



## Bases teóricas da Deconvolução de Euler 3D para a escolha das melhores soluções

Valéria Cristina F. Barbosa\*, LNCC/MCT, ([valcris@lncc.br](mailto:valcris@lncc.br)) e João Batista C. Silva, UFPA/CG ([joabcs@directbr.com.br](mailto:joabcs@directbr.com.br))

Copyright 2003, SBGF - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 8<sup>th</sup> International Congress of The Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, 14-18 September 2003.

Contents of this paper was reviewed by The Technical Committee of The 8<sup>th</sup> International Congress of The Brazilian Geophysical Society and does not necessarily represents any position of the SBGF, its officers or members. Electronic reproduction, or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

### Abstract

We derive the analytical estimators for the horizontal and vertical source positions in 3D Euler deconvolution as a function of the x-, y-, and z-derivatives of the magnetic anomaly within a data window. From these expressions we show that, in the case of noise-corrupted data, the x-, y-, and z-coordinate estimates computed at the anomaly borders are biased toward the respective horizontal coordinate of the data window center regardless of the true or presumed structural indices and regardless of the magnetization inclination and declination. On the other hand, in the central part of the anomaly, the x- and y-coordinate estimates are very close to the respective source horizontal coordinates regardless of the true or presumed structural indices and regardless of the magnetization inclination and declination. This contrasting behavior of the horizontal coordinate estimates may be used to automatically delineate the region associated with the best solutions. Applying the Euler deconvolution operator inside this region would decrease the dispersion of all position estimates, improving the source location precision.

### Introdução

Na interpretação magnética a ambigüidade clássica é chamada de momento de dipolo que é expresso como o produto magnetização  $X$  volume. No entanto, a interpretação magnética esta ambigüidade é mais complexa do que as interpretações gravimétricas e MT porque a magnetização não é um escalar e sim um vetor (vetor de magnetização). Desta forma, a intensidade de magnetização, a inclinação e declinação da magnetização acoplam-se com os parâmetros que definem o volume da fonte anômala magnética contribuindo para aumentar a ambigüidade na interpretação magnética. A complexidade da ambigüidade magnética é ainda maior quando as fontes magnéticas não são isoladas e o nível de base é desconhecido. Portanto, métodos automáticos de interpretação aeromagnética devem minimizar de alguma forma as ambigüidades acima descritas. Por esta razão a deconvolução de Euler tornou-se o método mais difundido de interpretação automática de dados aeromagnéticos pois não requer o conhecimento a priori sobre o vetor magnetização. No entanto, a principal desvantagem do método da deconvolução de Euler é a nuvem de dispersão de soluções estimadas em diferentes posições da janela móvel de dados. Silva et al. (2001) provou que há duas causas para esta nuvem: a

escolha do índice estrutural errado e o ruído dos dados. Enquanto a nuvem de dispersão das soluções causada pela escolha errada do índice estrutural pode ser eliminada estimando-se o índice estrutural via o método de Barbosa et al. (1999), a redução da nuvem de dispersão das soluções estimadas causada pelo ruído dos dados só pode ser ativado aplicando-se o método da deconvolução de Euler em janelas de dados onde as amplitudes da anomalia de campo total e suas derivadas são grandes.

Esta nuvem de dispersão das soluções estimadas via o método da deconvolução de Euler 3D pode chegar a ordem de  $10^4$ , dificultando a interpretação dos resultados. Portanto, uma substancial redução da nuvem de dispersão das soluções estimadas é fundamental para viabilizar a aplicação do método da deconvolução de Euler 3D a grandes levantamentos aeromagnéticos onde há um elevado número de observações. Recentemente, alguns esforços têm sido feitos para a solução deste problema. Thompson (1982), por exemplo, aplicou um critério de aceitação de soluções baseado na razão entre a estimativa da profundidade da fonte e o produto entre o índice estrutural e o desvio padrão da profundidade estimada. Fairhead et al. (1994) reduziram o número de soluções estimadas selecionando apenas aquelas associadas a janelas móveis de dados contendo valores absolutos grandes para os gradientes horizontais e vertical. Barbosa et al. (1999) selecionou apenas as soluções que melhor ajustam os "dados conhecidos" (combinação do índice estrutural, da anomalia magnética observada e seus gradientes). Mikhailov et al. (2003) desenvolveram uma técnica baseada em uma abordagem topológica e geométrica para estudar as concentrações das soluções. Estas técnicas de fato reduzem o número de soluções selecionadas através da identificação e remoção das soluções responsáveis pela indesejável nuvem de soluções obtida com diferentes janelas móveis de dados. No entanto, muitas destas técnicas apresentam apenas um tratamento heurístico para justificar a técnica empregada para a redução e, na maioria das vezes, esta redução não é suficientemente drástica.

