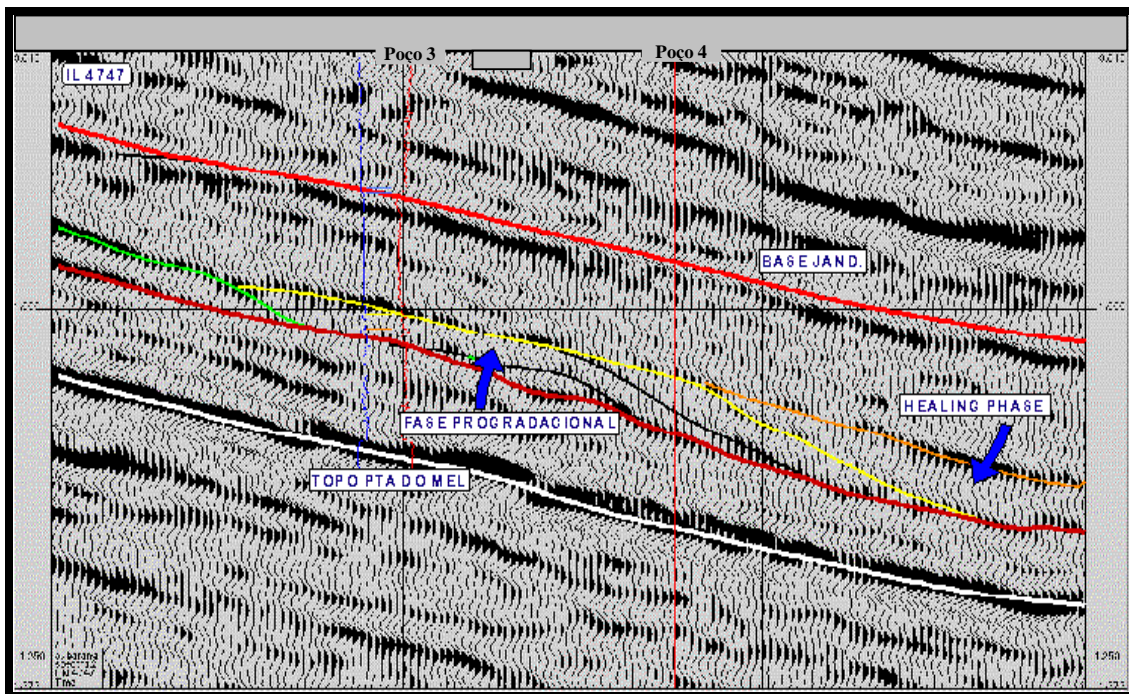


Figura 2 - Inline 4747. Seção sísmica ilustrando o modelo sismoestratigráfico. Os arenitos deltáicos são constituintes do Trato de Sistema de Mar Baixo (fase progradacional), enquanto que os turbiditos de plataforma (thin-bedded turbidites) fazem parte da fase inicial do Trato Transgressivo (healing phase wedge).



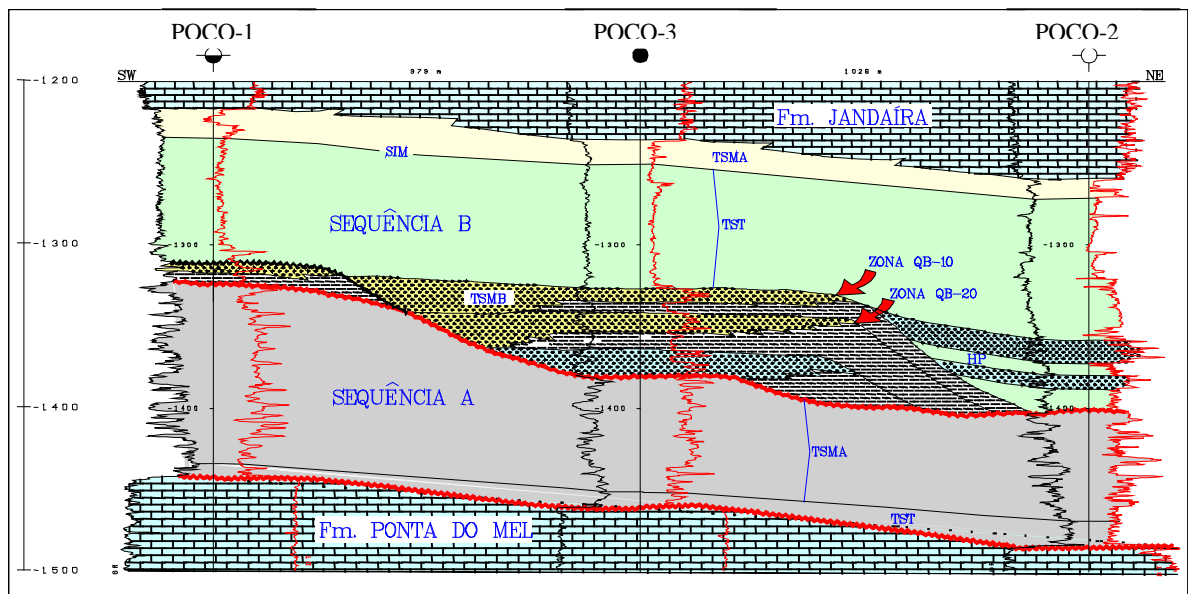


Figura 3 - Seção geológica ilustrando a subdivisão da Formação Quebradas em duas seqüências deposicionais com seus limites e respectivos tratos de sistemas. Observar o empilhamento prográdacional das parasseqüências no Trato de Sistema de Mar Baixo (TSMB) da Seqüência B.

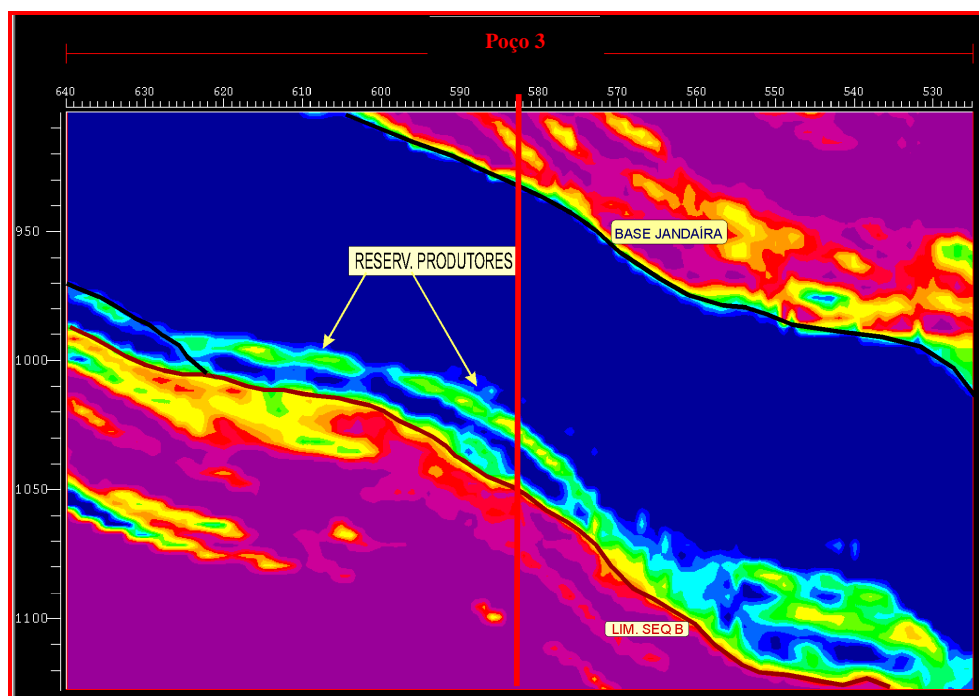


Figura 4 - Inline 4772. Seção de impedância acústica mostrando em detalhe a geometria cliniforme dos reservatórios produtores.



# Multiple Scattering in the Laboratory

Kasper Van Wijk<sup>†</sup> and John A. Scales<sup>†</sup>

## Abstract

Multiple scattering of waves causes attenuation and anisotropy, which is important in seismology, optics, medical imaging and other fields involving propagation in disordered media. Further, in strong scattering media there may be a transition from ballistic to diffusive energy transport. To study the propagation of multiply-scattered waves, we present a medium in which the scattering properties can be easily controlled and the wave motion can be measured using an optical detection system *inside* the scattering medium. In this medium ultrasonic surface waves propagate through an aligned, disordered, pattern of small grooves. Waves propagating parallel to the grooves see a homogeneous medium; waves propagating perpendicular to the grooves are strongly scattered. By varying the source-receiver orientation with respect to the grooves and the distance between source and receiver, we are able to map out the transition from ballistic to diffusive propagation.

## Introduction

In seismology, optics, ocean acoustics, and other fields that treat wave propagation in disordered media, multiply-scattered waves are usually regarded as a source of "noise", best removed from the data. Partly this is because many data processing algorithms are based on single-scattering theory, such as the Born approximation; but also, there is a sense that multiply-scattered waves are "chaotic" or unstable. Recent work has shown that this need not be the case (Scales & Snieder, 1999) and that multiply-scattered waves can be exploited to make inferences about the scattering medium (Snieder, 1999; Hennino *et al.*, 2001).

The influence of multiple scattering on wave propagation measurements can be seen in many ways. There are subtle long-wavelength effects such as anisotropy (if the scatterers are aligned) and attenuation (as energy is shifted from the ballistic pulse into the multiple-scattering coda) (Groenboom & Snieder, 1995). These effects are well

known in seismology (Backus, 1962; Aki & Chouet, 1975; O'Doherty & Anstey, 1971, e.g.) and have been used to interpret effective material properties from macroscopic measurements. However, the same wave propagation experiment can be looked at from different points of view (such as ballistic propagation, diffusion or radiative transfer) depending, for example, on the wavelength of the probing beam relative to the size of the disorder and on the distance propagated.

We describe a laboratory model to study multiple scattering of ultrasonic surface waves. The model consists of a block of aluminum with 144 grooves in the pattern of a Fibonacci sequence etched into one face using a computer-controlled milling machine (Figure 1). For our purposes, the aluminum behaves effectively elastically, which allows us to separate multiple scattering effects from anelastic behavior on parameters such as attenuation. An angle-beam transducer launches plane surface waves into this disordered medium and a laser-Doppler vibrometer measures the vertical component of particle velocity on the surface. This allows us to measure multiply-scattered waves *inside* the scattering medium. The grooves are 1 mm wide 3 mm deep and the dominant wavelength of the surface waves is about 15 mm, so there are many scatterers per wavelength when the waves are propagating perpendicular to the grooves (Scales & Van Wijk, 1999). Shot gathers contain 10 offsets at a constant angle with respect to the grooves. We recorded angles between 0 and 90 degrees with the grooves in 10 degree increments. This way, we are able to parametrically vary the strength of the scattering so that we can continuously and reproducibly change the material properties from no scattering to strong multiple scattering. Scattering of a constant offset and a constant angle section are given in Figure 2.

## Group Velocity

The longer effective path lengths of the multiply-scattered waves result in a significant slowing down of the energy propagation. To estimate the group velocity as a function of angle, we sorted the data into constant-angle sections and then computed the energy envelopes of each trace. A regression on the peaks of the energy envelopes gives us the en-

<sup>†</sup>Physical Acoustics Laboratory and Center for Wave Phenomena, Department of Geophysics, Colorado School of Mines, Golden, CO 80401



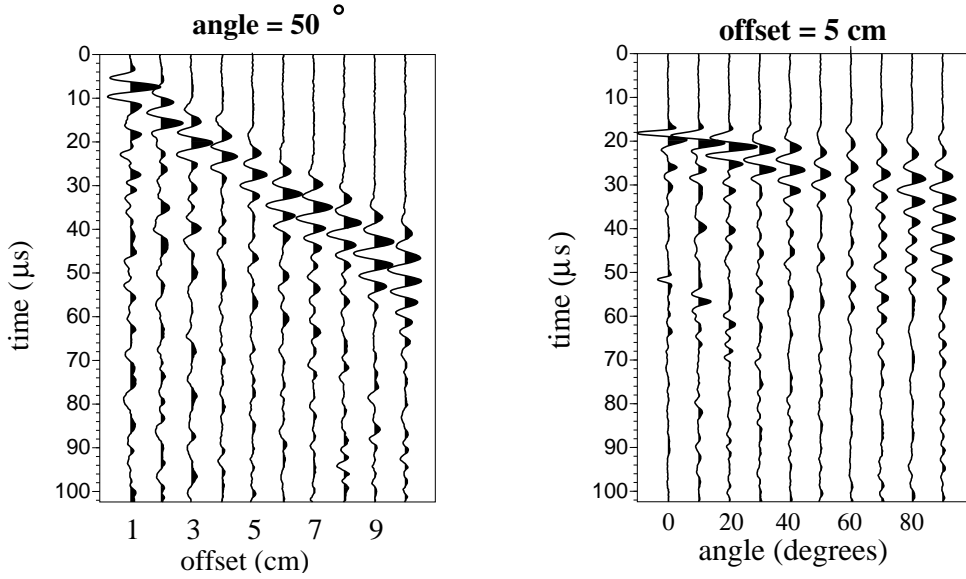


Figure 2: A constant-angle section (left) and a constant-offset section (right).

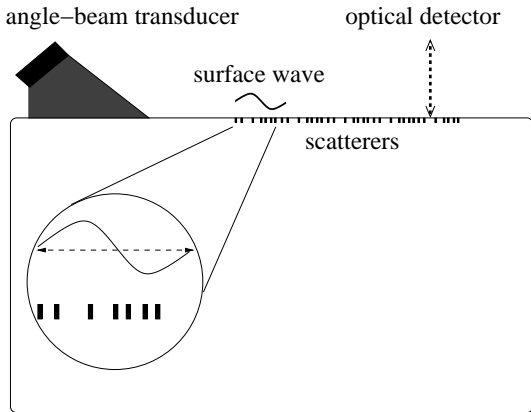


Figure 1: The angle-beam transducer launches nearly-plane surface waves of dominant wavelength 15 mm into the grooved aluminum block. The grooves are 3 mm deep and 1mm wide.

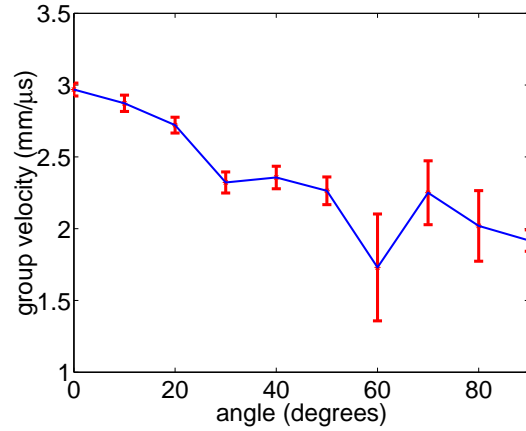


Figure 3: Group velocity decreases as the scattering strength increases as energy is shifted into the coda.

ergy propagation speed (Figure 3). The error bars are 98% coverage intervals from the regression. Destructive interference causes intensities from 60-80 degrees to be much lower, making the error bars in the group velocity estimate larger. In any case, we see a significant drop in group velocity as a function of angle or scattering strength.

### Mean free path

Even though it is not a truly random medium, we can exploit the spatial disorder of the Fibonacci grooves (Carpena *et al.*, 1995) to estimate the scat-

tering mean free path of the medium as well as to study the transport of energy. To do this, we need an ensemble of measurements, varying over the disorder in the medium. Figure 4 shows the ensemble of traces recorded at a fixed offset of 5 cm, for 38 different positions in the medium.

For a plane wave normally incident in a semi-infinite medium filled with random scatterers, the total and coherent intensity, or energy, are expected to decay exponentially as (see (Ishimaru, 1997), section 14-3):  $I_t(x) = I_0 \exp(-x/\ell_a)$  and  $I_c(x) = I_0 \exp(-x/\ell_a) \exp(-x/\ell_s)$ , where  $\ell_a$  and  $\ell_s$  are the absorption and scattering mean free paths, respectively. Therefore if we take the ratio of these two intensities, we get a decay that depends only on the scattering mean free path (Rosny & Roux, 2001):

$$\frac{I_c(x)}{I_t(x)} = \exp(-x/\ell_s) = \exp(-vt/\ell_s) = \exp(-t/\tau_s),$$

where  $v$  is the group velocity and  $\tau_s$  is the scattering mean free time.

To apply this result we numerically compute the coherent and total energies;  $I_c$  is just the intensity of the average trace, while  $I_t$  is the average of the intensities of the 38 individual traces. The ratio of  $I_c$  to  $I_t$  is shown in Figure 5. By fitting an exponential to the portion of the curve after the coherent arrival (about 30  $\mu\text{s}$ ) we get a mean free time  $\tau_s = 24\mu\text{s}$ . With a transport velocity around 2 mm/ $\mu\text{s}$ , the mean free path is just under 5 cm. Thus we are in a regime in which the wavelength is large compared to the size of an individual scatterer, but small compared to the mean free path; while we have measurements with source-receiver offsets as large as 2 mean free paths. In this sense we can see the transition from ballistic to diffusive propagation,

To get some idea of whether the measured wave forms behave diffusively at 5 cm offset, as is suggested by our estimate of the mean free path, we fit the total intensity with an analytic model associated with propagation in a homogeneous diffusive, absorbing medium. (We included an absorption term in order to account for diffractive losses off the bottom of the grooves.) The Green's function for this model is given by

$$I(x, t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt} - D\kappa^2 t\right),$$

where  $\kappa = 1/\ell_a$  is the absorption coefficient,  $D$  is the diffusion constant and  $x$  is the propagation distance. The fit is shown in Figure 6. This fitting

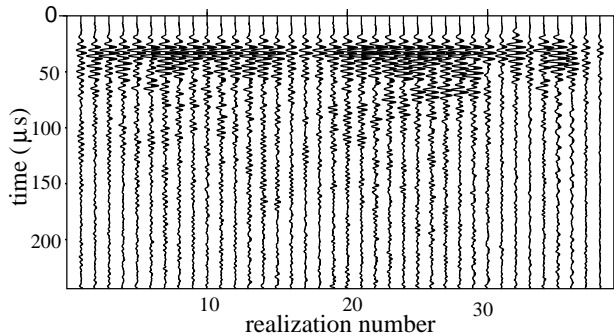


Figure 4: 38 traces recorded at a fixed offset of 5 cm on the block. The source/receiver pair was offset by 1 mm between shots.

alone cannot determine  $D$ , explicitly; the propagation distance is not well-defined since in the real experiment the waves propagate ballistically for some distance, whereas the model is for a homogeneous diffusive medium. However, we can get a rough estimate of the diffusion constant as follows. First  $D = v\ell_{tr}/d$  where  $v$  is the transport velocity,  $\ell_{tr}$  is the transport mean free path and  $d$  the dimension of the experiment. Our method of measuring the energy envelope yields the group velocity for weak scattering, but for strong scattering the energy propagates according to the transport velocity. So for  $90^\circ$  propagation  $v \approx 2$  mm/ $\mu\text{s}$ . The transport mean free path is approximately equal to the scattering mean free path. This would give a diffusion constant of approximately  $2 * 50/2$  mm<sup>2</sup>/ $\mu\text{s}$  in 2-D. We are in the process of extending our measurements to include the distance dependence of the intensity, which should allow us to estimate  $D$  independently.

## Conclusions

In order to understand the behavior of multiple-scattered waves, we have developed an ultrasonic laboratory model of a quasi 1-D medium in which we can not only vary the strength of the scattering, but also measure the wave-field inside the scattering medium.

We observed the effects of multiple scattering on the group velocity, and noted a transition from ballistic to diffusive propagation as the strength of the scattering is increased. This means that model parameters like the diffusion constant and mean free path can play a role in characterization of the medium in the strong scattering regime.

