



RECUPERAÇÃO DE ESPECTRÔMETRO GAMA PORTÁTIL DE PROSPECÇÃO GEOFÍSICA USANDO MICROCONTROLADOR.

*Silva, N., Hiodo, F.Y., Galhardo, L.F., Rugenski, A. - Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas
Universidade de São Paulo.

Copyright 2003, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 8th International Congress of The Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, 14-18 September 2003.

Contents of this paper was reviewed by The Technical Committee of The 8th International Congress of The Brazilian Geophysical Society and does not necessarily represents any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction, or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

1 - Abstract

Two differentials gamma spectrometers SCINTREX GAD-6 with NaI(Tl) sensors were recovered by means of CISC 8051 microcontroller's family (INTEL, 1994). In each equipment, that was deactivated about five years or more, all digital part was changed by a firmware (Cady, 2000). The resident software of this firmware was completely developed in the Geophysical Instrumentation Laboratory of IAG-USP.

The portable detector GAD-6 has an efficient automatic gain stabilization system using the ^{133}Ba (352 keV) photopeak. Servocontrol circuit with a digital to analog converter (DA) gives a good stabilization in the field operation conditions. All analog circuits including feedback, stretcher and single channel analyzers were recovered. Moreover NaI(Tl) crystals coupled with PMT, high voltage generator and associated circuits into detector probe were improved too. The stabilization photopeak system and the single channel discriminators were adjusted in the K, U e Th windows, by means of standard radioactive source, as ^{226}Ra , ^{137}Cs and ^{232}Th .

One of these spectrometers was tested e calibrated on seven pads, assembled in IRD-CNEN (Radioprotection and Dosimetry Institute - Rio de Janeiro - Brazil) . The calibration results shows that recovered detector has a performance as the commercial equipments available.

Also were developed news procedures of acquisitions, storage and data transference by serial interface RS232 to any kind of microcomputers (PC, notebook, palmtop, etc.).

2- Introdução

Nas décadas de 60 e 70, cintiladores e espectrômetros gama portáteis foram produzidos mundialmente, por vários fabricantes. O objetivo na época, era mapear jazidas de urânio para fins militares. Vários destes detectores baseados em tecnologia TTL ainda estão disponíveis em empresas de prospecção. Apesar de estarem sucateados, sua recuperação torna-se viável uma vez que seus preços atualizados no mercado mundial ultrapassam a barreira dos U\$ 10.000,00.

Desde que os cristais cintiladores de NaI(Tl), as válvulas fotomultiplicadoras, os circuitos analógicos de detecção e estabilização, ainda estejam operantes, os antigos

detectores gama podem ser repotencializados com custo inferior a U\$200,00, e usados em prospecção geofísica, com a mesma eficiência e confiabilidade dos modernos detectores multicanais.

Atualmente existem espectrômetros gama multicanais de NaI(Tl) portáteis geralmente com 512 canais, que são usados para mapeamento de fraturas em granito para localização de água, nas prospecções de petróleo, de kimberlitos, de ouro, de cassiterita, em Arqueologia, em dosimetria ambiental, etc..

3 - Objetivos- Metodologia

Diante da disponibilidade de 2 espectrômetros gama desativados há mais de 5 anos, tornou-se interessante desenvolver projetos baseados em modernos e versáteis microcontroladores que pudessem substituir com grande vantagem, toda a parte digital dos equipamentos sucateados.

O objetivo deste trabalho foi a recuperação dos 2 espectrômetros gama diferenciais SCINTREX GAD-6 com cristais cintiladores de NaI(Tl) de volumes 3x3" e 4x4", pertencentes ao Depto de Geofísica USP. Neste projeto, todos os módulos analógicos dos GAD-6 foram testados e reaproveitados. Devido a sua importância, o circuito de estabilização deste detector, usando fonte de referência de ^{133}Ba , será descrito em detalhes, mais adiante. Os módulos digitais TTL originais de cada unidade, montados em 2 placas de circuito impresso (15x20 cm cada), foram reduzidos a uma única placa (5x8 cm), contendo um microcontrolador AT89S8252, com uma interface RS232C e um mostrador LCD *dot-matrix* 16 caracteres por 2 linhas. A memória E²PROM interna tem capacidade de armazenar 255 conjuntos de medidas.