Este trabalho é o primeiro passo na tentativa de deduzir os fundamentos teóricos para a escolha das melhores soluções estimadas, via método da deconvolução de Euler 3D, reduzindo assim a nuvem de soluções causada pelo ruído existente nos dados. Estes fundamentos teóricos terão como base a detecção da região da anomalia que produz estimativas consistentes da localização da fonte anômala. Para tanto deduziremos analiticamente os estimadores para as posições horizontais e vertical de uma fonte anômala magnética tridimensional usando o método da deconvolução de Euler 3D e analisaremos as propriedades de simetria e tendenciosidade destes estimadores. Posteriormente, este estudo analítico será testado numericamente usando-se anomalias de dados magnéticos sintéticos.

## Método

A anomalia magnética de campo total  $h \equiv h(x, y, z)$  produzida por uma fonte pontual tridimensional (3D) situada nas coordenadas  $x_o, y_o, z_o$  (referida a um sistema Cartesiano destal), satisfaz à equação diferencial de Euler 3D (Reid, 1990):

$$(x - x_o) \frac{\partial}{\partial x} h + (y - y_o) \frac{\partial}{\partial y} h + (z - z_o) \frac{\partial}{\partial z} h = -\eta h \quad (1)$$

Assumindo que um valor para  $\eta$  é tentativamente empregado e que o nível de base é igual a zero, então a equação (1) pode ser escrita como

$$x_o \frac{\partial h}{\partial x} + y_o \frac{\partial h}{\partial y} + z_o \frac{\partial h}{\partial z} = x \frac{\partial h}{\partial x} + y \frac{\partial h}{\partial y} + z \frac{\partial h}{\partial z} + \eta h \quad (2)$$

Em notação matricial a equação (2) é escrita como:

$$\mathbf{S} \mathbf{p} = \mathbf{y} \quad (3)$$

em que a matriz  $\mathbf{S}$  é  $N \times 3$  cujos elementos da  $i$ -ésima linha são:  $g_{i1} = (\partial / \partial x) h_i$ ,  $g_{i2} = (\partial / \partial y) h_i$  e  $g_{i3} = (\partial / \partial z) h_i$ ,  $i=1, \dots, N$ , em que  $N$  é o número de observações da janela de dados,  $h_i$  é o campo total observado no  $i$ -ésimo ponto de observação, e  $(\partial / \partial x) h_i$ ,  $(\partial / \partial y) h_i$  e  $(\partial / \partial z) h_i$  são os gradientes de  $h$  avaliados em  $x=x_i, y=y_i$  e  $z=z_i$ . O  $i$ -ésimo elemento do vetor  $N$ -dimensional  $\mathbf{y}$  é  $y_i = x_i (\partial / \partial x) h_i + y_i (\partial / \partial y) h_i + z_i (\partial / \partial z) h_i + \eta h_i$  e os elementos do vetor de parâmetros  $\mathbf{p}$  são  $x_o, y_o$ , e  $z_o$ . A equação (3) representa um sistema de  $N$  equações lineares em 3 incógnitas que será resolvido via método dos mínimos quadrados, resultando nos seguintes estimadores  $\hat{x}_o$ ,  $\hat{y}_o$ , and  $\hat{z}_o$ :

$$\hat{x}_o = \frac{1}{T} [(BC - F^2)(G + H + P + I\eta) - (DC - EF)(J + K + Q + L\eta) + (DF - EB)(M + N + R + O\eta)] \quad (4)$$

$$\hat{y}_o = \frac{1}{T} [(DC - EF)(G + H + P + I\eta) + (AC - E^2)(J + K + Q + L\eta) - (AF - DE)(M + N + R + O\eta)] \quad (5)$$

e

$$\hat{z}_o = \frac{1}{T} [(DF - EB)(G + H + P + I\eta) - (AF - DE)(J + K + Q + L\eta) + (AB - D^2)(M + N + R + O\eta)] \quad (6)$$

em que

$$T = ABC - AF^2 - D^2C + 2DEF - E^2B \quad (7)$$

e os termos A-R são:  $A = \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x} \right\rangle$ ,  $B = \left\langle \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial y} \right\rangle$ ,