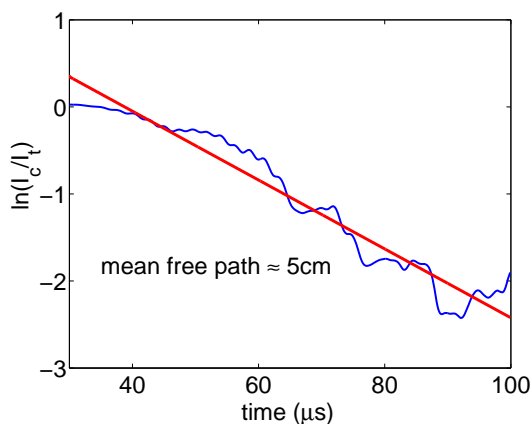


Figure 5: Ratio of coherent to total intensities averaged over the ensemble of realizations. This decay is best fit with an exponential with a mean free time of  $24 \mu\text{s}$ .

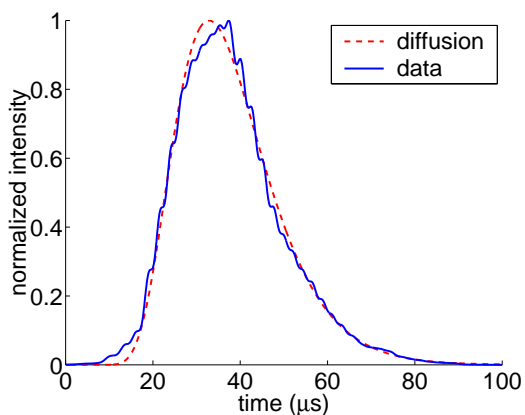


Figure 6: Fit of intensity to a model involving propagation in a 1-D diffusive, attenuative medium.

## References

- Aki, K., and Chouet, B., 1975, Origin of coda waves: source, attenuation and scattering effects: *Journal of Geophysical Research*, **80**, 3322–3342.
- Backus, G., 1962, Long wavelength anisotropy: *Journal of Geophysical Research*, **67**, 4427–4440.
- Carpena, P., Gasparian, V., and Ortuno, M., 1995, Energy spectra and level statistics of Fibonacci and Thue-Morse chains: *Physical Review B*, **51**, 12813–12816.
- Groenenboom, J., and Snieder, R., 1995, Attenuation, dispersion and anisotropy by multiple scattering of transmitted waves through distributions of scatterers: *J. Acoust. Soc. Am.*, **98**, 3482–3492.
- Hennino, R., Trégourès, N., Shapiro, N. M., Margerin, L., Campillo, M., Van Tiggelen, B. A., and Weaver, R. L., April 2001, Observation of equipartition of seismic waves: *Physical Review Letters*, **86**, no. 15, 3447–3450.
- Ishimaru, A., 1997, *Wave propagation and scattering in random media*: , Oxford University Press, Walton Street, Oxford.
- O’Doherty, R. F., and Anstey, N. A., 1971, Reflections on amplitudes: *Geophysical Prospecting*, **19**, 430–458.
- Rosny, J. D., and Roux, P., June 2001, Multiple scattering in a reflecting cavity: application to fish counting in a tank: *J. Acoust. Soc. Am.*, **109**, to appear.
- Scales, J., and Snieder, R., 1999, What is a wave?: *Nature*, **401**, 739–740.
- Scales, J., and Van Vleck, E., 1997, Lyapunov exponents and localization in randomly layered media: *Journal of Computational Physics*, **133**, 27–42.
- Scales, J., and Van Wijk, K., 1999, Multiple scattering attenuation and anisotropy of ultrasonic surface waves: *Applied Physics Letters*, **74**, 3899–3901.
- Scales, J., and Van Wijk, K., 2001, A tunable multiple-scattering system: *CWP project review*, **74**, 3899–3901.
- Snieder, R., 1999, Imaging and averaging in complex media *in* Fouque, J.-P., Ed., *Diffuse waves in complex media*: Kluwer.



# O método paraxial em duas etapas para meios 3-D heterogêneos isotrópicos

Rommel Melhor Mendes e Milton José Porsani

CPGG/UFBA

## Abstract

É descrito um procedimento que permite a determinação do raio que sofre reflexão e conecta fonte e receptor em meios heterogêneos isotrópicos contínuos, com refletor curvo. O raio é determinado iterativamente, utilizando o método paraxial em duas etapas (raios incidente e refletido) conectadas através do conceito de matriz R/T (matriz refletora/transmissora). O método depende apenas das equações características e não da sua solução, logo pode ser usado mesmo quando se faz traçamento numérico de raios. Apesar disso, aqui, as equações características (obtidas a partir da eikonal e de uma função Hamiltoniana adequada) são resolvidas analiticamente para uma função de vagarosidade quadrática ( $1/v^2$ ) do tipo tri-linear incompleta, isto é: uma função do primeiro grau, de  $R^3$  em  $R$  sem os chamados termos cruzados.

## Introdução

Um dos principais problemas ao se fazer modelagem com os raios aplicada à sísmica de exploração é a conexão da fonte ao receptor ou o *two point ray tracing*. Métodos eficientes como o *shooting method* ou o *bending method* (Cerveny, 1987) tem sido citados na literatura. São métodos bastante gerais, pois não precisam da solução das equações do traçado do raio, mas, apenas delas próprias. Entretanto, um método em especial tem se destacado pela eficiência e relativa simplicidade. Nele, um novo raio (ou raio paraxial) é obtido através de perturbações na posição e trajetória de um raio de referência (ou raio central). O método paraxial, como é chamado, é usado com sucesso na determinação do raio totalmente transmitido que conecta a fonte ao receptor, entretanto, em sua formulação original, não prevê a possibilidade do raio ser refletido em uma interface. Em verdade, esse problema pode ser resolvido de forma simples, ao admitirmos nesse caso, não um, mas dois raios; o primeiro deles ao qual chamariamos de raio incidente, parte da fonte até o refletor, e o segundo, o raio refletido, parte do refletor até a superfície. Tal abordagem simplificadora, não

estaria completa a menos que fossem analisados dois pequenos problemas: o vetor vagarosidade incidente não é igual ao vetor vagarosidade refletido e o ponto de incidência do raio paraxial na interface é desconhecido. O primeiro dos problemas foi resolvido introduzindo o conceito de matriz R/T (refletora/transmissora) que permite relacionar o vetor vagarosidade incidente e o vetor vagarosidade refletido/transmitido. E o segundo problema foi resolvido substituindo as duas equações obtidas com a aplicação do método à etapa 1 (raio incidente) na equação obtida com a aplicação do método na etapa 2 (raio refletido). Desta forma, tornou-se possível determinar com um número relativamente pequeno de iterações o raio refletido que conecta fonte-receptor em meios heterogêneos isotrópicos com refletor curvo.

## O método paraxial

O problema de se conectar fonte e receptor através de um raio é conhecido genericamente como *two point ray tracing*, e pode ser resolvido de várias maneiras, dentre as quais pelo método paraxial (Figueiró, 1999), que consiste basicamente em traçar um raio, conhecido como raio central e a partir de expansões de Taylor e das equações características, determinar a direção que o raio deverá ter para alcançar um dado receptor. Iniciemos por estabelecer os vetores posição e vagarosidades para o raio central, respectivamente como:  $\vec{x}_c(\sigma)$  e  $\vec{p}_c(\sigma)$ . Em seguida descrevamos um raio qualquer como resultado de uma perturbação do raio central. Desta forma teremos:

$$\begin{cases} x_i(\sigma) = x_{c_i}(\sigma) + \delta x_i(\sigma) \\ p_i(\sigma) = p_{c_i}(\sigma) + \delta p_i(\sigma) \end{cases} \quad (1)$$

A partir do sistema de equações em 1 e das equações características para meios isotrópicos (Cerveny, 1987), pode-se estabelecer em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\delta\vec{x}}{d\sigma} \\ \frac{d\delta\vec{p}}{d\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{U} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\vec{x} \\ \delta\vec{p} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

onde [I] é a matriz identidade de ordem 3, e  $U_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( \frac{1}{v^2(\vec{x}_c)} \right)$  com  $i$  e  $j = 1, 2, 3$  é referente

ao termo de primeira ordem da expansão. Chamando de  $[\Lambda]$  a matriz 6x6 da equação 2 e englobando os vetores  $\vec{x}$  e  $\vec{p}$  em um único vetor  $\vec{y}$ , pode-se obter uma expressão simplificada da mesma:

$$\frac{d\delta\vec{y}(\sigma)}{d\sigma} = [\Lambda]\delta\vec{y}(\sigma). \quad (3)$$

Uma solução dessa equação diferencial é conhecida como matriz propagadora, e pode ser escrita como:

$$[P](\sigma, \sigma_0) = [I] + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \int_{\sigma_0}^{\sigma} [\Lambda](\sigma_1) d\sigma_1 \right)^j. \quad (4)$$

Analisando-se essa expressão, pode-se facilmente concluir que  $[P](\sigma_0, \sigma_0) = [I]$ . O que nos permite estabelecer a solução mais geral da equação 4 (Aki & Richards, 1980):

$$\delta\vec{y}(\sigma) = [P](\sigma, \sigma_0)\delta\vec{y}(\sigma_0). \quad (5)$$

O raio central intercepta a superfície de observação em  $\sigma = \sigma_S$ , no ponto  $\vec{x}_c(\sigma_S)$ . Em geral, o raio paraxial não alcança a superfície de observação quando  $\sigma = \sigma_S$ , portanto, é necessário estabelecer uma relação entre a perturbação na posição e vagarosidade quando  $\sigma = \sigma_S$  ou seja;  $\delta\vec{y}(\sigma_S) = (\delta\vec{x}(\sigma_S), \delta\vec{p}(\sigma_S))$  e a perturbação nos mesmos vetores quando atingem a superfície de observação, ou seja;  $\Delta\vec{y} = (\Delta\vec{x}, \Delta\vec{p})$ . Essa relação é estabelecida, admitindo-se de uma forma aproximada que o raio paraxial siga em direção ao receptor em linha reta e na direção tangente ao raio central em  $\vec{x}_c(\sigma_S)$ . Apenas dessa maneira, pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\begin{cases} \Delta\vec{x} = \delta\vec{x}(\sigma_S) + \frac{d\vec{x}_c(\sigma_S)}{d\sigma} \Delta\sigma \\ \Delta\vec{p} = \delta\vec{p}(\sigma_S) - \frac{d\vec{p}_c(\sigma_S)}{d\sigma} \Delta\sigma \end{cases} \quad (6)$$

onde  $\Delta\sigma = \sigma_R - \sigma_S$  com  $\sigma_R$  assumindo um valor tal que  $\vec{x}(\sigma_R) = \vec{R}$ , onde  $\vec{R}$  é a posição do receptor. Chamando de  $\vec{n}$  o conhecido vetor normal à superfície, podemos extrair o valor de  $\Delta\sigma$  aplicando o produto escalar por  $\vec{n}$  nos dois lados da primeira equação de 6. Desta forma, e relembrando que  $\frac{d\vec{x}_c(\sigma_S)}{d\sigma} = \vec{p}_c(\sigma_S)$ , teremos:

$$\Delta\sigma = \frac{\vec{n} \cdot \Delta\vec{x} - \vec{n} \cdot \delta\vec{x}(\sigma_S)}{\vec{n} \cdot \vec{p}_c(\sigma_S)}. \quad (7)$$

Substituindo 7 em 6, obtem-se uma equação matricial que relaciona  $\Delta\vec{y}$  com  $\delta\vec{y}$ , o que nos permite escrever:

$$\Delta\vec{x} = [\Pi_1][Q_2]\delta\vec{p}(\sigma_0), \quad (8)$$

onde:

$$[\Pi_1] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{p_{cS_1} \cdot n_1}{\xi} & -\frac{p_{cS_1} \cdot n_2}{\xi} & -\frac{p_{cS_1} \cdot n_3}{\xi} \\ -\frac{p_{cS_2} \cdot n_1}{\xi} & 1 - \frac{p_{cS_2} \cdot n_2}{\xi} & -\frac{p_{cS_2} \cdot n_3}{\xi} \\ -\frac{p_{cS_3} \cdot n_1}{\xi} & -\frac{p_{cS_3} \cdot n_2}{\xi} & 1 - \frac{p_{cS_3} \cdot n_3}{\xi} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

onde  $\vec{p}_{cS} = \vec{p}_c(\sigma_S)$  e  $\xi = \vec{n} \cdot \vec{p}_{cS}$ .  $[Q_1]$  é a submatriz superior esquerda da matriz  $[P]$ .

Desta forma, temos um sistema determinado, que nos permitirá obter o vetor  $\delta\vec{p}(\sigma_0)$  e consequentemente um novo vetor  $\vec{p}(\sigma_0)$ , que em tese deverá pertencer a um raio que chegará mais próximo ao ponto  $\vec{R}$ .

## Interação raio-interface em ambientes 3-D

Três aspectos devem ser levados em consideração para a determinação da direção do raio refletido na interface: o ponto de reflexão, a lei de Snell e o plano de reflexão. O parâmetro  $\sigma$  do ponto de reflexão ( $\sigma_I$ ), pode ser obtido a partir da seguinte equação:

$$h(x_1(\sigma_I), x_2(\sigma_I)) - x_3(\sigma_I) = 0, \quad (10)$$

onde  $h(x_1, x_2)$  é a equação do refletor. A solução da equação 10 deve ser obtida através de algum método numérico. A obtenção de  $\sigma_I$  permite-nos estabelecer os vetores posição e vagarosidade do raio incidente na interface, denotados respectivamente por  $\vec{x}_I$  e  $\vec{p}_I$ .

## O sistema de coordenadas da normal

Uma forma bastante simplificada de se relacionar os vetores vagarosidade de incidência ( $\vec{p}_I$ ) e refletido ( $\vec{p}_R$ ), pode ser conseguida ao se adotar um sistema de coordenadas onde o eixo  $Z$  é paralelo ao versor normal à interface no ponto de incidência, ou sistema de coordenadas da normal (SCN). Neste caso, em se tratando de ondas convertidas do tipo P - S, pode-se utilizar a equação eikonal a lei de Snell e o fato de que  $\vec{p}_I$  e  $\vec{p}_R$  pertencem ao mesmo plano (plano de reflexão), para estabelecer a seguinte relação:

$$\vec{p}_R^{(n)} = [R]^{(n)} \vec{p}_I^{(n)}, \quad (11)$$

onde:

$$[R]^{(n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r_{33}^{(n)} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

é a matriz R/T (neste caso específica matriz refletora) no SCN. Aqui, o sobre índice  $(n)$  indica que os vetores/matrizes estão no SCN. A componente  $r_{33}^{(n)}$  da matriz R/T no SCN pode ser escrita como:

$$r_{33}^{(n)} = -\frac{\sqrt{\frac{1}{v_s^2} - \frac{1}{v_p^2} + p_{I_3}^2}}{p_{I_3}} \quad (13)$$

Utilizando o conceito de mudança de base para estabelecer a matriz de mudança de base do SCN para o sistema de coordenadas cartesianas original (sistema em que é realizado o traçado dos raios), chega-se a seguinte relação para os vetores  $\vec{p}_I$  e  $\vec{p}_R$  em coordenadas cartesianas originais:

$$\vec{p}_R = [R] \vec{p}_I, \quad (14)$$

onde:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 + n_1^2(r_{33}^{(n)} - 1) & n_1 n_2(r_{33}^{(n)} - 1) & n_1 n_3(r_{33}^{(n)} - 1) \\ n_2 n_1(r_{33}^{(n)} - 1) & 1 + n_2^2(r_{33}^{(n)} - 1) & n_2 n_3(r_{33}^{(n)} - 1) \\ n_3 n_1(r_{33}^{(n)} - 1) & n_3 n_2(r_{33}^{(n)} - 1) & 1 + n_3^2(r_{33}^{(n)} - 1) \end{bmatrix}, \quad (15)$$

é a matriz R/T (neste caso matriz refletora) em coordenadas cartesianas originais. Aqui  $n_i$  são os componentes do versor normal à interface no ponto de incidência.

## O método paraxial em duas etapas

Para encontrar o raio que conecta fonte e receptor, após sofrer uma reflexão na interface, é necessário dividir o método paraxial em duas etapas que contemplem respectivamente os raios incidente e refletido relacionados através da matriz refletora. Desta forma, obtém-se um sistema matricial de mesma natureza da equação 8, com adição de matrizes referentes às duas etapas, que deve ser resolvido de forma semelhante. Sabendo-se que os raios central e paraxial saem de um mesmo ponto (fonte) e atingem uma superfície plana horizontal, tem-se as seguintes equações para as duas etapas do método paraxial: Etapa 1 - Raios central e paraxial incidentes

$$\begin{aligned} \Delta \vec{x}^{(1)} &= [\Pi_1^{(1)}][Q_2^{(1)}]\delta \vec{p}(\sigma_0) \\ \Delta \vec{p}^{(1)} &= \left( [\Pi_2^{(1)}][Q_2^{(1)}] + [P_2^{(1)}] \right) \delta \vec{p}(\sigma_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Etapa 2 - Raios central e paraxial refletidos

$$\Delta \vec{x}^{(2)} = [\Pi_1^{(2)}][Q_1^{(2)}]\delta \vec{x}(\sigma_I) + [\Pi_1^{(2)}][Q_2^{(2)}]\delta \vec{p}(\sigma_I), \quad (17)$$

onde todas as matrizes são citadas na seção anterior e os sobre índices 1 e 2 indicam se elas pertencem as etapas 1 (raio incidente) ou 2 (raio refletido). Note que  $\Delta \vec{p}^{(1)}$  é a perturbação do vetor vagarosidade do raio incidente no refletor e  $\delta \vec{p}(\sigma_I)$  é a perturbação do vetor vagarosidade do raio refletido. Logo podemos relacioná-los da seguinte maneira:

$$\delta \vec{p}(\sigma_I) = [\Delta R] \Delta \vec{p}^{(1)}, \quad (18)$$

onde a matriz  $[\Delta R]$  tem a mesma estrutura da matriz  $[R]$ , trocando-se apenas o elemento  $r_{33}^{(n)}$  por  $\Delta r_{33}^{(n)}$ , que tem a seguinte expressão:

$$\Delta r_{33}^{(n)} = -\frac{p_{I_3}}{\sqrt{\frac{1}{v_s^2} - \frac{1}{v_p^2} + p_{I_3}^2}}. \quad (19)$$

Sabendo-se que  $\delta \vec{x}(\sigma_I) = \Delta \vec{x}^{(1)}$ , teremos ao substituir 16 em 17:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{x}^{(2)} &= \left\{ [\Pi_1^{(2)}][Q_1^{(2)}][\Pi_1^{(1)}][Q_2^{(1)}] + \right. \\ &\left. [\Pi_1^{(2)}][Q_2^{(2)}][\Delta R] \left( [\Pi_2^{(1)}][Q_2^{(1)}] + [P_2^{(1)}] \right) \right\} \delta \vec{p}(\sigma_0) \end{aligned} \quad (20)$$

## Resultados e discussão

Para testar a eficiência do método, foi escolhida uma função vagarosidade quadrática do tipo trilinear incompleta ou seja uma função linear de  $R^3$  em  $R$  sem os termos cruzados. Tal função pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{1}{v^2} = a_0 + a_i x_i, \quad (21)$$

(onde se adota a notação de Einstein e  $a_i$  são os coeficientes para as ondas P ou S), o que, permite-nos estabelecer a solução das equações características (Cerveny,1987) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_i(\sigma) &= x_{0i} + p_{0i}\sigma + \frac{1}{4}a_i\sigma^2 \\ p_i(\sigma) &= p_{0i} + \frac{1}{2}a_i\sigma \end{aligned} \quad (22)$$

Aqui,  $x_i(\sigma)$  são os componentes do vetor posição e  $p_i(\sigma)$  são os componentes do vetor vagarosidade. O refletor curvo, possui a seguinte expressão:

$$h(x_1, x_2) = b_0 + b_{ij}x_i^j, \quad (23)$$

O raio incidente pertence a uma onda tipo P e o raio refletido é do tipo S. As tabelas 1 e 2 mostram os parâmetros da vagarosidade quadrática P e S e do refletor utilizados no teste. A figura 01 mostra o raio inicial, e dois raios intermediários no processo iterativo. Como em qualquer processo iterativo, o sucesso no resultado final esta

	$\frac{1}{V_p^2}$	$\frac{1}{V_s^2}$
$a_0$	$0.44 \text{ s}^2/\text{km}^2$	1.0
$a_1$	$-0.002375 \text{ s}^2/\text{km}^3$	-0.012
$a_2$	$-0.002375 \text{ s}^2/\text{km}^3$	-0.012
$a_3$	$-0.73 \text{ s}^2/\text{km}^3$	-1.65

Tabela 1: Coeficientes da vagarosidade quadrática P e S usados no experimento

$b_0$	0.4 km
$b_{11}$	0.1
$b_{12}$	$1.5 \text{ km}^{-1}$
$b_{21}$	0.1
$b_{22}$	$1.5 \text{ km}^{-1}$

Tabela 2: Coeficientes do refletor usados no experimento

intimamente ligado a uma boa escolha do modelo inicial. Aqui foi utilizado como raio inicial o vetor vagarosidade que conecta fonte-receptor em um meio homogêneo com refletor plano horizontal. Entretanto a experiência mostrou que nem sempre é aconselhável utilizar esse raio como inicial pois se o meio for fortemente heterogêneo e o refletor fortemente curvo, tal raio pode nem sequer chegar ao receptor. De qualquer forma, para o exemplo ilustrado nas tabelas 1 e 2, em dezenove iterações partiu-se de um raio inicial distante cerca de 79m do receptor e atingiu-se um raio final a uma distância menor que 1 mm do mesmo.