Toda a programação do *hardware* foi feita em linguagem C através de um compilador específico de domínio público. Este programa permite alterar facilmente os parâmetros de aquisição, pela navegação em menus, através de 3 interruptores de pressão (teclado). Durante as medidas, os dados de contagem são atualizados a cada 10 s no LCD, e após completar-se o tempo de medida, um sinal sonoro de finalização é gerado pelo microcontrolador. Os dados finais de contagem das janelas do ^{40}K , ^{238}U , ^{232}Th (com cinco dígitos em ponto flutuante) e o tempo de aquisição são apresentados simultaneamente no visor.

As janelas de detecção dos amplificadores SCA (single channel analyzer) foram ajustadas por meio de um gerador de pulsos de precisão e de fontes radioativas de ^{226}Ra , ^{232}Th e ^{40}K

Medidas de calibração feitas sobre os blocos padrão (*pads*) do IRD, de concentrações conhecidas de ^{40}K , ^{238}U , ^{232}Th e construídos segundo normas da AIEA (Agência Internacional de Energia Atômica),

possibilitaram determinar os parâmetros de sensibilidade.

4 - Descrição do Sistema de Estabilização do GAD-6

O circuito de estabilização automática de ganho é formado de 2 analisadores monocanais (SCA) entre cujas janelas de discriminação é posicionado o fotopico de ¹³³Ba de energia 352 keV. O fotopico suposto gaussiano é posicionado inicialmente de forma manual entre as duas janelas com o sistema de controle de

ganho desabilitado Então este circuito de CAG é inserido no elo de amplificação, compensando qualquer deriva decorrente da válvula foto-multiplicadora, amplificador espectroscópico, etc. As saídas dos dois SCAs são aplicadas a um amplificador de erro que controla um conversor digital analógico (DAC). A saída deste conversor alimenta um circuito foto-acoplador, que compensa a deriva, mantendo o fotopico do ¹³³Ba fixo entre os dois SCA (single channel analyzer).

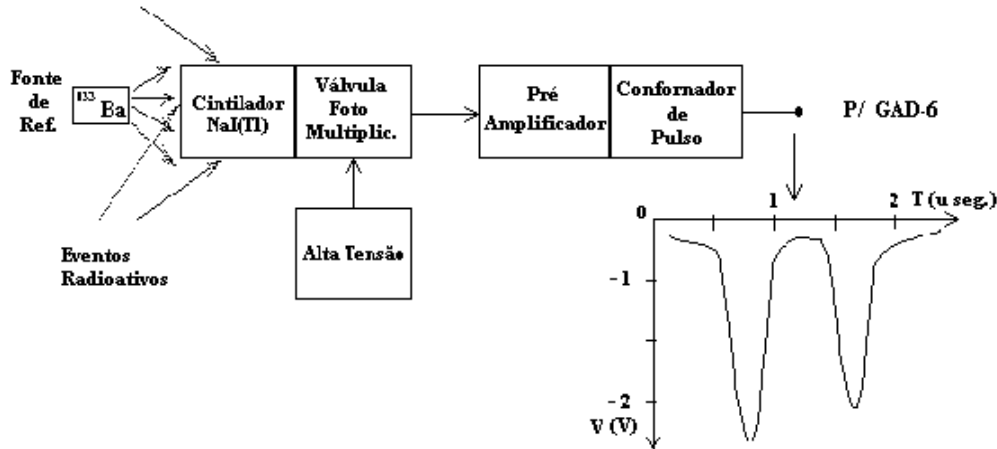


Fig.1 – Diagrama de blocos do módulo sensor do SCINTREX GAD6.

5 - Descrição do detector GAD-6

O espectrômetro GAD-6 portátil é constituído de dois módulos, conectados por um cabo blindado BNC :

- 1) Módulo do sensor (Fig.1): formado pelo conjunto cristal de NaI(Tl), válvula fotomultiplicadora, fonte de alta tensão e pré-amplificador conformador de pulsos. Uma fonte de ¹³³Ba de referência é posicionada permanentemente próxima do cristal de NaI(Tl).
- 2) Módulo de discriminação de energias e de contadores de eventos, formado de: amplificador espectroscópico, amplificador de ganho controlado pelo fotopico do ¹³³Ba, 4 amplificadores SCA, e 4 contadores de eventos (Fig.2).