$$C = \left\langle \frac{\partial h}{\partial z}, \frac{\partial h}{\partial z} \right\rangle, D = \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y} \right\rangle, E = \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial z} \right\rangle, F = \left\langle \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right\rangle, G = \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, x \frac{\partial h}{\partial x} \right\rangle,$$

$$H = \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, y \frac{\partial h}{\partial y} \right\rangle, I = \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, h \right\rangle, J = \left\langle \frac{\partial h}{\partial y}, x \frac{\partial h}{\partial x} \right\rangle, K = \left\langle \frac{\partial h}{\partial y}, y \frac{\partial h}{\partial y} \right\rangle, L = \left\langle \frac{\partial h}{\partial y}, h \right\rangle,$$

$$M = \left\langle \frac{\partial h}{\partial z}, x \frac{\partial h}{\partial x} \right\rangle, N = \left\langle \frac{\partial h}{\partial z}, y \frac{\partial h}{\partial y} \right\rangle, O = \left\langle \frac{\partial h}{\partial z}, h \right\rangle, P = \left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, z \frac{\partial h}{\partial z} \right\rangle,$$

$$Q = \left\langle \frac{\partial h}{\partial y}, z \frac{\partial h}{\partial z} \right\rangle \text{ e } R = \left\langle \frac{\partial h}{\partial z}, z \frac{\partial h}{\partial z} \right\rangle, \text{ em que } \langle u(x, y) \cdot v(x, y) \rangle \text{ é o}$$

produto interno de  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  definido dentro de uma janela móvel de dados.

Assumindo que uma fonte anômala isolada decai a um nível de base ( $\gamma$ ) constante nas regiões das bordas da anomalia. Como resultado, nestas regiões, os termos A-H, J-K, M-N, e P-R decairão para zero. No caso de uma anomalia corrompida por realizações de ruído aleatório com média zero, teremos as seguintes propriedades adicionais: i) termos I, L, e O também decairão para zero porque substituindo-se  $h$  por  $h + \gamma$ , estes termos assumem a forma  $\langle \partial h / \partial \alpha, h \rangle + \langle \partial h / \partial \alpha, \gamma \rangle$ , com  $\alpha = x, y$ , ou  $z$ . O primeiro termo decai para zero porque  $h$  e  $\partial h / \partial \alpha$  decaem para zero e o segundo termo também decai para zero porque é proporcional a soma de valores oscilando em torno de zero; ii) termos A, B, C, G, K, e R decairão mais lentamente para zero do que todos os outros termos porque eles são ou somas de quadrados (A-C) ou somas de valores positivos ponderados pelas coordenadas  $x, y$  e  $z$  (G, K, e R) enquanto todos os outros termos serão ou o produto de valores oscilando em torno de zero (D, E, F, H, J, M, N, P e Q) ou uma quantidade consistindo de um produto de valores oscilando em torno de zero somado a uma soma de valores oscilando em torno de zero (I, L, e O). Portanto, retendo-se apenas os termos A, B, C, G, K, e R nas equações (4), (5), e (6), obteremos expressões aproximadas para os parâmetros de localização nas bordas da anomalia:

$$\hat{x}_o \approx \frac{G}{A} = \frac{\left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, x \frac{\partial h}{\partial x} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x} \right\rangle}, \quad (8)$$

$$\hat{y}_o \approx \frac{K}{B} = \frac{\left\langle \frac{\partial h}{\partial y}, y \frac{\partial h}{\partial y} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial y} \right\rangle} \quad (9)$$

e

$$\hat{z}_o \approx \frac{R}{C} = \frac{\left\langle \frac{\partial h}{\partial z}, z \frac{\partial h}{\partial z} \right\rangle}{\left\langle \frac{\partial h}{\partial z}, \frac{\partial h}{\partial z} \right\rangle} \quad (10)$$

Isto é, as estimativas  $\hat{x}_o, \hat{y}_o$  e  $\hat{z}_o$  nas bordas da anomalias, são, respectivamente, as médias ponderadas das coordenadas de  $x, y$  e  $z$  dos pontos que definem a janela de dados, independentemente do valor empregado para o índice estrutural como evidenciado pelas equações (8), (9) e (10). Em resumo, teoricamente obtemos as seguintes propriedades: 1) O estimador  $\hat{x}_o$ , é tendencioso em direção a coordenada  $x$  do centro da janela de dados, apresenta simetria na direção  $y$  em relação a  $y_o$  e anti-simetria na direção  $x$  em relação a  $x_o$ . 2) O estimador,  $\hat{y}_o$  é tendencioso em direção a coordenada  $y$  do centro da janela de dados, apresenta simetria na direção  $x$  em relação a  $x_o$  e anti-simetria na direção  $y$  em relação a  $y_o$ . 3) O estimador  $\hat{z}_o$  é tendencioso em direção da coordenada  $z$  do centro da janela móvel de dados.