## Conclusões

O método paraxial em duas etapas, mostrou-se satisfatoriamente eficiente ao conectar fonte-receptor através de um raio se propagando em um meio heterogêneo e refletido (na verdade com uma conversão P-S) em uma interface curva. Em vista da relativa complexidade matemática em fazê-lo, o esforço computacional foi consideravelmente pequeno, podendo-se atingir o receptor (com um erro menor que 1mm), mesmo nos modelos mais complicados (como aquele exposto no exemplo) em menos de vinte iterações. Deve-se apontar, como fator preponderante à rápida convergência do método, a escolha adequada do raio central inicial. A técnica proposta aqui (e já descrita acima) por muitas vezes foi a única responsável por um baixo desempenho do mesmo. Além da boa escolha do raio central inicial, um ou-

tro fator que leva o método a convergir mais lentamente é a alta curvatura do refletor. De toda sorte, constatou-se que em modelos onde os parâmetros permitam a existência de um raio que conecte fonte-receptor, e com raios centrais iniciais adequados, quase na totalidade dos casos, pôde-se atingir, de forma mais ou menos rápida o raio ideal.

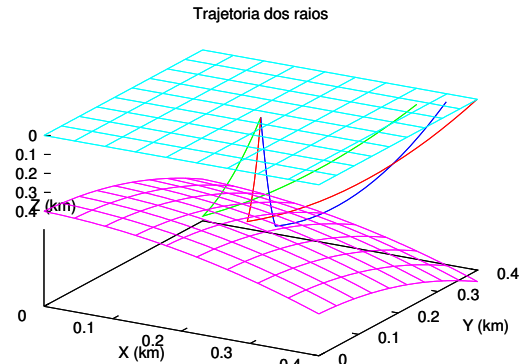


Figura 1: Trajetoria dos raios em um meio heterogêneo com refletor curvo. Em preto o primeiro raio traçado, em azul o quarto raio e em vermelho o décimo terceiro raio. As coordenadas da fonte e receptor são respectivamente (0,2,0,2) e (0,4,0,4)

## Referências

- Aki, K and Richards, P.G., 1980. Quantitative Seismology: Theory and Method, W.H.Freeman and Co., San Francisco.
- Cerveny, V., 1987. Ray Methods for Three-Dimensional Seismic Modelling, Petroleum Industry Course, Norwegian Institute, of Technology.
- Figueiró, W.M. e Madariaga, R.I, 1999. Three-Dimensional Two-Point Ray Tracing Problem In The Presence Of Caustics. 6TH International Congress Of The Brazilian Geophysical Society, Rio De Janeiro, CDROM.

## Agradecimentos

RMM agradece ao CPGG/UFBa pelo suporte técnico e operacional, a ANP pelo apoio financeiro e ao Prof. Dr. Wilson M. Figueiró pelas explicações sobre o método paraxial.



# O problema das reflexões numéricas nos esquemas de diferenças finitas com malha de espaçamento irregular

*Sérgio Adriano M. Oliveira*

*LENEP/UENF*

## Abstract

Reflexões numéricas podem ocorrer quando se usa o método das diferenças finitas, com malha de espaçamento irregular, para solucionar a equação da onda. Estas reflexões não correspondem à realidade, constituindo-se em um ruído numérico que pode vir a afetar seriamente os resultados. Este sinal indesejado pode ser explicado como consequência da variação da velocidade de fase que ocorre devido a dispersão numérica ao longo da malha. Para evidenciar isto, aqui são exibidos alguns exemplos com a equação acústica da onda, no caso 1-D. Por fim, são fornecidas algumas regras que devem ser levadas em consideração no projeto da malha de modo a assegurar a ausência de tais ruídos.

## Introdução

O método das diferenças finitas é uma ferramenta largamente usada para modelagem sísmica pela solução numérica da equação da onda, pois este é efetivo para tratar estruturas complexas a um custo atrativo quando comparado com outros métodos numéricos, como a exemplo dos elementos finitos. Todavia este custo ainda é alto para tratar situações práticas requeridas pela indústria, a exemplo da simulação de um levantamento completo em escala real. Uma maneira de melhorar este problema, seria o uso de uma malha muito espaçada, de maneira a reduzir o número total de pontos, este objetivo pode ser atingido usando-se aproximações de ordem superior para as derivadas espaciais e temporais, ver por exemplo Dablain (1986). Por outro lado, uma malha com espaçamento muito largo não é conveniente para representar feições como interfaces curvas e camadas muito finas. Outro sério problema ocorre caso heterogeneidades de baixa velocidades estejam presentes, pois isto faz com que a malha tenha de ser fina de modo a evitar a dispersão numérica. E isto só piora a situação, pois, devido a questão da estabilidade, quanto menor o espaçamento da malha, menor também deverá ser o incremento temporal. Para tratar estes problemas, o ideal é adaptar o método das diferenças finitas de modo a que este possa trabalhar

com malha numérica de espaçamento variável. Desta forma podemos aumentar a densidade de pontos para representar as feições descritas anteriormente e manter uma densidade menor no resto do modelo, diminuindo assim o número total de pontos e reduzindo o tempo de computação sem comprometer a qualidade do resultado final.

Podemos encontrar na literatura vários algoritmos de D.F. adaptados para malha do tipo retangular irregular, para citar alguns exemplos temos: Oprsal and Zahradnik (1999) que trata da modelagem elástica 2-D (caso P-SV), Moczo (1989) modelagem elástica 2-D (caso SH) e Pitarka (1999) para o caso elástico 3-D em malha fatorada. Porém uma questão muito importante ainda não foi completamente esclarecida. Esta se constitui em saber se e como a malha irregular pode alterar a precisão e estabilidade dos esquemas. Neste trabalho, tal problema foi abordado através de alguns testes numéricos simples, porém elucidativos, envolvendo a equação acústica da onda no caso 1-D. O objetivo destes foi saber como parâmetros tais como velocidade do meio e conteúdo de frequências do pulso sísmico influenciam o resultado, frente a cálculos com malha contendo variações bruscas e suaves em seu espaçamento.

O principal problema detectado foi a presença de reflexões numéricas que tendem a acontecer nos locais onde existe variação brusca de espaçamento na malha. Este sinal indesejado pode vir a ter amplitude da mesma ordem de grandeza das reflexões reais, que existem graças a variação da velocidade do meio e não do espaçamento da malha. No curso desta pesquisa observou-se que as reflexões numéricas são altamente dependentes do conteúdo de frequências do pulso, o que nos deu embasamento para concluir que estas são nada mais que uma consequência do fenômeno de dispersão numérica. Com isto em mente, podemos projetar a malha de maneira a assegurar que este ruído não esteja presente nos resultados, tornando viável a aplicação dos esquemas de diferenças finitas em malha irregular para fins de modelagem sísmica.



## O efeito da dispersão numérica em esquemas de diferenças finitas com malha irregular

A equação acústica da onda, no caso 1-D é apresentada abaixo:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

Onde  $P(x,t)$  significa a variação em torno da pressão fixa do meio e  $c(x)$  é a velocidade de propagação. Para obtermos um esquema de diferença finita que opere em uma malha de espaçamento irregular, precisamos de uma expressão para o cálculo da derivada espacial de segunda ordem. Isto pode ser feito por intermédio de polinômios de Lagrange. Como exemplo consideremos cinco pontos;  $x_{i-2}$ ,  $x_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $x_{i+1}$ ,  $x_{i+2}$ , o espaçamento entre estes são respectivamente  $h_{i-1}$ ,  $h_i$ ,  $h_{i+1}$ ,  $h_{i+2}$ . Conhecendo o campo, em um determinado instante, nestes pontos, fazemos a interpolação obtendo um polinômio do quarto grau. Após isto derivamos duas vezes e avaliamos em  $x = x_i$ . Para maiores detalhes ver Mufti et al. (1996). Adotando uma aproximação usual de segunda ordem para derivada temporal obtemos o esquema 2, que possui uma precisão equivalente a de quarta ordem em relação às variáveis espaciais.

$$P_i^{j+1} = \alpha_i^1 P_{i-2}^j + \alpha_i^2 P_{i-1}^j + \alpha_i^3 P_i^j + \alpha_i^4 P_{i+1}^j + \alpha_i^5 P_{i+2}^j + 2P_i^j - P_i^{j-1} \quad (2)$$

Os coeficientes  $\alpha_i^1$ ,  $\alpha_i^2$ ,  $\alpha_i^3$ ,  $\alpha_i^4$  e  $\alpha_i^5$  dependem da velocidade  $c$ , do incremento temporal e também dos espaçamentos entre os pontos da malha.

Os esquemas de diferenças finitas tendem a sofrer o fenômeno da dispersão numérica, isto é, uma dependência da velocidade de fase em relação ao espaçamento da malha (espacial e temporal). Tal efeito tende a afetar os sinais de frequências mais altas (ver Alford et al. (1974)). Este efeito pode ser estudado substituindo-se uma solução de onda plana harmonica do tipo  $P(x,t) = e^{iw(t-x/c_p)}$  no esquema 2. Desta forma chegamos, após algumas manipulações algébricas, a expressões para a razão entre a velocidade de fase  $c_f$  e a velocidade do meio  $c$ . A expressão para esta razão pode ser parametrizada em função de  $m$  e  $p$ .  $p = c \Delta t/h$  e  $m = \lambda/h$ , onde  $h$  é o espaçamento da malha ( para fixar ideias, imaginemos que estamos em uma região da malha onde o espaçamento é regular:  $h_{i-1} = h_i = h_{i+1} = h_{i+2} = h$ ). Observe que  $m$  mede o número de pontos com o qual o comprimento de onda é amostrado espacialmente.  $p$  é razão

da distância percorrida em um intervalo de tempo correspondente ao incremento temporal  $\Delta t$  pela largura da malha. Se plotarmos um gráfico de  $c_f/c$  em função de  $m$ , teremos uma curva do tipo apresentada na Fig. 1. Observa-se que, para  $m > 5$ ,  $c_f$  é praticamente igual a  $c$ , porém se  $m < 3$  esta razão decai muito rapidamente, o que significa que a velocidade de fase acaba sendo muito afetada pela largura da malha, decaindo muito rapidamente na medida que  $m$  se aproxima de zero.

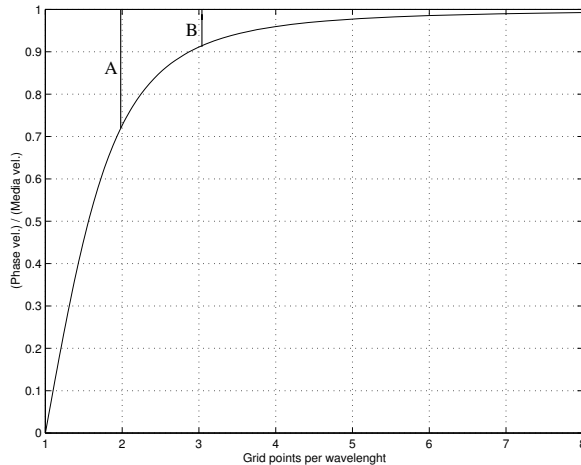


Figura 1: Razão da velocidade de fase pela velocidade do meio em função do parâmetro  $m$  (Considerando  $p = 0.5$ ).

## Testes numéricos

Nesta seção foram aplicados uma série de testes numéricos com malha de espaçamento variável. São eles a saber: 1) Manter a velocidade do meio constante e mudar bruscamente o espaçamento da malha. 2) Manter a velocidade constante em uma malha irregular e variar a frequência central do pulso sísmico. 3) Manter a velocidade constante e mudar, suavemente, o espaçamento da malha. 4) Mudar tanto a velocidade do meio quanto a espaçamento da malha.

Na Fig. 2, é exibida a configuração do campo, logo após a onda passar por um ponto onde o espaçamento varia bruscamente de 0.01 para 0.2 metros (teste 1.a). O pulso sísmico possui a forma da segunda derivada da função Gaussiana cuja frequência máxima é 250 HZ. A velocidade do meio é constante e igual 100 m/s. A onda, ao passar para a região de maior espaçamento, onde o campo é mal amostrado espacialmente, sofre os efeitos

## Reflexões numéricas em malha irregular

da dispersão e também dá origem ( na direita ) a um pulso refletido com carater altamente oscilatorio. Tal pulso só pode ser interpretado como ruído numérico, uma vez que não existe variação na velocidade do meio. Mantendo o mesmo pulso sísmico mas agora com o espaçamento variando bruscamente de 0.01 para 0.13 (teste 1.b) nota-se que a reflexão numérica tem uma amplitude muito menor (Fig. 3). Os contrastes na velocidade de fase encontrado pela onda em 1.a e 1.b estão representados na Fig. 1 pelos segmentos A e B respectivamente.

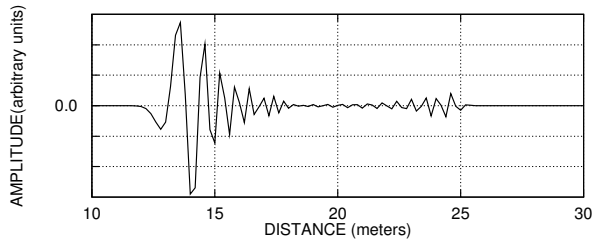


Figura 2: Configuração do campo logo após o pulso cruzar um ponto onde o espaçamento da malha varia bruscamente de uma razão de 20:1 (observe a reflexão numérica na direita).

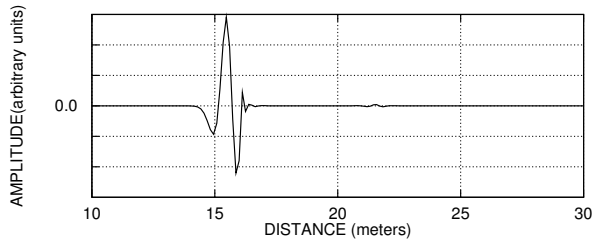


Figura 3: Configuração do campo logo após o pulso cruzar um ponto onde o espaçamento da malha varia bruscamente de uma razão de 13:1 (observe a reflexão numérica na direita) .

No teste 2.a manteve-se a malha com a mesma configuração do teste 1.a, porém agora a frequência máxima do pulso foi abaixada para 166 Hz. Observa-se na Fig. 4 que a reflexão numérica diminui sensivelmente sua amplitude. Repetindo o teste 1.b para um pulso com  $f_{max}=166$  Hz, constata-se na Fig. 5 que a reflexão numérica praticamente sumiu.

No teste 3, o espaçamento da malha foi variado suavemente, ao invés de bruscamente. No caso, o espaçamento aumentou de 0.01 a 0.2 metros, porém isto foi feito em progressão aritmética, em

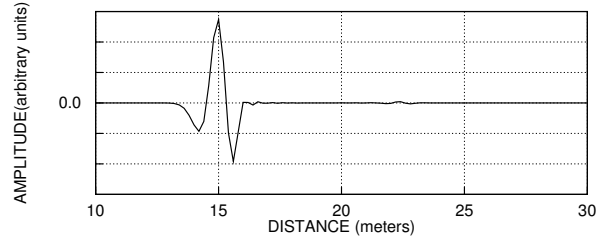


Figura 4: teste 1.a repetido para um pulso cuja frequência máxima é 166 Hz.

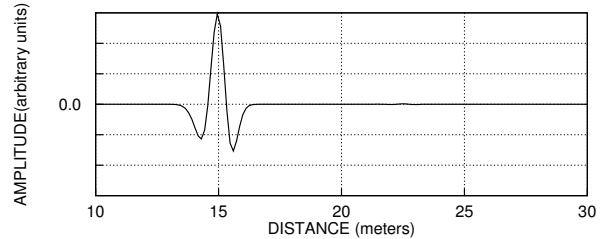


Figura 5: teste 1.b repetido para um pulso cuja frequência máxima é 166 Hz.

uma zona de transição entre  $x = 30$  e  $x = 33.7$  metros (ver Fig. 6). Observa-se que o pulso, sendo mal amostrado, sofre grande dispersão na região onde  $h=0.2$ , como no teste 1.a, porém desta feita, este não gera nenhuma reflexão numérica.

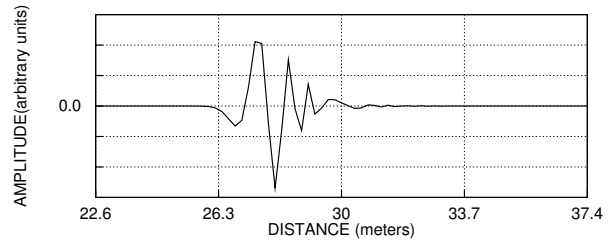


Figura 6: Ausência de reflexão numérica no caso do espaçamento da malha variar suavemente.

Finalmente, o esquema é testado para ver como comporta variações tanto de espaçamento como da velocidade  $c$  (teste 4). Neste caso, temos o campo (Fig 7) logo após um pulso Gaussiano atravessar uma região onde a velocidade é  $c_1$  e o espaçamento  $h_1$  para outra onde o espaçamento é  $h_2$  e a velocidade é  $c_2$ :  $c_1/c_2 = 0.6$  e  $h_1/h_2 = 10$ . Neste o pulso é bem amostrado espacialmente em ambas as regiões da malha. Observe que o resultado numérico é muito próximo do calculado ana-

liticamente. Verificou-se ainda que a estabilidade do esquema no caso de malha irregular, é atingida aplicando-se localmente o critério derivado para malha regular. Para o presente esquema tal critério é:  $(c_i dt)/h_i < \sqrt{3}/2$ , onde  $c_i$  e  $h_i$  são a velocidade e o espaçamento em cada ponto da malha.