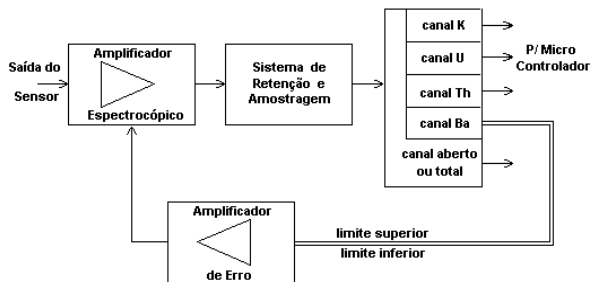


Fig. 2- Diagrama de Blocos do Módulo Principal (recuperado) do GAD-6 (amplif. Espectrosc. de ganho contr., circuito de amost. e reten. e discrimin.). SCINTREX, 1979.

6 - Procedimento para recuperação do GAD-6.

O processo de recuperação dos detectores gama de NaI(Tl) foi realizado em 3 etapas, como descrito abaixo:

- 1) Substituição dos circuitos de tecnologia digital TTL do equipamento original por um único circuito usando

microcontrolador de tecnologia CHMOS, de forma que foi necessário redefinir completamente os modos de aquisição, de armazenagem e de transferência de dados.

2) Recuperação e teste dos módulos analógico/digital de estabilização de foto-pico, dos discriminadores de energia dos foto-picos de interesse, das fontes chaveadas de alimentação e do amplificador espectroscópico. Também aproveitou-se o conjunto detector formado pelo cristal de NaI(Tl) acoplado opticamente a um tubo foto-multiplicador PMT e sua respectiva fonte de alta tensão, que constitui a parte básica do equipamento GAD-6.

3) Ajustes das janelas de energia dos amplificadores SCA, usando fontes radioativas monoenergéticas padrão e um gerador de pulsos de precisão.

Além da recuperação da parte eletrônica, foi dado ênfase no desenvolvimento da programação do *hardware* (*firmware* ou *hardware* programável) do microcontrolador adotado.

7 - Características do Firmware Introduzido

O *firmware* do módulo digital substituído foi totalmente desenvolvido em linguagem C (*Kernighan & Ritchie*, 2001) sobre uma plataforma baseada no microcontrolador ATMEL® AT89S8252 (arquitetura von Neumann – CISC, ver *Cady*, 2000) associado à dispositivos periféricos, tais como; visor de cristal líquido LCD, controlador de porta serial MAX232 padrão RS232C e driver conversor de padrão lógico (TTL/CMOS) (Fig.3). O módulo substituído final tornou-se compacto, ficando reduzido a uma placa de circuito impresso de 5x8 cm, que foi fixada sobre o módulo visor LCD de mesmo tamanho. Isto resultou numa redução de

70% do espaço ocupado pelos antigos circuitos digitais do detetor GAD-6.

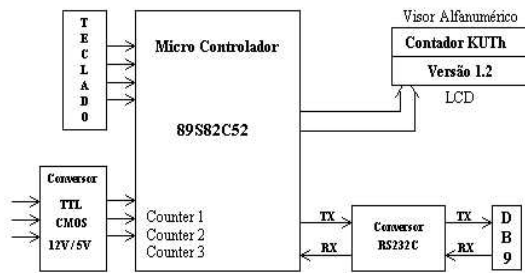


Fig. 3-Diagrama do Firmware Desenvolvido para Substituição da Parte Digital do Módulo Principal.

O equipamento final, alimentado com bateria de eletrólito gelatinoso (*gell-cell*) de 12 V_{DC}-2,4Ah, teve o peso reduzido de 30% em relação ao original, que usava 9 baterias alcalinas tipo AA de 1,5 Volts. O consumo atual é da ordem de 200 mA, que aumentou apreciavelmente a autonomia de operação contínua no campo, para cerca de 10 horas.