## Resultados

As propriedades de tendenciosidade e simetria de  $\hat{x}_o$ ,  $\hat{y}_o$  e  $\hat{z}_o$  discutidas acima são ilustradas usando uma anomalia magnética contaminada por ruído produzida por uma fonte esférica com raio de 1 km, localizada em  $x_o=12$  km,  $y_o=10$  km e  $z_o=2$  km e magnetizada apenas por indução. O vetor magnetização tem uma inclinação de  $60^\circ$ , declinação de  $0^\circ$ , e intensidade de 1 A/m. A anomalia de campo total foi computada no plano  $z=0$  km numa malha de  $120 \times 100$  pontos regularmente espaçados de 0.2 km em ambas as direções  $x$  e  $y$  (norte-sul e este-oeste, respectivamente) assumindo-se um nível de base nulo. A anomalia teórica foi contaminada com ruído Gaussiano pseudo-aleatório com média nula e desvio padrão de 1 nT. Em todos os testes, os gradientes foram obtidos usando-se o método baseado no princípio da camada equivalente por janelas móveis (Leão e Silva, 1989). Aplicando-se o método da deconvolução de Euler 3D, usamos uma janela móvel de dados de  $15 \times 15$  varrendo a área limitada por  $x \in [4$  km, 20 km] e  $y \in [2$  km, 18 km]. Para cada janela móvel de dados, estimamos um vetor de parâmetros solucionando a equação (3) via método dos mínimos quadrados e os valores de  $\hat{x}_o$ ,  $\hat{y}_o$ , e  $\hat{z}_o$  são assinalados ao ponto central da janela móvel de dados. As Figuras 1a-c mostram as estimativas  $\hat{x}_o$ ,  $\hat{y}_o$ , e  $\hat{z}_o$ , respectivamente, contra a posição central da janela móvel de dados, empregando-se o valor correto ao índice estrutural ( $\eta=3$ ). As Figuras 1a e 1b mostram que  $\hat{x}_o$  e  $\hat{y}_o$ , nas bordas da anomalia, são estimativas tendenciosas, respectivamente, em direção a média aritmética das coordenadas  $x$  e  $y$  dos pontos que definem a janela móvel de dados. Graficamente, nota-se que o comportamento de  $\hat{x}_o$  e  $\hat{y}_o$  pode de fato ser aproximado por uma superfície polinomial de primeira ordem. Por outro lado, a Figura 1c mostra que  $\hat{z}_o$  é uniformemente tendencioso em direção a zero nas bordas da anomalia porque assumimos que os dados foram coletados em  $z=0$  (teoricamente as estimativas  $\hat{z}_o$  decaem a zero apenas no infinito). Em contraste, próximo a parte central do mapa de contorno ( $x \in [8$  km, 14 km] e  $y \in [7$  km, 12 km]) onde há os maiores valores absolutos dos gradientes vertical e horizontal,  $\hat{x}_o$ ,  $\hat{y}_o$  e  $\hat{z}_o$  assumem, como esperado, valores aproximadamente constantes iguais a  $x_o$ ,  $y_o$  e  $z_o$ . Em um levantamento aeromagnético, a localização  $z_o$  de uma fonte anômala e a altitude média de observação  $H_{\text{voo}}$  sempre são valores, substancialmente, diferentes. Conseqüentemente, as áreas com os platôs correspondente a  $z_o$  e  $H_{\text{voo}}$  na plotagem de  $\hat{z}_o$  contra o centro da janela móvel também serão muito diferentes. Como um resultado, ambas as áreas planas podem ser sempre claramente identificadas. Como resultado das propriedades acima descritas, o estimator  $\hat{x}_o$  será aproximadamente anti-simétrico na

direção  $x$ , com relação a coordenada  $x_o=12$  km e simétrico na direção  $y$  relativamente a coordenada  $y_o=10$  km como observado na Figura 1a. Similarmente,  $\hat{y}_o$  será aproximadamente anti-simétrico na direção  $y$  com relação a coordenada  $y_o=10$  km e simétrico na direção  $x$  relativamente a coordenada  $x_o=12$  km como ilustrado na Figura 1b. Finalmente, Figura 1c mostra o comportamento simétrico de  $\hat{z}_o$  ao longo das direções  $x$  e  $y$  com relação a  $x_o=12$  km e  $y_o=10$  km, respectivamente.