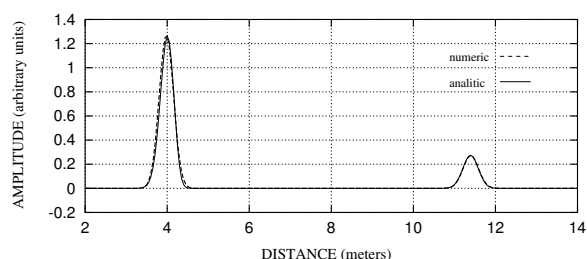


Figura 7: Na esquerda, temos o pulso transmitido e na direita o refletido tendo sido ambos calculados analiticamente e numericamente com malha irregular.

## Análise dos resultados e conclusões

Os testes numéricos mostraram claramente que o grid irregular pode trazer sérios problemas para os esquemas de diferenças finitas. Porém isto parece só ocorrer caso haja alguma região onde o sinal seja mal amostrado espacialmente. O fenômeno da dispersão numérica pode explicar estes resultados, pois as variações de espaçamento na malha induzem variações na velocidade de fase, que a depender da frequência do sinal, pode gerar reflexões numéricas. Podemos então resumir estes resultados da seguinte maneira:

Se o pulso sísmico for bem amostrado em todas as regiões da malha ( O que para o esquema apresentado significa mais de cinco pontos por comprimento de onda mínimo ) os cálculos numéricos do campo de onda em malha irregular não apresentarão problema algum. Isto é ilustrado no teste 4, mas observe também que no teste 2.b. o pulso passa de uma região onde  $m = 60$  para outra onde  $m = 4.6$  e praticamente já não se nota a presença da reflexão numérica.

A condição prévia não deve ser violada, pois mudanças bruscas da largura da malha pode gerar reflexões numéricas . Isto é ilustrado no teste 1, especialmente no teste 1.a. quando o parâmetro  $m$  muda de 60 para 2, gerando um grande contraste na velocidade de fase, onde não deveria haver.

Mesmo que exista alguma região da malha

onde o pulso sísmico seja mal amostrado, é possível evitar as reflexões numéricas se o espaçamento mudar suavemente, evitando bruscos contrastes na velocidade de fase. O que é ilustrado no teste 3.

Estes resultados devem ser levados em consideração quando no projeto de uma malha irregular para solução da eq. da onda pelo método das diferenças finitas. Outro fato interessante a notar, é que uma mudança abrupta de espaçamento tende a agir como um filtro, pois as componentes de mais alta frequência do pulso sísmico, sentirão uma mudança maior na velocidade de fase e serão refletidas com maior intensidade. Isto explica o caracter oscilatório do da reflexão numérica que ocorreu no exemplo 1.a. Embora estas conclusões tenham sido baseadas na equação acústica da onda, é certo que podem ser extendidas para o caso elástico, uma vez que este também sofre com a dispersão numérica.

## Agradecimentos

Este trabalho teve o apoio financeiro da Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ)

## Referências

- Alford, R. M., Kelly, K. R., and Boore, D. M., 1974, Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation: *Geophysics*, **39**, 834-341.
- Dablain, M. A., 1986, The application of high-order differencing to the scalar wave equation: *Geophysics*, **51**, 54-66.
- Moczó, P., 1989, Finite-difference technique for sh waves in 2-d media using irregular grids - application to the seismic response problem: *Geophys. J. Int.*, **99**, 321-329.
- Mufti, I. R., Pita, J. A., and Huntley, R. W., 1996, Finit-difference depth migration of extrapolation scale 3-d seismic data: *Geophysics*, **61**, 776-794.
- Oprsal, I., and Zahradnik, J., 1999, Elastic finite-difference method for irregular grids: *Geophysics*, **64**, 240-250.
- Pitarka, A., 1999, 3d elastic finite-difference modeling of seismic montion using staggered grids with nonuniform spacing: *Bull. Seis. Soc. Am.*, **89**, 54-68.



# Paraxial ray-tracing applied to a 3-D seismic velocity model and estimation of its parameters

Wilson M. Figueiró <sup>†</sup>

## Abstract

The two-point ray-tracing problem is solved for a set of models that admit analytical expression of theoretical elements of the paraxial method. Estimation of velocity field parameters of the considered models are formulated using the Gauss-Newton method, for which analytical derivatives of traveltimes with respect to the mentioned parameters are obtained. The model studied in this work can be seen as a test-model to show the feasibility of the technique. It is also a tool or departure point to studies with more complicated models.

## Introduction

The important geophysical problem of estimate parameters of a seismic velocity field ask, generally, the solution of another problem called two-point ray-tracing. This two problems are studied in this work. A space of three-dimensional models is considered, in such models it is possible to perform paraxial ray-tracing and inversion using Gauss-Newton method with analytical derivatives of traveltimes with respect to the parameters of the model. This set of procedures is completely ready in theoretical terms and it is presented in the next sections.

## Space of Models

Initially, we are treating three-dimensional seismic velocity ( $v = v(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ ) models defined by the function:

$$v(\mathbf{x}) = (a + bx_1 + cx_2 + dx_3)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1)$$

where  $a, b, c$  and  $d$  are real numbers. It means, a polynomial parametrization of the square slowness  $u^2(\mathbf{x}) = \frac{1}{v^2(\mathbf{x})}$ . Figure 1 shows a particular velocity model for some depths and we can see that the observation surface is the  $x_1x_2$ -plane and its dimensions are 200 km  $\times$  200 km. These large values are motivated by seismological problems, but they can be modified without loss of generality. This set of

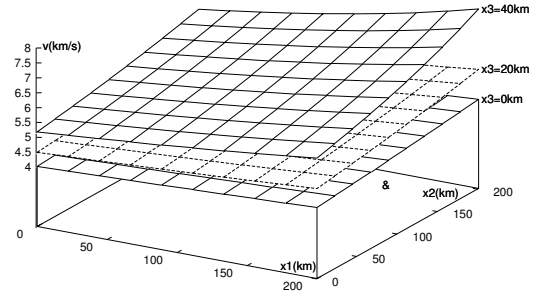


Figure 1: A 3D graphical view of the velocity model given by  $\frac{1}{v^2} = a + bx_1 + cx_2 + dx_3$ , where  $a = 6.25 \times 10^{-2} \text{ s}^2\text{km}^{-2}$ ,  $b = -5.0 \times 10^{-5} \text{ s}^2\text{km}^{-1}$ ,  $c = -6.0 \times 10^{-5} \text{ s}^2\text{km}^{-1}$  and  $d = -6.2 \times 10^{-4} \text{ s}^2\text{km}^{-1}$ . The three surfaces show velocities for the depths  $x_3 = 0, 20$  and  $40$  km.

studied models is simple, but not completely unrealistic. It can represent a large range of possibilities of seismic velocity distribution models of the Earth with a great degree of realism and it can be used as background for treatment of more complicated models.

## Paraxial ray-tracing

A seismic source  $S_0$  and an isotropic velocity model  $v(\mathbf{x})$  defines a traveltimes family. By means of the wave equation, it is possible to get the eikonal equation:

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)^2 = \frac{1}{v^2(\mathbf{x})}, \quad (2)$$

where  $v(\mathbf{x})$  is the wave velocity function. The gradient  $\vec{\nabla}T$  is perpendicular to the wave fronts ( $T = \text{constant}$ ). Its gradient is called slowness vector and represented by  $\mathbf{p}$ .

As suggested by [1] we can define the Hamiltonian

$$H(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}[\|\mathbf{p}\|^2 - u^2(\mathbf{x})] \quad (3)$$

which is equal to zero. It is not considered a seismic ray that originates and is described

<sup>†</sup>Research Center for Geophysics and Geology, Federal University of Bahia, CPGG-UFBA, Institute of Geosciences, 40179-290, Federação, Salvador, BA, Brazil.

by the pair  $\mathbf{y}_o(\tau) = (\mathbf{x}_o(\tau), \mathbf{p}_o(\tau))$  in a 3D velocity model, where  $\mathbf{p}_o(\tau) = (p_{o1}(\tau), p_{o2}(\tau), p_{o3}(\tau))$  represents the slowness vector tangent to this ray in its point  $\mathbf{x}_o(\tau) = (x_{o1}(\tau), x_{o2}(\tau), x_{o3}(\tau))$  and  $\tau$  is a ray parameter defined by  $\int_0^\ell v(\ell) d\ell$  (Thomson and Chapman, 1985). We want to compute perturbations  $\delta\mathbf{x}(\tau) = (\delta x_1(\tau), \delta x_2(\tau), \delta x_3(\tau))$  and  $\delta\mathbf{p}(\tau) = (\delta p_1(\tau), \delta p_2(\tau), \delta p_3(\tau))$  of the central ray  $\mathbf{y}_o(\tau)$ . The ray tracing equations (Červený, 1987) are:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \vec{\nabla}_p H = \mathbf{p} \\ \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\vec{\nabla}_x H = \frac{1}{2} \vec{\nabla}_x (u^2(\mathbf{x})), \end{cases} \quad (4)$$

where  $\vec{\nabla}_x$  and  $\vec{\nabla}_p$  are the gradients with respect to the vectors  $\mathbf{x}$  and  $\mathbf{p}$ , respectively. The first order Taylor expansion of  $\vec{\nabla}_x H$  around  $\mathbf{x}_o$  combined with perturbations and system (4) produce the paraxial ray tracing equations:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\delta\mathbf{x}}{d\tau} \\ \frac{d\delta\mathbf{p}}{d\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{U} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \delta\mathbf{p} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

where  $\mathbf{I}$  is the identity matrix of order 3 and  $U_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^2(\mathbf{x}_o)}{\partial x_i \partial x_j}$ ; with  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Calling  $\mathbf{\Lambda}$  the  $6 \times 6$  matrix of equation (5), we have a more synthetic expression:

$$\frac{d\delta\mathbf{y}(\tau)}{d\tau} = \mathbf{\Lambda} \delta\mathbf{y}(\tau). \quad (6)$$

The formal solution of (6) (Aki and Richards, 1980) is:

$$\delta\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{P}(\tau, \tau_o) \cdot \delta\mathbf{y}(\tau_o), \quad (7)$$

where  $\tau_o$  is the initial value of  $\tau$  and

$$\mathbf{P}(\tau, \tau_o) = \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \int_{\tau_o}^{\tau} \mathbf{\Lambda}(\tau_1) d\tau_1 \right)^j \quad (8)$$

is known as the propagator matrix. Denoting  $\int_{\tau_o}^{\tau} \mathbf{U}(\tau_1) d\tau_1$  by  $\mathbf{\Upsilon}(\tau, \tau_o) = \mathbf{\Upsilon}$ , we can write:

$$\int_{\tau_o}^{\tau} \mathbf{\Lambda}(\tau_1) d\tau_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & (\tau - \tau_o)\mathbf{I} \\ \mathbf{\Upsilon}(\tau, \tau_o) & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Then,  $\mathbf{P}$  can be written in the matrix form:

$$\mathbf{P}(\tau, \tau_o) = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

where

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{I} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j)!} (\tau - \tau_o)^j \mathbf{\Upsilon}^j, \quad (11)$$

$$\mathbf{Q}_2 = (\tau - \tau_o)\mathbf{I} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} (\tau - \tau_o)^{j+1} \mathbf{\Upsilon}^j, \quad (12)$$

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{(\tau - \tau_o)} \mathbf{\Upsilon} \mathbf{Q}_2 \quad (13)$$

and

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{Q}_1 \quad (14)$$

Figure 2 shows the 3D geometry of the problem,

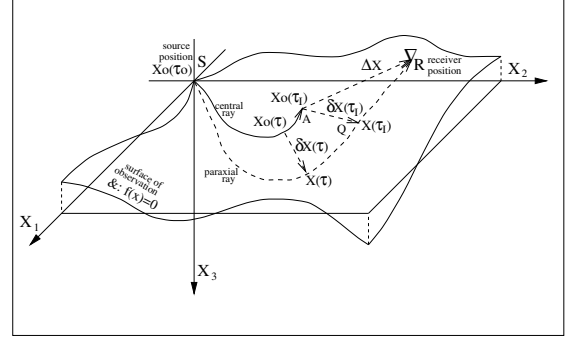


Figure 2: A three-dimensional schematic view of the problem. It consists in finding the ray  $\mathbf{x}(\tau)$  (paraxial) that arrives at a receiver point ( $\mathbf{R} \in \&$ ), with help of the known central ray ( $\mathbf{x}_o(\tau)$ ). This last reaches  $\&$  at the point  $\mathbf{x}_o(\tau_I)$ . The perturbation of  $\mathbf{x}(\tau)$  is represented by  $\delta\mathbf{x}(\tau)$ .

where the central ray,  $\mathbf{x}_o(\tau)$ , arrives at the surface of observation,  $\&$  ( $f(\mathbf{x}) = 0$ ), at  $\tau = \tau_I$  at the point  $\mathbf{x}_o(\tau_I)$ . In general, the paraxial ray,  $\mathbf{x}(\tau)$ , does not touch  $\&$  for  $\tau = \tau_I$ . Then, it is necessary to establish a relation between  $\delta\mathbf{y}(\tau_I) = (\delta\mathbf{x}(\tau_I), \delta\mathbf{p}(\tau_I))$  and  $\Delta\mathbf{y} = (\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{p})$ , where  $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{R} - \mathbf{x}_o(\tau_I) = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$  and  $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}(\tau_R) - \mathbf{p}_o(\tau_I) = (\Delta p_1, \Delta p_2, \Delta p_3)$ . Let us consider  $\mathbf{n}$  the normal vector to the surface  $\&$  at  $\mathbf{x}_o(\tau_I)$ . In figure 2 we can observe the not simultaneous arrivals in  $\&$  of central and paraxial rays. Considering the triangle  $AQR$  in the mentioned figure, using the ray equations (4) and assuming that  $d\mathbf{y}/d\tau$  has (approximately) the same direction at  $A$  and  $Q$ , the following system can be written:

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{x}(\tau_I) + \vec{\nabla}_p H(\mathbf{y}_o(\tau_I)) \cdot \Delta\tau \\ \Delta\mathbf{p} = \delta\mathbf{p}(\tau_I) - \vec{\nabla}_x H(\mathbf{y}_o(\tau_I)) \cdot \Delta\tau, \end{cases} \quad (15)$$

where  $\Delta\tau = \tau_R - \tau_I$  and  $\tau_R$  is such that  $\mathbf{x}(\tau_R) = \mathbf{R}$ . The scalar products  $\langle \mathbf{n} | \Delta\mathbf{x} \rangle$  and  $\langle \mathbf{n} | \mathbf{p}_o(\tau_I) \rangle$  are known and represented by  $k$  and  $\xi$  (respectively), where  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = \vec{\nabla} f(\mathbf{x}_o(\tau_I))$  and  $\mathbf{p}_o(\tau_I) = (p_{o1}, p_{o2}, p_{o3})$  is tangent to the central ray at  $\mathbf{x}_o(\tau_I)$ . Similarly,  $\mathbf{p}_o(\tau_o) = (p_{o1_o}, p_{o2_o}, p_{o3_o})$  and  $\mathbf{p}(\tau_o) = (p_{1_o}, p_{2_o}, p_{3_o})$  are tangent at  $\mathbf{S}$  to the central and paraxial rays, respectively. Using the

last definitions and the first equation of (15), we have:

$$\Delta\tau = \frac{k - \langle \mathbf{n} | \delta \mathbf{x}(\tau_I) \rangle}{\xi}. \quad (16)$$

For the sake of simplicity, let us take  $\&$  as the plane  $x_3 = 0$ . Then,  $f(\mathbf{x}) = x_3$ ,  $k = 0$ ,  $n_1 = n_2 = 0$ ,  $n_3 = -1$ ,  $\Delta x_3 = 0$  and  $\xi = -p_{o3_I}$ . This permits us to write the following equation (Farra et al, 1989):

$$\Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{\Pi}_2 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \delta \mathbf{y}(\tau_I), \quad (17)$$

where

$$\mathbf{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-p_{o1_I}}{p_{o3_I}} \\ 0 & 1 & \frac{-p_{o2_I}}{p_{o3_I}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

and

$$\mathbf{\Pi}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-u}{p_{o3_I}} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & \frac{-u}{p_{o3_I}} \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ 0 & 0 & \frac{-u}{p_{o3_I}} \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

For  $\tau = \tau_I$ , the combination of (7), (10) and (17) produces:

$$\Delta \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{Q}_1 & \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P}_1 & \mathbf{\Pi}_2 \mathbf{Q}_2 + \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}(\tau_o) \\ \delta \mathbf{p}(\tau_o) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

where  $\mathbf{Q}_1$ ,  $\mathbf{Q}_2$ ,  $\mathbf{P}_1$  and  $\mathbf{P}_2$  are calculated at  $\tau = \tau_I$ . Since we are considering a fixed source point,  $\delta \mathbf{x}(\tau_o) = (0, 0, 0)$  and

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{\Pi}_1 \mathbf{Q}_2 \delta \mathbf{p}(\tau_o). \quad (21)$$

Calling  $q_{2ij}$  each entry of  $\mathbf{Q}_2$ , taking equation (21) and using the equation

$$\delta p_3(\tau_o) = \frac{-p_{o1_o}}{p_{o3_o}} \delta p_1(\tau_o) - \frac{p_{o2_o}}{p_{o3_o}} \delta p_2(\tau_o) \quad (22)$$

obtained by a first order Taylor expansion of the Hamiltonian at the source point, we have:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p_1(\tau_o) \\ \delta p_2(\tau_o) \end{bmatrix}, \quad (23)$$

where

$$\alpha_{ij} = q_{2ij} - \frac{p_{oi_I}}{p_{o3_I}} \cdot q_{23j} - \frac{p_{oj_o}}{p_{o3_o}} (q_{2i3} - \frac{p_{oi_I}}{p_{o3_I}} \cdot q_{233}). \quad (24)$$

The problem now consists in solving (23) to find  $\delta \mathbf{p}(\tau_o)$  that produces a new  $\mathbf{p}(\tau_o)$  and, consequently, a new central ray for the iterative process (Figueiró and Madariaga, 1998).

## Paraxial Ray Tracing Application

For model (1), it is easy to see that the matrix  $\mathbf{T}$  is equal to zero. Then, by (12)

$$\mathbf{Q}_2 = (\tau_I - \tau_o) \mathbf{I} \quad (25)$$

and the entries of  $\mathbf{A}$  are:

$$\alpha_{ij} = (\tau_I - \tau_o) \left( \delta_{ij} + \frac{p_{oj_o} \cdot p_{oi_I}}{p_{o3_o} \cdot p_{o3_I}} \right). \quad (26)$$

In the velocity field (1), a ray originating in  $\mathbf{S} = (0, 0, 0)$  with initial slowness vector  $\mathbf{p}_o = (p_{o1_o}, p_{o2_o}, p_{o3_o})$  has the following parametric equation:

$$\begin{cases} x_1(\tau) = \frac{b}{4} \tau^2 + p_{o1_o} \tau \\ x_2(\tau) = \frac{c}{4} \tau^2 + p_{o2_o} \tau \\ x_3(\tau) = \frac{d}{4} \tau^2 + p_{o3_o} \tau \end{cases} \quad (27)$$

where

$$p_{o3_o} = (a - p_{o1_o}^2 - p_{o2_o}^2)^{1/2}. \quad (28)$$

For

$$\tau_I = \frac{-4p_{o3_o}}{d}, \quad (29)$$

the ray meets the surface  $x_3 = 0$ .