7.1 - Estrutura da Programação do Hardware

Após a inicialização do equipamento, este emite um sinal sonoro e apresenta opções de aquisição ou de memória, na tela inicial, escolhidas por acionamento de 3 microinterruptores. A seqüência das operações estão representadas nos fluxogramas das Figuras 4 e 5.

O fluxograma da seqüência de aquisição é mostrado abaixo (Fig.4).

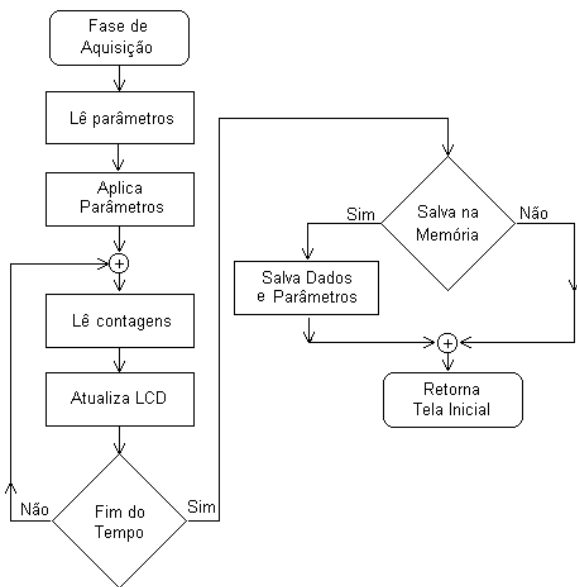


Fig.4 Rotina de Aquisição de Dados Implementada.

O fluxograma da etapa de armazenagem, acesso e transferência de dados é apresentado na Fig.5.

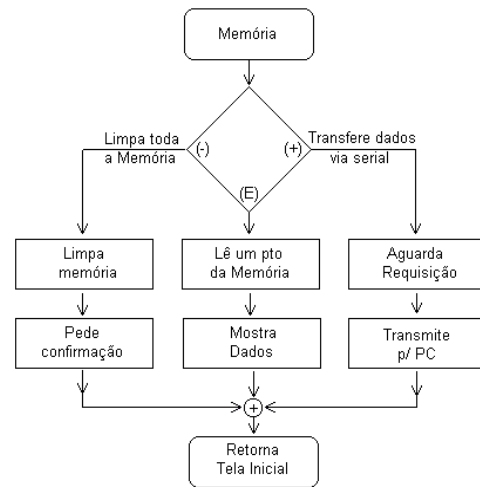


Fig.5 - Fluxo da Rotina de Armazenagem e Transmissão Implementado em Firmware.

7.2 - Estrutura do Registro de Dados

Na gravação dos dados na memória não volátil do microcontrolador optou-se pelo modo mais simplificado. Os dados brutos das contagens das três janelas de contagem (⁴⁰K, ²³⁸U, ²³²Th), o tempo de aquisição, o número da linha, e a seqüência ou passo (distância entre pontos de aquisição), são gravados na memória interna não volátil E²PROM (ATMEL,1997). Após a gravação, estes dados brutos podem ser transferidos da memória, via serial RS232C, para um PC/palmtop. Desta maneira, procurou-se implementar o mínimo de funções no equipamento de campo, a fim evitar erros de operação. Apenas a apresentação dos dados no final de cada ciclo de aquisição é um pouco mais elaborada, i.e., os dados de contagem são apresentados em contagens por minuto, com 5 dígitos de precisão em ponto flutuante.

A memória E²PROM interna do microcontrolador, onde são armazenados as medidas e parâmetros, é suficiente para gravar 255 conjuntos completos de dados, assim distribuídos: 0 a 245 de medidas efetivas e, 10 de radiação de fundo.

8.0 - Determinação dos Parâmetros do Detetor-Calibração

Foram feitas medidas sobre os *pads* do Instituto de Radioproteção e Dosimetria IRD-CNEN (RJ), construídas segundo critérios adotados pela AIEA (Agência Internacional de Energia Atômica).