Ressaltamos que as propriedades de simetria e tendenciosidade das estimativas  $\hat{x}_o$  e  $\hat{y}_o$ , tanto na região das bordas da anomalia como na parte central da anomalia, não depende do valor tentativo assinalado para  $\eta$ . Por outro lado,  $z_o$  é subestimado na porção central da anomalia se um índice estrutural usado for menor que o índice verdadeiro e vice-versa. No entanto, nas bordas da anomalia,  $\hat{z}_o$  decai para zero mesmo usando-se um índice estrutural incorreto. Finalmente, nós enfatizamos que nossos testes com dados sintéticos produziram, qualitativamente, o mesmo resultado quando aplicado a outros modelos interpretativos (cilindro horizontal e dique fino) e sob diferentes níveis de base desconhecidos.

## Conclusões

Deduzimos os estimadores analíticos para as posições horizontal e vertical de uma fonte anômala magnética 3D usando o método da deconvolução de Euler 3D como uma função das coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  das observações e analisamos o comportamento destes estimadores usando-se um valor tentativo para o índice estrutural. Para dados contaminados com ruído, na porção central da anomalia, as superfícies representando as estimativas das coordenadas da fonte ( $\hat{x}_o$ ,  $\hat{y}_o$ , e  $\hat{z}_o$ ) como funções das coordenadas  $x$  e  $y$  do centro da janela móvel de dados apresenta aproximadamente valores constantes definindo uma área plana. Estes valores são muito próximos às coordenadas da fonte anômala verdadeira se o índice estrutural assumido é o correto. Se um índice estrutural incorreto é usado, nossos testes numéricos mostram que valores constantes próximo as coordenadas verdadeiras ainda ocorrem para  $\hat{x}_o$  e  $\hat{y}_o$ , porém  $\hat{z}_o$  subestimar a coordenada verdadeira se o índice estrutural assumido for menor que o índice correto e vice-versa. Por outro lado, mostramos teoricamente e numericamente que nas bordas da anomalia  $\hat{x}_o$  torna-se tendencioso em direção a coordenada  $x$  do centro da janela móvel de dados. Adicionalmente, mostramos que  $\hat{x}_o$  apresenta simetria na direção  $y$  em relação a  $y_o$  (a coordenada  $y$  verdadeira da fonte anômala) e anti-simetria na direção  $x$  em relação a  $x_o$  (a coordenada  $x$  verdadeira da fonte anômala). *Mutatis*