## Gauss-Newton Method

A current model  $M_k$  gives us a perturbation

$$\Delta M_k = (A^T(M_k)A(M_k))^{-1} A^T(M_k) \Delta T_k, \quad (30)$$

where

$$\Delta T_k = T_d - T(M_k) \quad (31)$$

with  $T_d = (T_{d1}, T_{d2}, \dots, T_{dn})$  and  $T(M_k) = (T_1(M_k), T_2(M_k), \dots, T_n(M_k))$  are  $n$ -dimensional vector of observed and calculated traveltimes in the target model ( $M = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m)$ ) and current models ( $M_k$ ), respectively; and

$$[A(M_k)]_{ij} = \left( \frac{\partial T_i(M_k)}{\partial \theta_j} \right) \quad (32)$$

is a  $n \times m$  matrix of the derivatives of traveltimes with respect to the model parameter  $\theta_j$ . Then, we have a new current model given by:

$$M_{k+1} = M_k + \Delta M_k. \quad (33)$$

If some conditions are present, we expect the convergence of this iterative process to the target model  $M$  beginning with an initial model  $M_o$ , constructed with a priori information (Figueiró, 1994).

## Gauss-Newton Application

For the model (1), we have not reflections at interfaces and it is possible to find analytical expressions for the traveltimes and its derivatives with respect to the parameters of the model. Using

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{v^2}, \quad (34)$$

we have:

$$dT = (a + bx_1 + cx_2 + dx_3)d\tau \quad (35)$$

Then, the traveltimes waste by the wave between source ( $S$ ) and receiver ( $R$ ) is given by:

$$T = \int_0^{\tau_R} \{a + bx_1(\tau) + cx_2(\tau) + dx_3(\tau)\} d\tau. \quad (36)$$

The vector  $(p_{o_{1o}}, p_{o_{2o}}, p_{o_{3o}})$  makes the ray arrives at the desired receiver point  $R$  and for  $\tau_R = \frac{-4p_{o_{3o}}}{d}$  the ray meets  $R$ . Solving the integral, we have:

$$T = K_1 d^{-1} + K_2 d^{-2} - \frac{K_3}{3} d^{-3}, \quad (37)$$

where

$$K_1 = 4p_{o_{3o}} \left( \frac{2}{3} p_{o_{3o}}^2 - a \right), \quad (38)$$

$$K_2 = 8p_{o_{3o}}^2 (bp_{o_{1o}} + cp_{o_{2o}}) \quad (39)$$

and

$$K_3 = 16p_{o_{3o}}^3 (c^2 + b^2). \quad (40)$$

This permit us to have the following analytical derivatives:

$$\frac{\partial T}{\partial a} = -4p_{o_{3o}} d^{-1}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial T}{\partial b} = 8p_{o_{3o}}^2 d^{-2} \left( p_{o_{1o}} - \frac{4}{3} p_{o_{3o}} b d^{-1} \right), \quad (42)$$

$$\frac{\partial T}{\partial c} = 8p_{o_{3o}}^2 d^{-2} \left( p_{o_{2o}} - \frac{4}{3} p_{o_{3o}} c d^{-1} \right) \quad (43)$$

and

$$\frac{\partial T}{\partial d} = -K_1 d^{-2} - 2K_2 d^{-3} + K_3 d^{-4}. \quad (44)$$

These derivatives will be used in the Gauss-Newton algorithm in order to perform inversion. It is necessary to say that data and noise, in this work, are considered synthetic and the observation system is CSP (common source point).

## Conclusions

For proposed model it is possible to solve not only the two-point ray-tracing problem (with sources and receivers located on the surface of observation) by means of an analytical treatment, but also to get all analytic derivatives of traveltimes with respect to parameters of the velocity field for use in Gauss-Newton method. This model can be useful as a test-model to show the feasibility to the technique. It is also, a tool or a departure point for studies with more complicated models.

## Acknowledgements

Thanks to PGS (Petroleum Geo-Service) and CPGG-UFBA (Salvador, Bahia, Brazil). A very special thanks to Maria Fátima de Freitas.

## References

- Aki, K. and Richards, P. G., 1980. Quantitative Seismology: Theory and Method, W. H. Freeman and Co., San Francisco.
- Burridge, R., 1976. Some Mathematical Topics in Seismology, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York.
- Červený, V., 1987. Ray Methods for Three-dimensional Seismic Modeling, The Norwegian Institute of Technology.
- Farra, V., Virieux, J. and Madariaga, R., 1989. Ray perturbation theory for interfaces, Geophys. J. Int., 99, 377-390.
- Figueiró, W. M., 1994. Tomografia de Reflexão no caso de Refletor Curvo: Tese de Doutorado, PPPG-UFBA, Salvador, Brasil.
- Figueiró, W. M. and Madariaga, R. I., 1998. Three-dimensional two-point paraxial ray tracing problem in the presence of caustics, paper submitted for publication to the GJI.
- Thomson, C. J. and Chapman, C. H., 1985. An introduction to Maslov's asymptotic method, Geophys. J. R. astr. Soc., 61, 729-746.





## qS-waves in a vicinity of the axis of symmetry of homogeneous transversely isotropic media.

Mikhail Popov, CPGG/UFBA, on leave from Academy of Sciences of Russia, Steklov Mathematical Institute,  
Gino F. Passos and Marco A. Barsotelli Botelho, CPGG/UFBA, Salvador, Brasil

### Abstract

We study propagation of the SV- and SH-waves, generated by a concentrated force in unbounded transversely isotropic (TI) homogeneous media, in the direction close to the axis of symmetry of the media. This problem is known in geophysics as the problem of kiss singularity. Our approach is based on numerical analysis of the high-frequency asymptotics of the SV- and SH-waves in TI media in a vicinity of the axis of symmetry, recently obtained by Popov (2001). These formulas provide smooth transition of the qS-wavefield from a vicinity of the axis, where ray method fails, to the ray formulas for the SV- and SH-waves, which are valid on some distance from the axis.

We present time-pulse propagation of the coupled SV- and SH-waves and their splitting with increasing of the distance to the symmetry axis. A distortion of the initial time-pulse is observed.

### Introduction

Wave propagation problems for homogeneous anisotropic media are considered as model problems, which enable one to gain an heuristic understanding of wave phenomena in general inhomogeneous anisotropic media, which are important in geophysics. These problems possess new features compared to similar problems in isotropic media and turn out to be more complicated from the mathematical point of view. The latter fact is likely to give rise to doubtful results in geophysical literature. If the velocities of qS-waves in an inhomogeneous anisotropic medium coincide at a point we can observe, basing on linear algebra considerations, that the respective eigenvalues and eigenvectors of the Christoffel tensor loose, in general, smoothness at this point. Therefore, we face a singularity problem in constructing of the successive terms of the ray series and that means, in fact, a failure of the ray method in a vicinity of such a point.

In homogeneous TI media the velocities of SV- and SH-waves coincide on the axis of symmetry and the corresponding slowness surfaces touch each other. The eigenvalues of the Christoffel tensor remain to be smooth but the respective polarization vectors are not continuous on the

axis. The second term of the ray series gets singularity precisely on the axis of symmetry.

Therefore, ray theory, at least in the traditional form, cannot describe correctly the high-frequency asymptotics of these waves in a vicinity of this axis. The high-frequency asymptotics of the SV- and SH-waves in a vicinity of the symmetry axis was derived from the exact solution of elastodynamic equations when the wave field is generated by a concentrated force, acting in orthogonal to the axis direction, see Popov (2001).

In this paper we present some results of propagation in time domain of these waves in a vicinity of the axis, which are based on the asymptotic formulas mentioned above.

The problem of kiss singularity was recently treated by Vavrycuk (1999). The paper is based on application of ray method in time domain and it makes an essential difference with our approach.

### Basic formulas

We consider a homogeneous TI medium with the axis of symmetry directed along  $x_3$ -axis of the global Cartesian coordinates  $x_1, x_2, x_3$ . The medium is characterized by the density  $\rho$  and traditional elastic parameters  $C_{jk}$ . The wave field is generated by a concentrated force located at the origin and acting along  $x_1$ -axis with time-pulse  $f(t)$ .

For an observation point we use the spherical coordinates  $s, \vartheta, \varphi$ :

$$x_1 = s \cdot \sin \vartheta \cos \varphi;$$

$$x_2 = s \cdot \sin \vartheta \sin \varphi;$$

$$x_3 = s \cdot \cos \vartheta$$

and the displacement vector  $\vec{U}(\vec{x}, t) = \vec{U}(s, \vartheta, \varphi; t)$  is referred to the basis vectors of the Cartesian coordinates.

In frequency domain the asymptotics of the displacement vector  $\vec{U}(s, \vartheta, \varphi; \omega)$ , which corresponds to the qS-waves, is obtained under the condition:

$$\theta \equiv \sqrt{\omega \cdot s} \cdot \sin \vartheta = 0(1),$$

$$as \quad \omega \cdot s \rightarrow \infty. \quad (1)$$

It has the form

$$\vec{U}(s, \vartheta, \varphi; \omega) = \vec{U}^{(SV)}(s, \vartheta, \varphi; \omega) + \vec{U}^{(SH)}(s, \vartheta, \varphi; \omega) \quad (2)$$

The contributions of SV and SH waves  $\vec{U}^{(SV)}$  and  $\vec{U}^{(SH)}$ , respectively, are described by the formulas

$$\vec{U}^{(SV)} = - \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi \\ \frac{1}{2} \sin 2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\exp\left\{i \left[ T(\omega, s, \vartheta) - \frac{1}{2\beta_2} \theta^2 \right]\right\}}{8\pi^2 \sqrt{\rho C_{44}} \beta_2 s} \quad (3)$$

$$+ \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{i \exp[iT(\omega, s, \vartheta)]}{8\pi^2 \sqrt{\rho C_{44}} \theta^2 s} \left[ \exp\left\{ \frac{-i\theta^2}{2\beta_2} \right\} - 1 \right]$$

and

$$\vec{U}^{(SH)} = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi \\ -\frac{1}{2} \sin 2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\exp\left\{i \left[ T(\omega, s, \vartheta) - \frac{1}{2\beta_3} \theta^2 \right]\right\}}{8\pi^2 C_{66} s} \quad (4)$$

$$- \begin{pmatrix} \cos 2\varphi \\ \sin 2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \frac{i \exp[iT(\omega, s, \vartheta)]}{8\pi^2 \sqrt{\rho C_{44}} \theta^2 s} \left[ \exp\left\{ \frac{-i}{2\beta_3} \theta^2 \right\} - 1 \right]$$

where

$$T = \left( \omega \cdot s - \frac{1}{2} \theta^2 \right) \sqrt{\frac{\rho}{C_{44}}}; \quad \beta_3 = -\frac{C_{66}}{\sqrt{\rho C_{44}}}; \quad (5)$$

$$\beta_2 = \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - C_{11}(C_{33} - C_{44})}{\sqrt{\rho C_{44}}(C_{33} - C_{44})}$$

Note, expressions (3) and (4) remain to be smooth functions of the coordinates of an observation point in a vicinity of the axis of symmetry including this axis, where  $\theta = 0$ . With increasing of  $\theta$  in eqs. (3) and (4) the first terms start to dominate and they match with the zero-order terms of the ray formulas for SV and SH waves, respectively.

But in the vicinity of the symmetry axis, described by the condition (1), both the first and the second items in eqs. (3) and (4) are of the same order and therefore have to be considered together.

To obtain the displacement vector  $\vec{U}(s, \vartheta, \varphi, t)$  in time domain we have to calculate the Fourier integral

$$\vec{U}(s, \vartheta, \varphi; t) = 2 \operatorname{Re}.$$

$$\int_0^\infty \exp(-i\omega \cdot t) \vec{U}(s, \vartheta, \varphi; \omega) f_F(\omega) d\omega \quad (6)$$

where  $f_F(\omega)$  is the spectrum of the time pulse  $f(t)$ .

## Numerical results

For numerical experiments we take time-pulse:

$$f(t) = 4\alpha \cdot t \cdot e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)$$

for  $t \geq 0$  and  $f(t) \equiv 0$  if  $t < 0$ , with the dominant frequency  $\omega_0 = 2\pi \cdot 10\text{Hz}$  and the damp parameter  $\alpha = 30$ . It resembles typical time signals in geophysics and the contribution of low frequencies to the Fourier integral (6) remains to be relatively small. Note, if we use a high-frequency asymptotics of the displacement vector in the Fourier integral (6), small frequencies give rise to a systematical error for the wave field  $\vec{U}(\vec{x}, t)$  in time-domain.

On the distance  $s = 500\text{m}$  from the source to an observation point we get  $\omega_0 s = \pi \cdot 10^4$  (m/sec) so that the asymptotic condition  $\omega s \rightarrow \infty$  is well fulfilled on the spectral width of the time pulse.

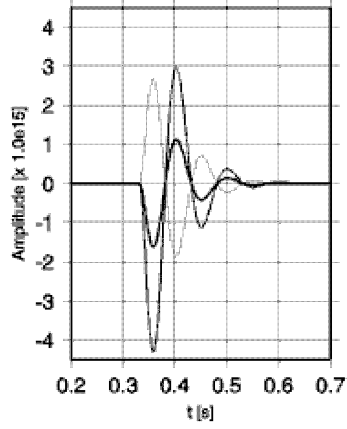
In the first model of TI medium we use the following values of the elastic parameters  $C_{11} = 2,547$ ,  $C_{22} = C_{11}$ ;  $C_{13} = 1,397$ ;  $C_{33} = 1,839$ ;  $C_{44} = 0,555$ ;  $C_{55} = C_{44}$ ;  $C_{66} = 0,672$ ; all values are in MKS system ( $10^{10}\text{N/m}^2$ ); and density  $\rho = 2440$  ( $\text{Kg/m}^3$ ) (Faria and Stoffa, 1994).

In this case the curvatures of the SV and SH slowness surfaces at the kiss points have opposite signs.

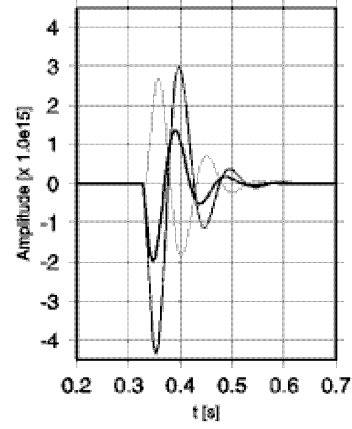
In the second model of TI medium we change only value of  $C_{13}$  and put  $C_{13} = 1,197$  in order to have the same sign for the curvatures of the slowness surfaces at the kiss points.

The vicinity of the axis of symmetry, where ray formulas fail, is described by the parameter  $\theta = \sqrt{\omega s} \sin \vartheta$ . In our computations it varies from  $\theta = 0$  exactly on the symmetry axis to  $\theta = 44$  where the splitting of SV and SH waves can be observed on graphs.

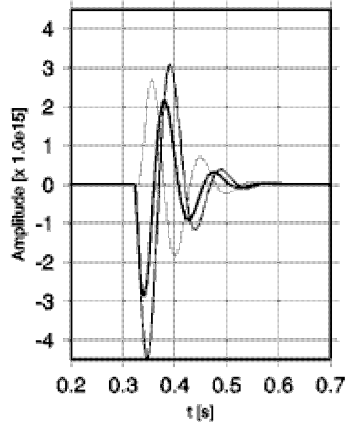
The results of computations are presented on figures from (a) to (g). The bold line corresponds



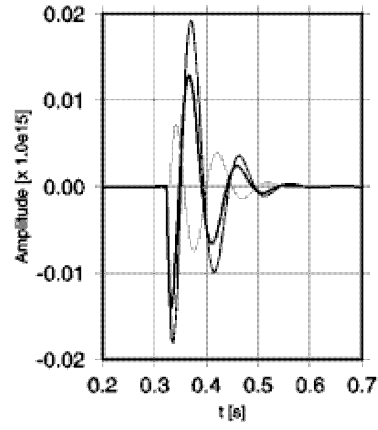
(a)



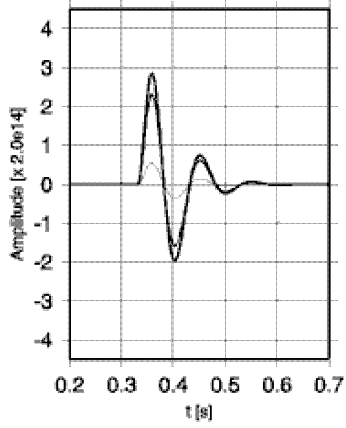
(b)



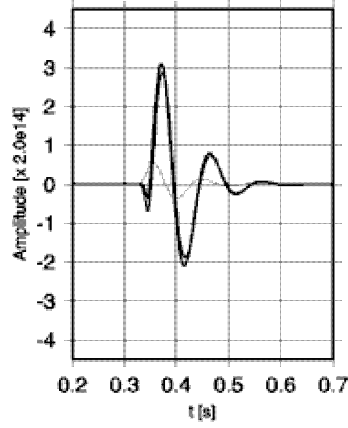
(c)



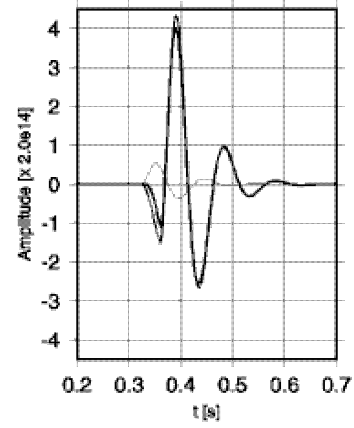
(d)



(e)



(f)



(g)

to the total displacement vector  $\vec{U}(\vec{x}, t)$ , the intermediate and thin lines correspond to  $\vec{U}^{(SV)}(\vec{x}, t)$  and  $\vec{U}^{(SH)}(\vec{x}, t)$ , respectively. For the observation points the distance  $s$  and azimuth angle  $\varphi$  are fixed,  $s = 500\text{m}$  and  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , while the angle  $\vartheta$  varies, starting from  $\vartheta = 0$ .

Figs. (a), (b), (c) exhibit evolution of  $U_1$  coordinate of the displacement vector with increasing of angle  $\vartheta$  for  $\vartheta = 0^\circ$ ,  $\vartheta = 6^\circ$  and  $\vartheta = 9^\circ$ , respectively, for the first model of TI medium. In the vicinity of the axis of symmetry  $U_2$  coordinate remains to be about 100 times less in magnitude and it is depicted on figure (d). In this case we can observe the splitting of SV and SH waves at  $\vartheta = 9^\circ$ .

Figs. (e) – (g) correspond to the second model of TI medium and demonstrates  $U_1$  coordinates of the displacement vector for  $\theta = 0^\circ$ ,  $\theta = 9^\circ$  and  $\theta = 15^\circ$ , respectively. Coordinate  $U_2$  remains to be very small and is not presented in this case. The splitting of SV and SH waves turns out to be slower for that medium and is not observed on the graphs even for  $\theta = 15^\circ$ .

## Conclusion

The numerical experiments prove that our approach, based on the asymptotics of the displacement vector in frequency domain, can be successfully used for describing the kiss singularity in TI media in time-domain. We observe that the displacement vector preserves essentially the direction of the external force in a vicinity of the symmetry axis. Precisely on the axis  $\theta = 0$  there is no distortion of the time-pulse shape, but with increasing of the distance to the axis we observe the distortion even when the splitting of the SV and SH waves is very small.

## Acknowledgements

The first author is thankful to CNPq for the financial support for this research (grant n<sup>o</sup> 300603/94-0).

## References

M.M. Popov (2001), Asymptotics of the wave field in a vicinity of the axis of symmetry of a transversely isotropic homogeneous medium. Proceedings of scientific seminars of V.A. Steklov Math. Inst. of Russian Academy of Sciences, v. 275, (in Russian,

English translation to appear in J. of Mathematical Sciences).