O tempo de cada medida variou de 60 a 600 segundos para controle da interferência dos radioelementos associados a aerossóis, dispersos na atmosfera. Elas foram feitas em diferentes horários, durante 2 dias, para determinação dos parâmetros do equipamento, tais como:

- a) O ruído (*background*) nas janelas de detecção do ⁴⁰K, ²³⁸U, ²³²Th;
- b) Os fatores (α , β e γ) de interferência entre janelas devido ao espalhamento Compton (Fig.6),

c) Os fatores (a, b, c) de interferência dos canais de baixa energia nas de maior energia, devido basicamente, aos elementos-filho de suas séries, cujos fons têm energias muito próximas das janelas selecionadas (Fig.6).

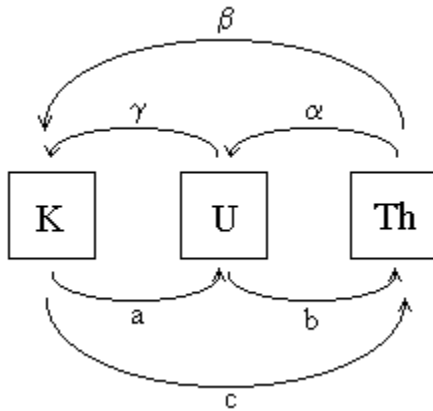


Fig. 6- Esquema de Interferência entre Janelas. Fonte: Beck, 1991.

Os 6 parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ são determinados a partir da matriz sensibilidade $S_{3,3}$, através da equação (Max, 1959):

$$C_{n,3} * S_{3,3} = N_{n,3} \text{ (eq.1)}$$

onde:

C- matriz concentração,

S- matriz sensibilidade,

N- matriz de contagens líquidas.

Para a solução da Eq.1 em função da matriz sensibilidade **S**, deve-se inicialmente transformar $C_{n,3}$ (n é o número de linhas) numa matriz quadrada, ou seja, multiplicá-la por sua transposta ($C'_{n,3}$), mas mantendo a igualdade:

$$C'_{n,3} * C_{n,3} * S_{3,3} = C'_{n,3} * N_{n,3}$$

O termo matricial que multiplica a matriz sensibilidade do lado esquerdo da equação é eliminado, multiplicando-se o mesmo pelo seu inverso. Então:

$$\text{inv}(C'_{n,3} * C_{n,3}) * (C'_{n,3} * C_{n,3}) = I$$

Onde I é a matriz identidade. Então:

$$[\text{inv}(C'_{n,3} * C_{n,3}) * (C'_{n,3} * C_{n,3})] * S_{3,3} = \\ = \text{inv}(C'_{n,3} * C_{n,3}) * (C'_{n,3} * N_{n,3})$$

Portanto (Max, 1959):

$$S_{3,3} = \text{inv}(C'_{n,3} * C_{n,3}) * (C'_{n,3} * N_{n,3}) \text{ (eq.2)}$$

$$S = \begin{pmatrix} S_{kk} & S_{ku} & S_{kt} \\ S_{uk} & S_{uu} & S_{ut} \\ S_{tk} & S_{tu} & S_{tt} \end{pmatrix}$$

Onde $S_{i,j}$ é a sensibilidade do elemento i na janela j e $n \geq 3$.

Os parâmetros de *stripping* são obtidos a partir da matriz sensibilidade:

$$\alpha = S(3,2)/S(3,3) = S_{tu}/S_{tt}$$

$$\beta = S(3,1)/S(3,3) = S_{tk}/S_{tt}$$

$$\gamma = S(2,1)/S(2,2) = S_{uk}/S_{uu}$$

$$a = S(2,3)/S(2,2) = S_{ut}/S_{uu}$$

$$b = S(1,3)/S(1,1) = S_{kt}/S_{kk}$$

$$c = S(1,2)/S(1,1) = S_{ku}/S_{kk}$$

Os parâmetros de interferência entre janelas foram determinados a partir das medidas sobre os pads e dos valores de concentração fornecidos pelo IRD/CNEN (tabela 1), através da Eq.2. Todas as resoluções matriciais mostradas foram implementadas em linguagem MATLAB e, as incertezas foram obtidas por propagação de erro (Helene & Vanin, 1981) da matriz de covariância (Anexo). Os valores de concentração de K(%), eU(ppm), eTh(ppm) dos blocos padrão do IRD, que estão em equilíbrio radioativo secular, são dados na tabela abaixo.