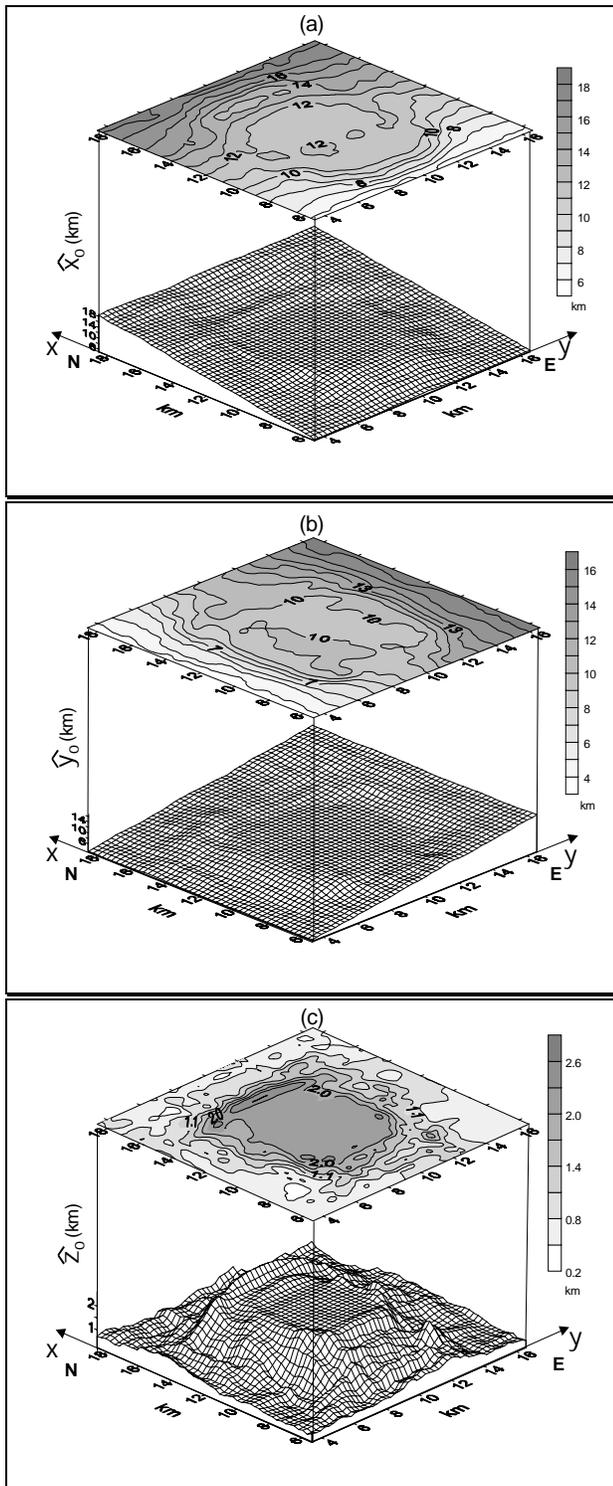


Figura 1 – Estimativas  $\hat{x}_o$  (a),  $\hat{y}_o$  (b), e  $\hat{z}_o$  (c) contra as coordenadas  $x$  e  $y$  do centro de uma janela móvel de dados de  $15 \times 15$  para dados magnéticos contaminados com ruído com inclinação de  $60^\circ$  produzidos por uma esfera com centro em  $x_o = 12$  km,  $y_o = 10$  km, e  $z_o = 2$  km e magnetizada por indução, usando-se o índice estrutural correto ( $\eta = 3$ ).

*mutandis*, o mesmo é verdadeiro para  $\hat{y}_o$ . Por outro lado, o estimador  $\hat{z}_o$  é tendencioso em direção da coordenada  $z$  do centro da janela móvel de dados.

As propriedades teóricas acima descritas para os estimadores das posições horizontais e vertical de uma fonte magnética anômala via método da deconvolução de Euler 3D, não são apenas peculiaridades matemáticas apenas de interesse acadêmico. Tais propriedades podem ser usadas para delinear a área plana das estimativas  $\hat{x}_o$  e  $\hat{y}_o$  onde são produzidas as melhores estimativas para todas as posições da fonte anômala. Isto pode ser feito ajustando-se um polinômio de primeiro grau a  $\hat{x}_o$  (ou  $\hat{y}_o$ ) dentro de uma janela móvel de dados. As posições da janela onde ocorrer uma mudança abrupta no coeficiente  $x$  (ou  $y$ ) do polinômio ajustado, delinea-se as coordenadas  $x$  (ou  $y$ ) das bordas da área plana. Uma vez que as áreas planas estão associadas com estimadores consistentes, computando-se as estimativas de  $\hat{x}_o$ ,  $\hat{y}_o$ , e  $\hat{z}_o$  apenas dentro destas áreas, decrescerá a dispersão destas estimativas, melhorando suas precisões.

#### Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq pelo apoio financeiro.

#### Referências

- Barbosa, V. C. F., Silva, J. B. C., and Medeiros, W. E., 1999, Stability analysis and improvement of structural index estimation in Euler deconvolution: *Geophysics*, Vol. 64, p48-60.
- Fairhead, J. D., Bennett, K. J., Gordon, D. R. H., and Huang, D., 1994, Euler: Beyond the "Black Box": 64th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, p422-424.
- Leão, J. W. D., and Silva, J. B. C., 1989, Discrete linear transformations of potential field data: *Geophysics*, Vol.54, p497-507.
- Mikhailov, V., Galdeano A., Diament M., Gvishiani, A., Agayan, S., Boboutdinov, S., Graeva, E., and ailhac, P., 2003, Application of artificial intelligence for Euler solutions clustering: *Geophysics*, Vol. 68, p168-180.
- Reid, A. B., Allsop, J. M., Granser, H., Millett, A.J., and Somerton, I.W., 1990, Magnetic interpretation in three dimensions using Euler deconvolution: *Geophysics*, Vol. 55, p80-91.
- Silva, J. B. C., Barbosa, V. C. F., and Medeiros, W. E., 2001, Scattering, symmetry, and bias analysis of source position estimates in Euler deconvolution and its practical implications: *Geophysics*, Vol. 66, p1149-1156.
- Thompson, D. T., 1982, EULDPH: A new technique for making computer-assisted depth estimates from magnetic data: *Geophysics*, Vol. 47, p31-37.