E.L. Faria, and L. Stoffa, (1994), Finite-difference modeling in transversely isotropic media, Geophysics, v. 59, n<sup>o</sup> 2, p. 282-289.

V. Vavrycuk (1999), Properties of S waves near a kiss singularity: a comparison of exact and ray solutions, Geophys. J. Int., v. 138, p. 581-589.



# Ray methods in the modelling of seismic wave fields

Ivan Pšenčík \*, Petr Bulant \*\*, Vlastislav Červený \*\* and Luděk Klimeš \*\*

*\*) Academy of Sciences, Boční II, Praha 4, Czech Republic, e-mail: ip@ig.cas.cz*

*\*\*\*) Charles University, Faculty of Math. and Physics, Dept. of Geophysics, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2, Czech Republic, e-mail: bulant@seis.karlov.mff.cuni.cz, vcervený@seis.karlov.mff.cuni.cz, klimes@seis.karlov.mff.cuni.cz*

## Abstract

Seismic ray method has broad applications in the numerical modelling of seismic wave fields and in the solution of forward and inverse problems of seismology and seismic exploration for oil. This contribution outlines basic features of the seismic ray method, and reviews its possibilities. It also shows which areas of the seismic ray method are still open for further research.

## Introduction

The seismic ray method is based on the asymptotic high-frequency solution of the elastodynamic equation. It consists in the decomposition of the wavefield into independent contributions called elementary waves, which propagate along rays. These waves may be various seismic body waves propagating in isotropic or anisotropic inhomogeneous, layered and block structures (direct, multiply reflected/transmitted, etc.). Great advantage of the ray method is that individual elementary waves can be treated independently.

Individual elementary waves are described by their travel times and vectorial amplitudes. They can be obtained from the eikonal equation and the transport equation. The eikonal equation can be solved using rays. The rays are characteristics of the eikonal equation, and can be determined by solving ray tracing system (a system of ordinary differential equations for the characteristics). As soon as the rays are known, the travel times can be calculated along them. They are called the ray theory travel times in order to distinguish them from the first-arrival travel times. The transport equation can be then solved along a ray; the amplitude can be expressed analytically in terms of the geometrical spreading. The geometrical spreading can be determined along a ray using the dynamic ray tracing. The dynamic ray tracing is a very powerful procedure; it can be used to determine travel times and other relevant quantities not only along a ray, but also in its vicinity. We then speak of paraxial ray methods, paraxial rays, paraxial travel times, etc. As soon as travel times and ray amplitudes are known, calculation of the Green function, elementary seismograms and particle ground motions of the elementary wave under consideration is straightforward.

For finite frequencies, the ray method is only

approximate. Its accuracy, however, is sufficient to solve many important 3-D wave propagation problems which can be hardly treated by any other means. Various extensions of the ray method, which increase its accuracy or can be applied in situations where the standard ray method is not applicable, have been proposed. Most of them use rays as a framework.

The ray method can be applied to isotropic, anisotropic and weakly anisotropic 3-D structures, with arbitrary 3-D variations of elastic moduli and density, with curved interfaces, for arbitrary source-receiver configurations, and for very general types of seismic body waves.

For more information on the seismic ray method and for additional references, see the www pages of the Consortium Project “Seismic Waves in Complex 3-D Structures” (<http://seis.karlov.mff.cuni.cz/consort/main.htm>) and, e.g., Červený, Molotkov and Pšenčík (1977), Červený (2001), Chapman (2001).

## Seismic rays and travel times

Initial value ray tracing, in which an initial point and an initial direction of a ray are specified, is now a well-understood problem in any type of media. The rays are mostly determined numerically, by solving the ray tracing system. The solution of a boundary-value ray tracing problem, for example of a two-point ray tracing problem, is more complicated, particularly in 3-D. For simplicity, we shall consider only the two-point ray tracing problem, in which the ray passing through two specified points is sought. The methods to solve this problem can be divided into two groups: the bending methods and the shooting methods:

a) In the bending methods, the initial ray path is guessed and then perturbed iteratively so as to find the relevant two-point ray. Let us mention here methods based on the fitting ray equations, methods based on the paraxial ray approximation, methods based on minimizing travel time (also called the pseudobending methods), and methods based on the structural perturbation. The disadvantage of the bending methods is that they can miss certain rays and corresponding travel times, particularly in the case of multipathing. Only one of several arrivals of an elementary wave is usually obtained, others are lost.

“Transition Zone (TZ) Seismic Acquisition, Opening New Frontiers Along Brazilian Coastlines”

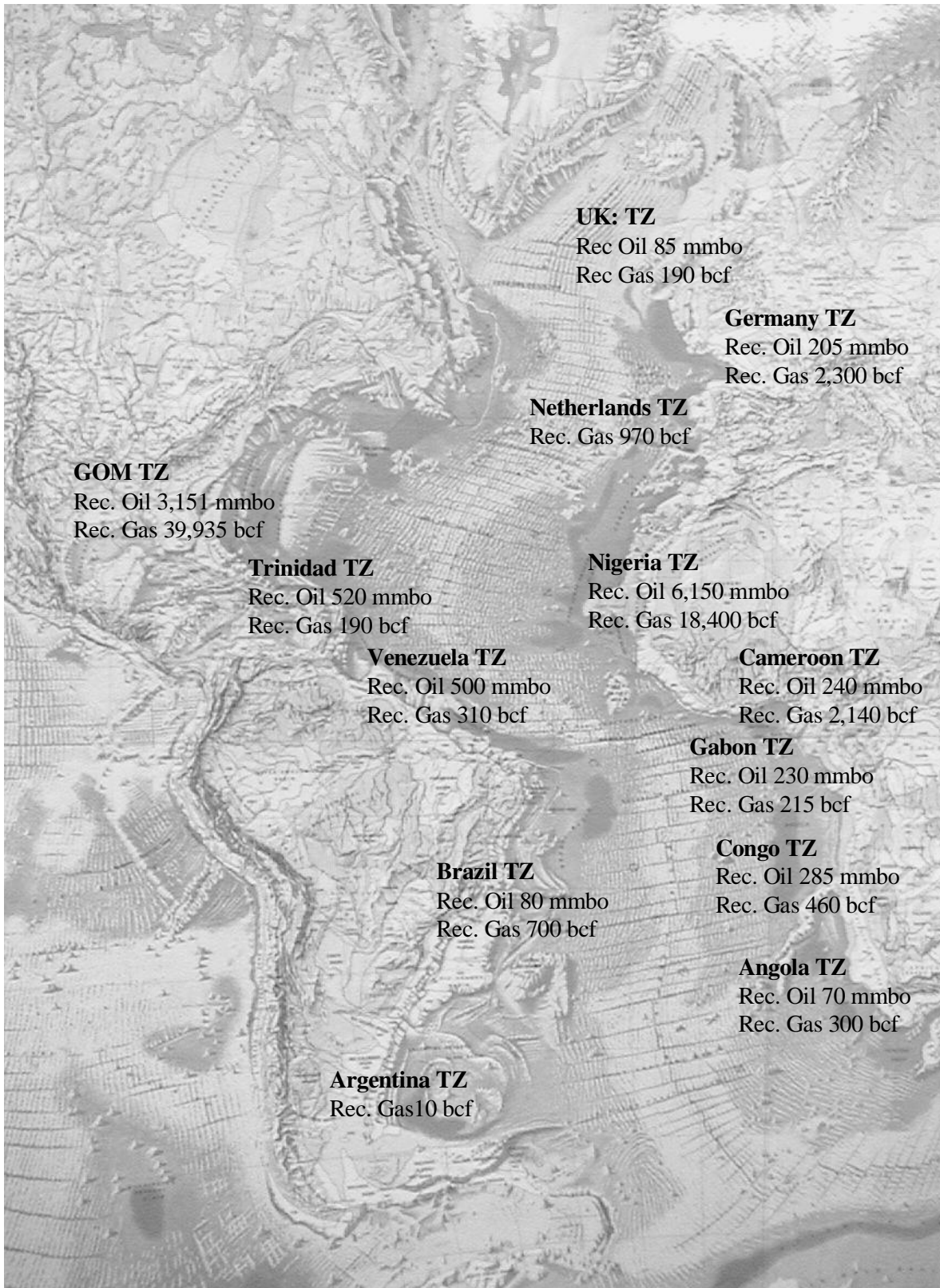


Figure 2: Recovered volumes of oil and gas from sedimentary basins around the Atlantic Ocean margin (After PetroConsultants 1996).

ing. 6) Computation of the KMAH index. 7) Two-point ray tracing. Boundary value problems for a ray. 8) Investigation of reciprocity relations along a ray. 9) Investigation of chaotic behaviour of rays. Computation of Lyapunov exponents. 10) Determination of the geometrical spreading from travel time measurements. 11) Computation of Gaussian beams and Gaussian wave packets. 12) Maslov-Chapman theory. 13) Applications in the ray perturbation theory (Farra, 1999). 14) Applications in migration methods. Computation of Beylkin determinant. 15) Various extensions of the ray method.

## Amplitudes. Green function

As soon as ray tracing and dynamic ray tracing is performed, the computation of ray amplitudes and thus of the Green function along the ray is easy. In addition, it is only necessary to determine the R/T coefficients at points at which rays interact with structural interfaces. At present, quite general algorithms and relevant computer packages for computation of ray amplitudes of arbitrary elementary waves are available. Knowing the ray amplitude and travel time, we can determine elementary ray synthetic seismograms and particle motions. By summation of elementary ray synthetic seismograms over all rays passing through a receiver, we obtain the final ray synthetic seismogram, ray-theory Green function, and ray-theory particle motion.

## Extensions of the ray method

Ray method is only approximate, it does not give exact results, and completely fails in certain situations. Many extensions of the ray method have been proposed to increase its validity. We shall briefly comment several of them.

**Coupling ray theory. Quasi-isotropic ray theory:** In inhomogeneous weakly anisotropic media, the two quasishear waves do not propagate independently, they are coupled (Pšeničik 1998). Neither the ray method for inhomogeneous isotropic media nor for anisotropic media can describe the coupling properly. Coupling ray theory, in which the asymptotic solution is sought for coupled waves together (not for independent elementary waves like in the standard ray methods) has to be used. Fig. 3 shows comparison of seismograms calculated by the quasi-isotropic approach and the reflectivity method.

**Summation of Gaussian beams or Gaussian wave packets:** For a selected ray, there is a six-parametric system of Gaussian beams and twelve-parametric system of Gaussian wave packets, connected with each ray (Červený, 2001). Individual Gaussian beams (or Gaussian wave packets) in these systems differ by width, shape, and other properties. The summation of Gaussian beams (or

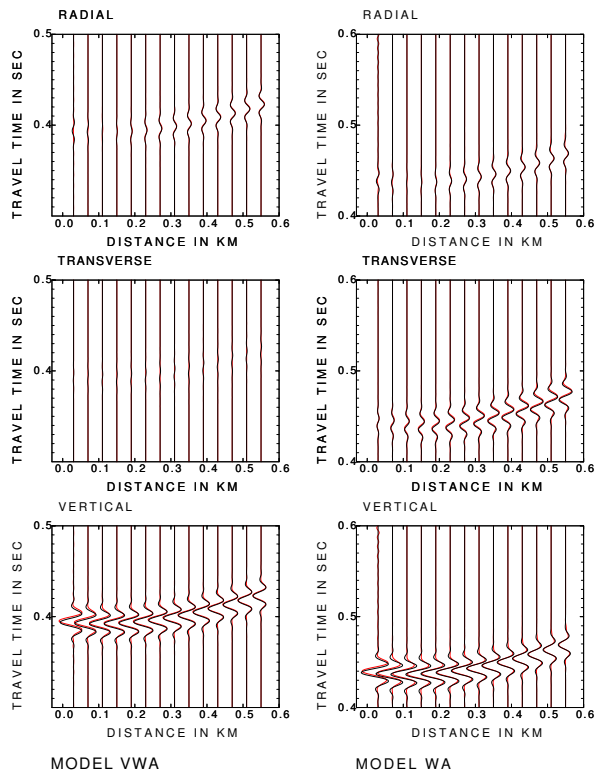


Figure 3: Synthetic seismograms calculated by the quasi-isotropic approach (black) and the reflectivity method (red) for inhomogeneous, nearly isotropic (VWA) and weakly anisotropic (WA) models.

of Gaussian wave packets) passing in a neighbourhood of a receiver removes certain singularities of the ray method (caustics, critical regions, etc.) and removes necessity to perform two-point ray tracing. However, the problem of the choice of the parameters of Gaussian beams (or Gaussian wave packets) in the summation is open for further research.

**Maslov-Chapman theory:** The Maslov-Chapman method also consists in the summation over rays, but of infinitely broad beams. Particularly useful are time-domain versions of the Maslov-Chapman integrals. Some problems in the computation are caused by the so-called pseudocaustic points. A complex version of the Maslov-Chapman method (Klimeš, 1984) or the coherent state transform method (Thomson, 2001) remove these problems. The theory is open for further research.

**Ray method with a complex eikonal:** The application of complex rays and complex travel times in the numerical modelling of seismic wavefields would be very powerful, particularly in dissipative media. Unfortunately, complex rays have not yet been used in routine computations. In weakly dissipative media they are approximated using the ray perturbation method. This is the most important area of the seismic ray theory open for



further research. See Thomson (1997).

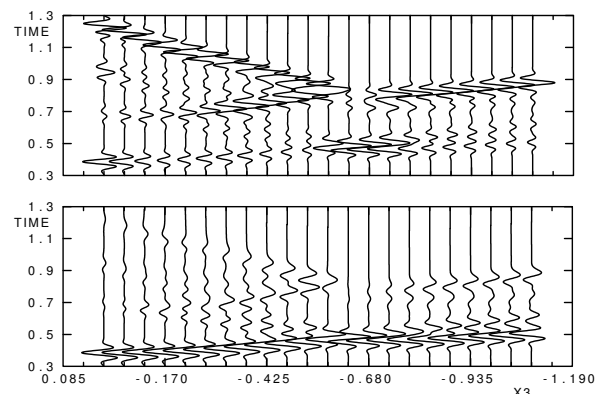


Figure 4: Trace-normalized ray-theory seismograms without attenuation (top) and with causal attenuation (bottom). The complex-valued rays are approximated using the ray perturbation method.

**Hybrid methods:** In hybrid methods, the seismic ray method is locally combined with some other method. Most prospective are the hybrid ray-FD method, hybrid ray-mode method and the hybrid ray-matrix method (also called the hybrid ray-reflectivity method). Only the hybrid ray-matrix method has been implemented into routine ray-based computer codes. It can be used to compute the high-frequency waves propagating in a layered (or block) model, in which individual layers (or blocks) are mutually separated by thin transition layers. Further research would be very useful.

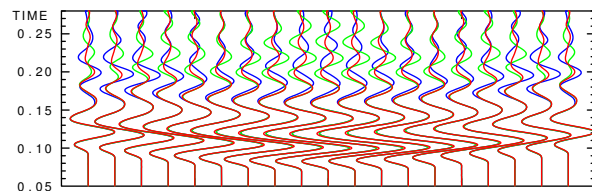


Figure 5: Vertical component of synthetic seismograms at the top of a sedimentary layer. Red: elastic seismograms calculated by the ray-matrix method are quite accurate in this case. The standard ray method would yield only the onset of the wave-train. Green and blue: finite-difference elastic seismograms are deteriorated by reflections due to imperfect non-reflecting boundary conditions.

**Other extensions:** There are many other useful extensions of the ray method, and many other applications of ray approaches in more sophisticated methods. Let us mention several of them: space-time ray method (Babich, Buldyrev and Molotkov, 1985), surface wave ray tracing, asymptotic diffraction theory, including geometric theory of diffraction (Hanyga, 1995), ray methods in directional (one-way) propagation, ray methods in scattering of seismic waves (Ursin and Tygel,

1997), asymptotic version of Kirchhoff integrals (Tygel, Schleicher and Hubral, 1994), ray methods for random media, for poroelastic solids, for Biot media, etc. These extensions require still a further research.

## References

- Babich, V.M., Buldyrev, V.S., and Molotkov, I.A. (1985). *Space-time ray method. Linear and non-linear waves* (in Russian). Leningrad: Leningrad Univ. Press.
- Bulant, P. (1996). Two-point ray tracing in 3-D. *Pure and appl. Geophys.* **148**, 421–447.
- Bulant, P., and Klimeš, L. (1999). Interpolation of ray theory travel-times within ray cells. *Geophys. J. Int.* **139**, 273–282.
- Červený, V. (2001). *Seismic ray theory*. New York: Cambridge Univ. Press.
- Červený, V., Molotkov, I.A., and Pšenčík, I. (1977). *Ray method in seismology*. Praha: Karlova Univerzita.
- Chapman, C.H. (2001). Seismic ray theory. In *Handbook of earthquake and engineering seismology*, eds. W.H.K. Lee, H. Kanamori, and P.C. Jennings. New York: Academic Press, in press.
- Farra, V. (1999). Computation of second-order traveltimes perturbation by Hamiltonian ray theory. *Geophys. J. Int.*, **136**, 205–217.
- Hanyga, A. (1995). Asymptotic edge-and-vertex diffraction theory. *Geophys. J. Int.* **123**, 277–290.
- Klimeš, L. (1984). The relation between Gaussian beams and Maslov asymptotic theory. *Stud. Geoph. et Geod.*, **28**, 237–247.
- Pšenčík, I. (1998). Green's functions for inhomogeneous weakly anisotropic media. *Geophys. J. Int.* **135**, 279–288.
- Thomson, C.J. (1997). Complex rays and wave packets for decaying signals in inhomogeneous, isotropic and anisotropic, media. *Studia Geoph. et Geod.* **41**, 345–381.
- Thomson, C.J. (2001). Seismic coherent states and ray geometrical spreading. *Geophys. J. Int.*, **144**, 320–342.
- Tygel, M., Schleicher, J., and Hubral, P. (1994). Kirchhoff-Helmholtz theory in modelling and migration. *J. Seis. Exploration* **3**, 203–211.
- Ursin, B., and Tygel, M. (1997). Reciprocal volume and surface scattering integrals for anisotropic elastic media. *Wave Motion* **26**, 31–42.
- Vinje, V., Iversen, E., and Gjøystdal, H. (1996). Estimation of multivalued arrivals in 3D models using wavefront construction. Part I. *Geophys. Prospecting* **44**, 819–842; Part II. Tracing and interpolation. *Geophys. Prospecting* **44**, 843–858.



## Ray systems for propagation of seismic isochrons. Part I: Isochron rays.

Einar Iversen, NOR SAR, Norway.

### Abstract

A new approach is presented for generation of isochrons, where propagation of such surfaces is described in terms of ordinary differential equations. The trajectories subjected to integration are called *isochron rays*. As opposed to interpolation based on traveltimes tables, multipathing is handled without difficulty. The theory pertains to 3D inhomogeneous anisotropic media. Among the potential applications are prestack map migration of traveltimes events and Fresnel volume generation, as well as visualization of the geometric effects in prestack depth migration. Numerical examples are included for related isotropic and anisotropic 2D models.

### Introduction

A *seismic isochron* is a surface of potential scattering points obeying that the total traveltimes from a shot to a receiver via any point on the surface is constant. The isochron is a key concept in many aspects of seismic modelling, inversion, and data processing.

In prestack depth migration (PSDM) the isochron concept is commonly used in an implicit way, where local information about isochron elements is retrieved from Green's functions for the shot and receiver, tabulated on rectangular or cubic grids. Another technique utilizing isochrons is prestack map migration (PSMM), where the objective is to obtain reflection points from the knowledge of observed traveltimes and corresponding slopes (Gray and Golden, 1983; Iversen and Gjøystdal, 1996). PSMM gives a visualization of the geometric effects in PSDM, to a low cost. Isochrons also have importance in methods for estimation of parameters constituting a seismic velocity model. A perturbation of a model parameter will lead to a corresponding change in the position and shape of an isochron. Furthermore, techniques for understanding and improving the resolution of seismic imaging have been exposed to increased focus in the latest years. In this respect, construction and analysis of Fresnel zones and Fresnel volumes (Cerveny and Soares, 1992) are essential.