Concentrações dos pads do IRD, Barreto et al., 1986						
pad	K (%)	Erro K(%)	U (ppm)	ErroU(ppm)	Th(ppm)	ErroTh(ppm)
k1	6,71	0,06	2,00	0,07	20,90	0,81
k2	4,43	0,08	2,97	0,06	29,71	1,39
u1	3,47	0,04	56,89	1,15	50,13	0,99
u2	3,43	0,08	19,45	0,14	45,57	0,57
th1	3,54	0,07	11,63	0,15	255,97	5,25
uth1	3,64	0,03	12,10	0,11	71,59	1,76
uth2	3,65	0,03	38,95	0,81	152,39	4,76

Tabela 1 – Concentração dos Radioelementos nos Pads do IRD-CNEN (Medeiros et al., 1986).

Nas medidas sobre os blocos de calibração acima, a atenuação por efeito fotoelétrico e Compton, é assumida igual para todos os blocos de mesma matriz de concreto. Portanto é possível efetuar correções nas janelas de contagem de interesse, devido ao ruído Compton originado de fons de maior energia. A versão de *firmware* utilizada na aquisição de dados no IRD foi a do Trabalho de Graduação I (Silva & Hiodo, 2002), portanto os dados são apresentados sem correção, com cinco dígitos em ponto flutuante.

As janelas e os radionuclídeos recomendados para detecção do ^{40}K , ^{238}U e ^{232}Th em prospecção geofísica (Serviço Geológico do Canadá), são dados abaixo.

JANELA	ISÓTOPO	ENERGIA(keV)	JANELA (keV)
Potássio	^{40}K	1460	1370 – 1570
Urânio	^{214}Bi	1760*	1660 – 1860
Tório	^{208}Tl	2615	2410 – 2810
Total			410 – 2810
Cósmica			3000 - ∞

*Maior pico em 1765 keV, menor pico em 1730 keV. Fonte: (Grasty & Shives, 1997).

Nos procedimentos de campo, primeiramente, são feitas medidas do ruído regional nas janelas de contagem. Este valor pode ser obtido com boa precisão, em medidas sobre pontes de madeira com lâmina d'água de 1 m ou mais. Esta espessura já é suficiente para absorver 99% dos fons gama originados no leito do rio.

9 - Resultados e Conclusões

O programa desenvolvido em linguagem C para o microcontrolador ATMEL resultou bastante eficiente e simplificado, possibilitando fácil operação em campo ou laboratório.

Para o detetor de NaI(Tl) de dimensões 3"x3" o tempo de medida para uma relação sinal/ruído otimizada é de 2 minutos por medida. Portanto, para se preencher todo o espaço da memória disponível de dados, seria necessário um tempo mínimo de 512 minutos, i.é, 8,6 horas de operação em modo de aquisição. Como a bateria tem autonomia de operação contínua de 10 horas, pode-se adquirir dados durante o dia todo e realizar seguramente, a transferência do banco de dados para um palmtop ou PC. Mesmo no caso de esgotamento total da carga da bateria do espectrômetro gama, os dados não serão perdidos pois estão gravados em memórias E²PROM não voláteis.

Os valores de contagem obtidos sobre os padrões do IRD mostram que os ajustes do limiar de detecção (*threshold*) e da largura das janelas dos discriminadores SCA do GAD-6 estão corretos. A deriva do fotopico do ¹³³Ba, para uma queda de tensão de 1,5 V da bateria *gell-cell* ou uma variação de 5° C na temperatura, foi inferior a 1%. Também os dados devido ao ruído eletrônico e atmosférico, obtidos sobre a lâmina d'água, têm médias pouco abaixo das contagens do *pad* BKG como era esperado.

alfa	beta	gama
0,971±0,053	0,914±0,054	0,93±0,12
a	b	c
-0,011±0,028	-0,028±0,029	-0,032±0,025

Tabela 2. Parâmetros de Calibração do Espectrômetro Gama Obtidos dos Dados do IRD/CNEN.