A main objective of the current work has been to establish ray systems capable of propagating isochrons in a similar way as wavefronts are propagated by conventional rays. The theory is presented in two separate papers. Part I considers the case when the velocity model is fixed. In part II the velocity model is allowed to vary continuously, for fixed isochron times.

### Theory

A complete scattered ray connecting a shot and a receiver can be divided in two portions, the shot and receiver ray. The parameter vectors describing the takeoff of such rays from the shot and receiver are denoted  $\gamma_s = (\gamma_{1s}, \gamma_{2s})^T$  and

$\gamma_r = (\gamma_{1r}, \gamma_{2r})^T$ , where superscript T means vector transposition. The ray parameters may typically be components of the initial slowness vector, or takeoff angles. Furthermore, I consider a position  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ , situated on an isochron at time T. The position  $\mathbf{x}$  is then equivalently described by the extended ray parameter vectors

$$\hat{\gamma}_s = \begin{bmatrix} \gamma_{1s} \\ \gamma_{2s} \\ T_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_s \\ T_s \end{bmatrix}, \quad \hat{\gamma}_r = \begin{bmatrix} \gamma_{1r} \\ \gamma_{2r} \\ T_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_r \\ T_r \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Here,  $T_s$  and  $T_r$  denote the shot and receiver ray traveltimes, which must fulfil  $T = T_s + T_r$ . At the common end point  $\mathbf{x}$  of the shot and receiver ray I shall need the slowness vectors  $\mathbf{p}_s$  and  $\mathbf{p}_r$ , as well as the corresponding group velocity vectors  $\mathbf{V}_s$  and  $\mathbf{V}_r$ . The *isochron slowness vector* is then simply  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_r$ .

Moreover, conventional dynamic ray tracing (Cerveny, 1985,1995) yields 3 x 3 matrices of geometrical spreading related to the shot and receiver ray, denoted  $\hat{\mathbf{Q}}_s$  and  $\hat{\mathbf{Q}}_r$ ,

$$\hat{\mathbf{Q}}_s \equiv \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \hat{\gamma}_s^T}, \quad \hat{\mathbf{Q}}_r \equiv \frac{\partial \mathbf{x}_r}{\partial \hat{\gamma}_r^T}, \quad (2)$$

and corresponding 'slowness spreading' matrices

$$\hat{\mathbf{P}}_s \equiv \frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial \hat{\gamma}_s^T}, \quad \hat{\mathbf{P}}_r \equiv \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial \hat{\gamma}_r^T}. \quad (3)$$

Provided that the position  $\mathbf{x}$  is not situated in a caustic of the shot or receiver ray field, the knowledge of the matrices in (2)-(3) enables us to obtain 3 x 3 matrices of second derivative of traveltimes,

$$\hat{\mathbf{M}}_s = \hat{\mathbf{P}}_s \hat{\mathbf{Q}}_s^{-1}, \quad \hat{\mathbf{M}}_r = \hat{\mathbf{P}}_r \hat{\mathbf{Q}}_r^{-1}. \quad (4)$$

The corresponding matrix of second derivatives of isochron time is

$$\hat{\mathbf{M}} = \hat{\mathbf{M}}_s + \hat{\mathbf{M}}_r. \quad (5)$$

An isochron at time T shall be represented in a similar way as a conventional wavefront, i.e., by two parameters  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)^T$ , so that the isochron position  $\mathbf{x}$  and slowness  $\mathbf{p}$  are uniquely determined by  $(\gamma, T)$ . In this framework, a definition of an *isochron ray* as a trajectory for which  $\gamma$  is constant follows naturally. The resulting functional relationships  $\mathbf{x}(\gamma, T)$  and  $\mathbf{p}(\gamma, T)$  are approximated to the first order by

$$\delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma^T} \delta \gamma + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial T} \delta T, \quad (6)$$

$$\delta \mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \gamma^T} \delta \gamma + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial T} \delta T. \quad (7)$$

Analogously to a conventional wavefront the *isochron phase velocity* is defined by  $v \equiv \|\mathbf{p}\|^{-1}$ . Moreover,  $\mathbf{V} \equiv \partial \mathbf{x} / \partial T$  can be interpreted as an *isochron group velocity vector*, pointing in

## Isochron rays

the direction of the isochron ray. The direction and modulus of  $\mathbf{V}$  depend on the choice of representation for  $\gamma$ . The vector  $\boldsymbol{\eta} \equiv \partial \mathbf{p} / \partial T$  has a corresponding meaning for an isochron as for a conventional wavefront.

As shown by Iversen (1996, 2001) it can be fruitful to represent an isochron by the parameters  $\gamma = \gamma_s$  of the shot ray field,  $\gamma = \gamma_r$  of the receiver ray field, or a combination of the two. Such representations are of importance in map migration of prestack traveltimes events corresponding to a common receiver gather, shot gather, and offset gather of seismic traces, respectively. In the shot and receiver ray representations the isochron group velocity vector becomes

$$\mathbf{V}^{(\gamma_s)} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}_s}, \quad \mathbf{V}^{(\gamma_r)} = \frac{\mathbf{V}_r}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}_r}. \quad (8)$$

Furthermore, in the *combined ray field approach* a perturbation in  $\gamma = \gamma_{sr}$  is required to satisfy

$$\delta \gamma_{sr} = \mathbf{S} \delta \gamma_s + \mathbf{R} \delta \gamma_r; \quad (9)$$

$$\mathbf{S} \equiv \frac{\partial \gamma_{sr}}{\partial \gamma_s^T}, \quad \mathbf{R} \equiv \frac{\partial \gamma_{sr}}{\partial \gamma_r^T}. \quad (10)$$

A local coordinate system, the so-called *tangent plane system*, is established at a certain isochron position, say  $\mathbf{x}_0$ . The local coordinate vector is denoted

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{z} \\ z_3 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

The coordinate axes  $z_1$  and  $z_2$  form a tangent plane to the considered isochron through  $\mathbf{x}_0$ , and the transformation from local to global coordinates is

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \hat{\mathbf{Z}} \mathbf{z}. \quad (12)$$

It was shown by Iversen (1996, 2001) that tangential components of isochron group velocity are connected by

$$(\mathbf{W}_s + \mathbf{W}_r) \frac{\partial \bar{\mathbf{z}}^{(\gamma_{sr})}}{\partial T} = \mathbf{W}_s \frac{\partial \bar{\mathbf{z}}^{(\gamma_s)}}{\partial T} + \mathbf{W}_r \frac{\partial \bar{\mathbf{z}}^{(\gamma_r)}}{\partial T}; \quad (13)$$

$$\mathbf{W}_s = \mathbf{S} \mathbf{B}_s^{-1}, \quad \mathbf{W}_r = \mathbf{R} \mathbf{B}_r^{-1}. \quad (14)$$

The  $2 \times 2$  matrices  $\mathbf{B}_s$  and  $\mathbf{B}_r$  have a close connection to the  $3 \times 3$  geometrical spreading matrices  $\hat{\mathbf{Q}}_s$  and  $\hat{\mathbf{Q}}_r$  in (2). For transformation formulas, see Hubral et al. (1992).

To the first order, the normal component of group velocity is equal to the isochron phase velocity,

$$\frac{\partial z_3}{\partial T} = v, \quad (15)$$

i.e., the normal component is independent of the choice of representation. Transformation of the components in (13) and (15) to global coordinates, using (12), yields

$$\mathbf{V}^{(\gamma_{sr})} = \hat{\mathbf{Z}} \frac{\partial \bar{\mathbf{z}}^{(\gamma_{sr})}}{\partial T}. \quad (16)$$

Based on the first order theory above I construct a system of ordinary differential equations (ODEs) for isochron rays:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dT} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dT} = \hat{\mathbf{M}} \mathbf{V}, \quad (17)$$

$$\frac{d\hat{\gamma}_s}{dT} = \hat{\mathbf{Q}}_s^{-1} \mathbf{V}, \quad \frac{d\hat{\gamma}_r}{dT} = \hat{\mathbf{Q}}_r^{-1} \mathbf{V}. \quad (18)$$

The system consists of twelve equations in the case of general propagation in a 3D velocity model. When ray propagation is confined to a plane, the number of equations can be reduced to eight.

The basic primitive in numerical solution to ODE systems is a subroutine  $F(T, \mathbf{y}, d\mathbf{y}/dT)$  for evaluation of the right-hand side of the equations. On input, one provides the independent variable (here the isochron time  $T$ ) and the array of dependent variables, here  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{p}, \hat{\gamma}_s, \hat{\gamma}_r)$ . As output, the corresponding derivative  $d\mathbf{y}/dT$  is returned. For each call to  $F$  I re-trace the shot and receiver ray according to the input in  $\hat{\gamma}_s$  and  $\hat{\gamma}_r$ , using conventional kinematic and dynamic ray tracing. Thereby I obtain all the quantities  $\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_r, \hat{\mathbf{Q}}_s, \hat{\mathbf{Q}}_r, \hat{\mathbf{P}}_s, \hat{\mathbf{P}}_r$  needed to evaluate  $d\mathbf{y}/dT$ . It should be noted that the isochron ray system (17)-(18) has redundant information, so by reducing the number of equations the integration of ODEs can be done more efficient. On the other hand, redundancy can be valuable for error control.

In order to start numerical integration of (17)-(18) a shot/receiver ray pair must be known. Data for this pair can be obtained in various ways. One approach is to look up tabulated Green's function data for the shot and receiver ray fields at a grid point, eventually to perform interpolation based on such data. Another possibility is to obtain an initial ray pair by PSMM. Here, however, I consider initialization of  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{p}, \hat{\gamma}_s, \hat{\gamma}_r)$  either at the shot or at the receiver. Beforehand, conventional two-point ray tracing or wavefront construction is applied to obtain the possible realizations of the shot ray, traced versus the receiver, and vice versa. This gives a number of initial shot/receiver ray pairs where one of the rays is *degenerated* (see figure 1). The degenerated ray consists of just a single point where the ray parameters can be chosen freely. For an isochron ray starting at the receiver,  $\mathbf{x}$  is the receiver position,  $\gamma_s$  is the ray parameters of the initial shot ray, and  $T_s$  the traveltimes of this ray. For the degenerated receiver ray we specify two ray parameters  $\gamma_r$ . An initial slowness vector  $\mathbf{p}_r$  can then be established from the slowness surface at  $\mathbf{x}$ . In this context,  $\mathbf{p}_s$  denotes the slowness vector of the arriving shot ray at  $\mathbf{x}$ , so the initial isochron slowness is  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_r$ . Since  $T_r = 0$  at  $\mathbf{x}$  we have  $T = T_s$ .

It is important to note that the isochron time  $T$  is not always suited as the independent integration variable. During its prop-

## Isochron rays

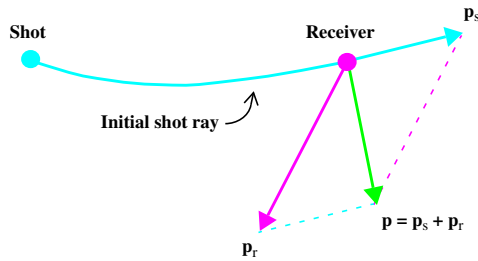


Figure 1. Initialization of an isochron ray at the receiver.

agation, isochron rays can become tangential to the ‘wavefront’, which means that the modulus of the group velocity vector blows to infinity. Therefore, I have also formulated a special version of (17)-(18) where  $T$  is a dependent variable and distance is the independent variable. After tracing a given distance the ray is divided in portions along which the isochron time varies monotonously, followed by resampling to the prescribed output times.

### Examples

The theory above has been formulated for isochron rays in 3D anisotropic media. Here I show examples for ray propagation confined to a plane, using the velocity parameterization for TI models introduced by Thomsen (1986). The required parameters for propagation of qP- and qSV-waves are the vertical P- and S-velocities  $v_P$  and  $v_S$ , as well as the dimensionless anisotropy parameters  $\epsilon$  and  $\delta$ . Isochron ray tracing is demonstrated in figure 3, for four related velocity models. Model A is homogeneous and isotropic with  $v_P = 2.5$  km/s,  $v_S = 1.0$  km/s. Model B is VTI with parameters  $\epsilon = 0.1$ ,  $\delta = -0.1$ ; see the corresponding phase velocity variation in figure 2a. The models A and B have the same isotropic component. In the models C and D the constant functions for  $v_P$  and  $v_S$  have been replaced by linearly increasing velocity with depth (figure 2b).

The isochron rays shown obey the PS ray code, where the shot and receiver ray propagate in qP and qSV mode, respectively. The isochrons are represented by the combined ray field approach, using horizontal midpoint slowness  $p_m$  as ray parameter. Each isochron was sampled with a constant increment 0.02 s/km in  $p_m$ . The propagation was continued from the degenerated situations until time 4.0 s. The isochron at time 3.0 s in model B was selected as a ‘source’ for later generation of velocity rays, see part II. Note especially the two triplication zones, where the isochron rays become strongly nonlinear. The triplication zones are clearly narrowed after the introduction of vertical velocity gradients (model D).

### Conclusions

A method is described for generation of isochrons and associated trajectories, called isochron rays. Multipathing comes naturally, similarly as in conventional ray tracing. Thereby, we

avoid the difficulty of identifying branches when shot and receiver ray data are pre-stored on a grid. Among the potential applications are map migration of traveltimes events and generation of Fresnel volumes. Furthermore, the isochron propagation technique is well suited for visualization of geometric effects in PSDM. An interesting future task could be to integrate the isochron propagation approach as an engine in PSDM, with the objective to improve handling of multipathing and image resolution.

### References

- Cerveny, V., and Soares, J.E.P., 1992. Fresnel volume ray tracing. *Geophysics*, **57**, 902-915.
- Cerveny, V., 1985. The application of ray tracing to numerical modeling of seismic wavefields in complex structures, *Seismic Shear Waves, Part A: Theory* (ed. Dohr, G.), Geophysical Press, London, 1-124.
- Cerveny, V., 1995. *Seismic wave fields in three-dimensional isotropic and anisotropic structures*. Lecture notes, University of Trondheim, Norway.
- Gray, W.C. and Golden, J.E., 1983. Velocity Determination in a Complex Earth. *SEG 53rd Annual Meeting*, Expanded Abstracts, 577-579.
- Hubral, P., Schleicher, J., and Tygel, M., 1992. Three-dimensional paraxial ray properties, Part I: Basic relations. *Journal of Seismic Exploration*, **1**, 265-279.
- Iversen, E., 1996. Derivatives of reflection point coordinates with respect to model parameters. *Pure and Applied Geophysics*, **148**, Nos. 1/2, 287-317.
- Iversen, E., and Gjøystdal, H., 1996. Event-oriented velocity estimation based on prestack data in time or depth domain. *Geophysical Prospecting*, **44**, 643-686.
- Iversen, E., 2001. First order perturbation theory for seismic isochrons. Submitted to *Studia geophysica et geodaetica*, February 2001.
- Thomsen, L., 1986. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, **51**, 1954-1966.

## Isochron rays

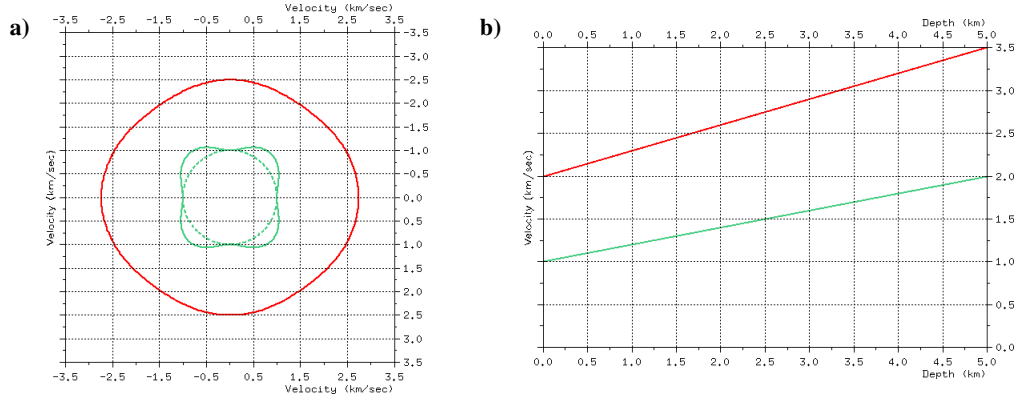


Figure 2. Inhomogeneous VTI model. a) Phase velocities of the qP-mode (red), the qSV-mode (solid green), and SH (dashed green) at zero depth. b) Vertical P-velocity (red) and S-velocity (green) as functions of depth.

## PS isochron rays

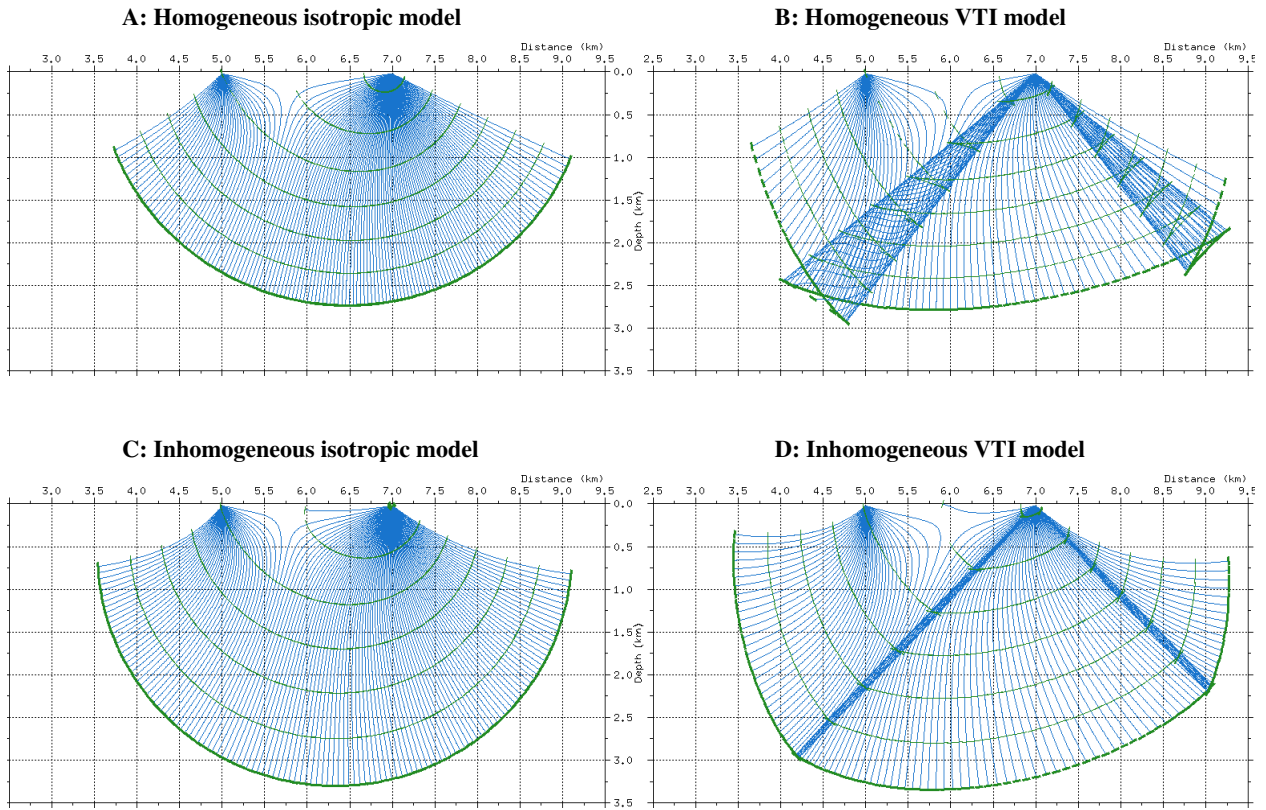


Figure 3. PS isochron rays for offset 2.0 km in four velocity models, propagated from degeneration to 4.0 s. The combined ray field representation was used, with horizontal midpoint slowness  $p_m$  as ray parameter. Rays in all plots correspond to the same regular sampling in  $p_m$ , with increment 0.02 s/km. The increment between isochrons is 0.5 s.



## Ray systems for propagation of seismic isochrons. Part II: Velocity rays.

Einar Iversen, NOR SAR, Norway.

### Abstract

A system of ordinary differential equations is obtained for numerical integration of velocity rays in 3D inhomogeneous anisotropic media. The velocity ray field describes the changes in isochron positions and slowness vectors when a model parameter is allowed to vary. Generation of accurate velocity rays has a potential in sensitivity studies, velocity model updating, and in propagation of Fresnel volume boundaries and seismic depth images.

### Introduction

Perturbation of a parameter of the velocity model will lead to a corresponding change in positions and slowness vectors of an isochron. The isochron positions then propagate along trajectories where the model parameter serve as an independent variable. In compliance with the work of Adler et al. (1997) I refer to such trajectories *velocity rays*. Following Hubral et al., 1996, the associated surfaces of constant model parameters are called *image wavefronts*.

Furthermore, in two papers by Iversen (1996, 2001) first order approximations to velocity rays were established for isotropic and anisotropic velocity models, respectively. Several comparisons of approximate and exact velocity rays indicated that the first order approach was, with some exceptions, sufficiently accurate for practical applications. First order theory has been successfully applied recently in estimation of anisotropic model parameters (Iversen et al., 2000) and for propagation of seismic depth images (Adler, 2000). However, in some situations exact velocity rays show a strongly nonlinear behavior, which may lead to problems in applications using a first order approach. With this as a start point an objective of the current work was to establish a method for accurate numerical calculation of velocity rays.

### Theory

When a parameter  $m_k$  of the velocity model is perturbed, an isochron position  $\mathbf{x}$  and the associated slowness vector  $\mathbf{p}$  will be perturbed accordingly. Model parameters considered for perturbation shall be collected in a vector  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_K)^T$  ( $T$  means vector transpose), and  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{p}$  are expressed as functions

$$\mathbf{x}(\gamma, T, \mathbf{m}), \quad \mathbf{p}(\gamma, T, \mathbf{m}). \quad (1)$$

As in part I, presented as a separate paper, the entire ray from shot to receiver is divided into a shot and receiver ray with extended ray parameter vectors  $\hat{\gamma}_s$  and  $\hat{\gamma}_r$ . Furthermore, I need access to slowness vectors, geometrical spreading matrices, and slowness spreading matrices;

$$\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_r, \hat{\mathbf{Q}}_s, \hat{\mathbf{Q}}_r, \hat{\mathbf{P}}_s, \hat{\mathbf{P}}_r. \quad (2)$$

These quantities are standard output from conventional kinematic and dynamic ray tracing.

When model parameters are allowed to vary, the end point and corresponding slowness vector of the shot and receiver ray can be stated as functions

$$\mathbf{x}_s(\gamma_s, T_s, \mathbf{m}), \quad \mathbf{x}_r(\gamma_r, T_r, \mathbf{m}), \quad (3)$$

$$\mathbf{p}_s(\gamma_s, T_s, \mathbf{m}), \quad \mathbf{p}_r(\gamma_r, T_r, \mathbf{m}). \quad (4)$$

Following Iversen (1996, 2001), first order perturbations in isochron position and slowness can be expressed conveniently in terms of derivatives corresponding to independent perturbation of the shot and receiver ray;

$$\mathbf{U}_s \equiv \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial m_k}, \quad \mathbf{U}_r \equiv \frac{\partial \mathbf{x}_r}{\partial m_k}, \quad (5)$$

$$\Omega_s \equiv \frac{\partial \mathbf{p}_s}{\partial m_k}, \quad \Omega_r \equiv \frac{\partial \mathbf{p}_r}{\partial m_k}. \quad (6)$$

Such derivatives are natural output when applying ray perturbation theory (Farra and Madariaga, 1987; Farra and Le Bégat, 1995) along the two rays. Note that the differentiation corresponds to fixed ray parameter vectors  $\gamma_s, \gamma_r$ , as well as fixed traveltimes  $T_s, T_r$ . Alternatively, if the common ray end point  $\mathbf{x}$  is kept fixed during the model perturbation, perturbations will be imposed on  $\gamma_s, \gamma_r, T_s$ , and  $T_r$ . We can then obtain so-called fixed point derivatives;

$$\frac{\partial T_s^{(x)}}{\partial m_k} = -\mathbf{p}_s \cdot \mathbf{U}_s, \quad \frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial m_k} = -\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{U}_r, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_s^{(x)}}{\partial m_k} = \Omega_s - \hat{\mathbf{M}}_s \mathbf{U}_s, \quad \frac{\partial \mathbf{p}_r^{(x)}}{\partial m_k} = \Omega_r - \hat{\mathbf{M}}_r \mathbf{U}_r. \quad (8)$$

Since  $T = T_s + T_r$  and  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_r$ , the fixed point derivatives for the isochron time and slowness become

$$\frac{\partial T^{(x)}}{\partial m_k} = \frac{\partial T_s^{(x)}}{\partial m_k} + \frac{\partial T_r^{(x)}}{\partial m_k}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}^{(x)}}{\partial m_k} = \frac{\partial \mathbf{p}_s^{(x)}}{\partial m_k} + \frac{\partial \mathbf{p}_r^{(x)}}{\partial m_k}. \quad (10)$$

The perturbation relations (6)-(7) in part I can now be extended to take into account model perturbations;

$$\delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \gamma^T} \delta \gamma + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial T} \delta T + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{m}^T} \delta \mathbf{m}, \quad (11)$$

$$\delta \mathbf{p} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \gamma^T} \delta \gamma + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial T} \delta T + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{m}^T} \delta \mathbf{m}. \quad (12)$$

In the context of the current work the image wavefront shall always be an isochron. Thereby, a velocity ray is a trajectory for which the isochron time is fixed and  $\gamma$  is constant. The vector  $\mathbf{U} \equiv \partial \mathbf{x} / \partial m_k$  is tangential to a velocity ray for  $m_k$ .



## Velocity rays

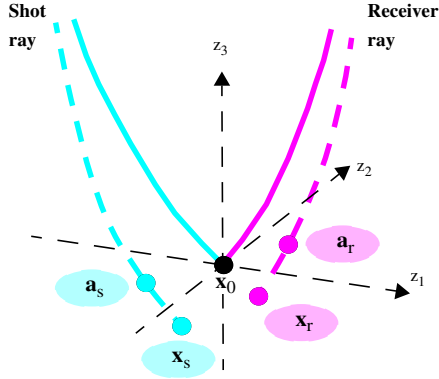


Figure 1. Independent perturbation of the shot and receiver ray, when keeping the ray parameters and traveltimes fixed. A local tangent plane coordinate system is established at isochron position  $\mathbf{x}_0$

The quantity  $\Omega \equiv \partial \mathbf{p} / \partial m_k$  has a corresponding meaning for velocity rays as  $\eta \equiv \partial \mathbf{p} / \partial T$  for isochron rays (or conventional rays).

Expressions for  $\mathbf{U}$  and  $\Omega$  were derived by Iversen (1996, 2001). The latter vectors clearly depend on the representation chosen for the isochron. When  $\gamma = \gamma_s$  and  $\gamma = \gamma_r$  we have

$$\mathbf{U}^{(\gamma_s)} = \frac{\partial \mathbf{a}_s}{\partial m_k} - \mathbf{V}^{(\gamma_s)} \frac{\partial T^{(x)}}{\partial m_k}, \quad \mathbf{U}^{(\gamma_r)} = \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial m_k} - \mathbf{V}^{(\gamma_r)} \frac{\partial T^{(x)}}{\partial m_k}. \quad (13)$$

Here, the group velocity vectors  $\mathbf{V}^{(\gamma_s)}$  and  $\mathbf{V}^{(\gamma_r)}$  are given by equation (8) in part I. As illustrated in figure 1,  $\mathbf{a}_s$  and  $\mathbf{a}_r$  denote projections along the perturbed shot and receiver ray onto the isochron tangent plane, with derivatives given by

$$\frac{\partial \mathbf{a}_s}{\partial m_k} = \mathbf{U}_s - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{U}_s}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}_s} \mathbf{V}_s, \quad \frac{\partial \mathbf{a}_r}{\partial m_k} = \mathbf{U}_r - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{U}_r}{\mathbf{p} \cdot \mathbf{V}_r} \mathbf{V}_r. \quad (14)$$

In the combined ray field approach to representation of isochrons (see part I), the tangential components of the  $\mathbf{U}$  vector is related linearly to the corresponding components in the shot and receiver ray representations, i.e.,

$$(\mathbf{W}_s + \mathbf{W}_r) \frac{\partial \mathbf{z}^{(\gamma_{sr})}}{\partial m_k} = \mathbf{W}_s \frac{\partial \mathbf{z}^{(\gamma_s)}}{\partial m_k} + \mathbf{W}_r \frac{\partial \mathbf{z}^{(\gamma_r)}}{\partial m_k}. \quad (15)$$

The normal component of  $\mathbf{U}$  can be written

$$\frac{\partial z_3}{\partial m_k} = -v \frac{\partial T^{(x)}}{\partial m_k}, \quad (16)$$

and is thus independent of the chosen representation. Transformation of the components in (15)-(16) to global coordinates gives

$$\mathbf{U}^{(\gamma_{sr})} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \mathbf{z}^{(\gamma_{sr})}}{\partial m_k} \quad (17)$$

From the theory above a system of ODEs is obtained for velocity rays:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dm_k} = \mathbf{U}; \quad \frac{d\mathbf{p}}{dm_k} = \frac{\partial \mathbf{p}^{(x)}}{\partial m_k} + \hat{\mathbf{M}} \mathbf{U}, \quad (18)$$

$$\frac{d\hat{\gamma}_s}{dm_k} = \frac{\partial \hat{\gamma}_s^{(x)}}{\partial m_k} + \hat{\mathbf{Q}}_s^{-1} \mathbf{U}; \quad \frac{d\hat{\gamma}_r}{dm_k} = \frac{\partial \hat{\gamma}_r^{(x)}}{\partial m_k} + \hat{\mathbf{Q}}_r^{-1} \mathbf{U}. \quad (19)$$

The system comprises twelve equations, which can be reduced to eight in the case of 2D ray propagation. The fixed point derivatives in (19) are given by

$$\frac{\partial \hat{\gamma}_s^{(x)}}{\partial m_k} = -\hat{\mathbf{Q}}_s^{-1} \mathbf{U}_s, \quad \frac{\partial \hat{\gamma}_r^{(x)}}{\partial m_k} = -\hat{\mathbf{Q}}_r^{-1} \mathbf{U}_r. \quad (20)$$

Similarly to solving the isochron ray system (17)-(18) in part I, a basic subroutine  $F(m_k, \mathbf{y}, d\mathbf{y}/dm_k)$  is needed for evaluation of the right-hand side of the velocity ray system (18)-(19). For each call to  $F$  the shot and receiver rays are re-traced according to the input in  $\hat{\gamma}_s$  and  $\hat{\gamma}_r$ . The ODE system for the shot and receiver rays comprise *i*) kinematic ray equations, *ii*) dynamic ray equations, and *iii*) ray perturbation equations. As a result of the re-tracing we therefore get the quantities  $\mathbf{p}_s, \mathbf{p}_r, \hat{\mathbf{Q}}_s, \hat{\mathbf{Q}}_r, \hat{\mathbf{P}}_s, \hat{\mathbf{P}}_r, \mathbf{U}_s, \mathbf{U}_r, \Omega_s, \Omega_r$  needed to obtain  $d\mathbf{y}/dm_k$ . Observe that the system (18)-(19) contains redundant information, but this can be useful for error control.

In order to initialize the velocity ray system a shot/receiver ray pair must be known. Data for this pair can be obtained from Green's function data tabulated at grid points. Alternatively, one may use data  $\mathbf{y} = (\mathbf{x}, \mathbf{p}, \hat{\gamma}_s, \hat{\gamma}_r)$  generated by the isochron ray tracer. Initialization is normally simpler for velocity rays than for isochron rays, since degenerated shot or receiver rays need not be considered.

## Examples

Examples of numerically integrated velocity rays are shown in figure 2 for the parameters  $v_p, v_s, \epsilon$ , and  $\delta$  of a homogeneous VTI model (model B in part II). Details about the velocity parameters are given in table 1. The width of the triplication zones changes dramatically with the various parameters, and the velocity rays are far from linear in those regions. Also note the increase in ray curvature with increasing isochron dip.

## Conclusions

The developed approach for tracing of velocity rays should be well suited for use in sensitivity studies and velocity model updating. Especially, it is expected to handle cases when a first order approach is inadequate. Other applications are accurate propagation of Fresnel volume boundaries and seismic depth

## Velocity rays

images as a function of a model parameter.

### References

- Adler, F., Hoxha, F., and Hubral, P., 1997. Migrating around in circles: Part II. *The Leading Edge*, **16**, 235-237.
- Adler, F., 2000. Kirchhoff image propagation. *SEG 70th annual Meeting*, Expanded Abstracts, MIG 9.4.
- Farra, V., and Madariaga R., 1987. Seismic Waveform Modeling In Heterogeneous Media by Ray Perturbation Theory. *Journal of Geophysical Research*, **92**, 2697-2712.
- Farra, V., and Le Bégat, S., 1995. Sensitivity of qP-wave traveltimes and polarization vectors to heterogeneity, anisotropy and interfaces. *Geophys. J. Int.*, **121**, 371-384.
- Hubral, P., Tygel, M., and Schleicher, J., 1996. Seismic image waves. *Geophys. J. Int.*, **125**, 431-442.
- Iversen, E., 1996. Derivatives of reflection point coordinates with respect to model parameters. *Pure and Applied Geophysics*, **148**, Nos. 1/2, 287-317.
- Iversen, E., Gjøystdal, G., and Hansen, J.O., 2000. Prestack map migration as an engine for parameter estimation in TI media. *SEG 70th annual Meeting*, Expanded Abstracts, MIG 9.8.
- Iversen, E., 2001. First order perturbation theory for seismic isochrons. Submitted to *Studia geophysica et geodaetica*, February 2001.

### Acknowledgments

I thank my colleague Håvar Gjøystdal at NORSAR for reviewing the two manuscripts.

Table 1. Sampling along the velocity rays in figure 2.

Velocity parameter	Reference value	Sample interval	# steps in negative direction	# steps in positive direction
Vertical P-velocity ( $v_p$ )	2.5 km/s	0.1 km/s	5	5
Vertical S-velocity ( $v_s$ )	1.0 km/s	0.04 km/s	5	5
Thomsen's epsilon ( $\epsilon$ )	0.1	0.05	2	4
Thomsen's delta ( $\delta$ )	-0.1	0.05	2	4



## Velocity rays

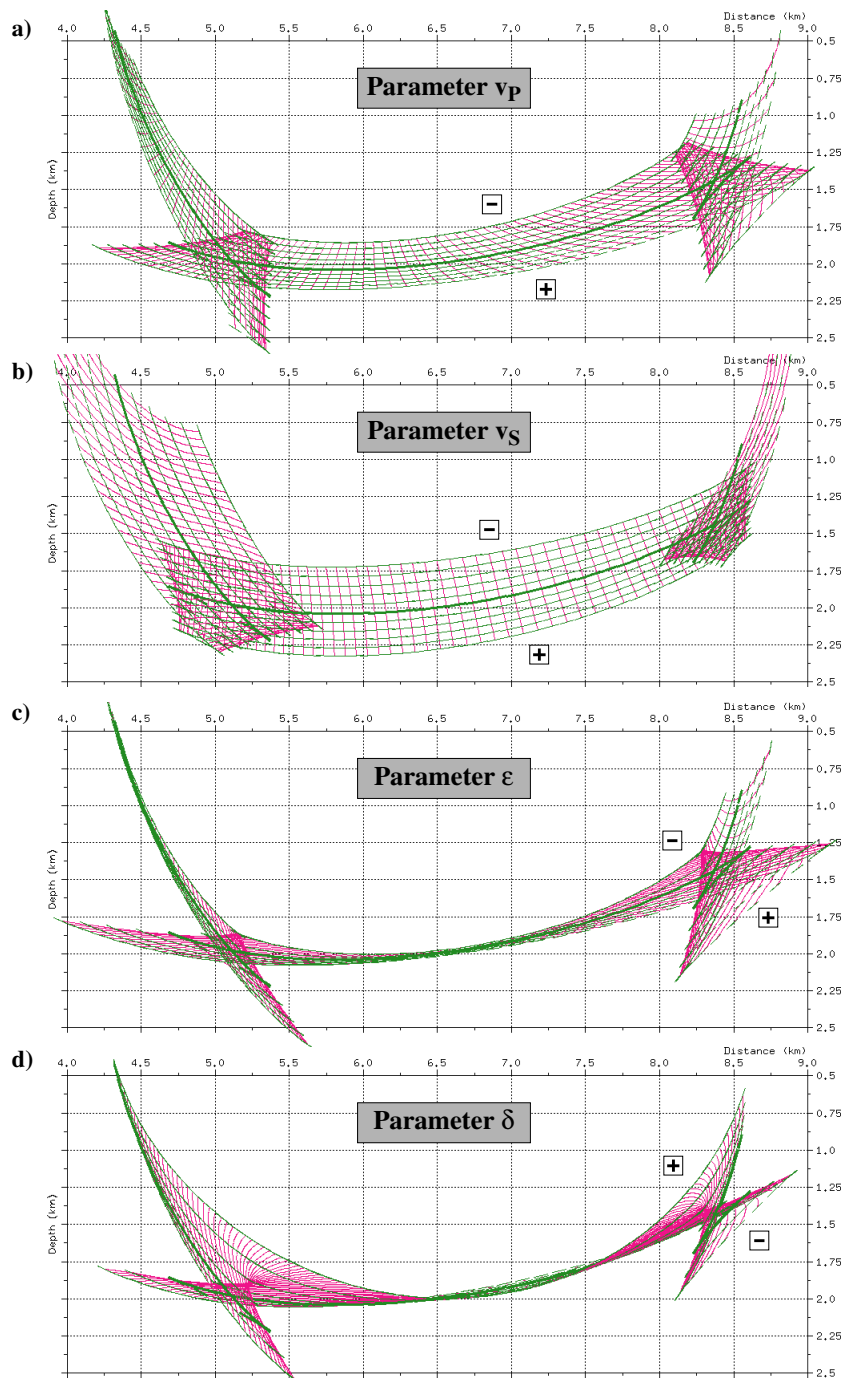


Figure 2. PS velocity rays for parameters  $v_p$ ,  $v_s$ ,  $\epsilon$ , and  $\delta$  related to a homogeneous VTI reference model. The isochron time is 3.0 s; the offset is 2.0 km. The combined ray field representation was used with horizontal midpoint slowness  $p_m$  as ray parameter; sampling interval 0.02 s/km. Positive and negative ray directions are indicated. Details about the velocity parameters are given in table 1.