Os valores de α , β , γ (tabela 2) determinados estão condizentes com os apresentados por *Grasty & Shives* (1997), para um detetor típico de 3"x3" ($\alpha=0,71$, $\beta= 0,88$ e $\gamma=1,0$), embora o parâmetro alfa determinado esteja um pouco acima do esperado isto se deve à idade do cristal de NaI(Tl). Os fatores de interferência **a**, **b** e **c** determinados, estão próximos de zero, como esperado. A teoria da propagação de erros (Max, 1959) usada no presente trabalho encontra-se em anexo .

Portanto, o equipamento desenvolvido apresenta deriva de fotopicos desprezível e as contagens nas janelas de detecção são confiáveis. Medidas comparativas feitas juntamente com um espectrômetro gama diferencial GEOFYSIKA GS-256 nos pads do IRD mostram que o equipamento recuperado tem a mesma performance dos existentes no mercado.

10 - Bibliografia

1- ATMEL®, *Data Book, 1997-8Bit Microcontroller with 8k Bytes Flash –AT89S8252 0401D-A-12/97*. www.atmel.com.

2- Cady, F.M., 2000- *Microcontrollers and Microcomputers Principles of Software and Hardware Engineering*. Oxford University Press.

3- *Grasty, R.L. & Shives R.B.K., 1997- Applications of Gamma Ray Spectrometry to Mineral Exploration and Geological Mapping- Work shop Manual*.

4- *Helene, A.M. & Vanin R.V., 1981- Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental. 2 ed. – Edgar Blücher Ltda*.

5- INTEL® - *Data Book, 1994 - Embedded Microcontrollers MCS 48, MCS 51, MCS 96 – Intel Corporation*.

6- *Max, A. M., 1959 – Geophysical Data Analysis: Understanding inverse problem Theory and Practice – Society of Exploration Geophysicists.-Vol6 pg 1-296*.

7- *Medeiros, P.M.C., Austerlitz, C., Malheiros, T. Lovborg, L., 1986 – Radioactive concrete sources at IRD/CNEN, Brazil for the calibration of uranium exploration and environmental field instruments. IRD/CNEN*.

8- *SCINTREX, 1979- GAD-6: Four Channel Stabilized Gamma-Ray Spectrometer*.

9- *Silva N. & Hiodo F.Y., 2002 - Recuperação de um Espectrômetro Gama Portátil de Prospecção Geofísica através de Microcontrolador- Trabalho de Graduação- Depto de Geofísica-USP*

11 - Anexo

A determinação da matriz covariância segundo Max, A.M., 1959, é feita a partir da matriz de sensibilidade **S** descrita e dos dados de concentração do IRD/CNEN **C**. Inicialmente é calculada uma matriz de contagens **Nm** em função dos parâmetros acima descritos:

$$Nm=C*S$$

A diferença entre a matriz de contagens (**e**) medidas sobre os pads (**N**) e a matriz de contagens calculada (**Nm**) é uma estimativa da incerteza na determinação de **S**:

$$e=N-Nm$$

E sua norma ao quadrado **E²**:

$$E^2=e*e$$

Onde a variância σ^2 nos dados:

$$\sigma^2=E^2/(n-p)$$

Onde n é o número de medidas (21) e p o número de parâmetros (9).

E a matriz covariância **Cov (S)** (Max, 1959):

$$Cov (S)= \sigma^2*inv(C*C)$$

Adotando a seguinte notação para matriz **S** e σ^2 :

$$\sigma(s_{xx}) = \sigma_{xx}$$

$$Cov = \begin{pmatrix} \sigma_{kk} \sigma_{kk} & \sigma_{ku} \sigma_{uu} & \sigma_{kt} \sigma_{tt} \\ \sigma_{uk} \sigma_{kk} & \sigma_{uu} \sigma_{uu} & \sigma_{ut} \sigma_{tt} \\ \sigma_{tk} \sigma_{kk} & \sigma_{tu} \sigma_{uu} & \sigma_{tt} \sigma_{tt} \end{pmatrix}$$

De onde obtemos as constantes de stripping:

$$a = S_{ut}/S_{uu}, \quad b = S_{kt}/S_{kk}, \quad c = S_{ku}/S_{kk}$$

$$\alpha = S_{uu}/S_{tt}, \quad \beta = S_{tk}/S_{tt} \quad \text{e} \quad \gamma = S_{uk}/S_{uu}$$

Por propagação de erros (Helene, A.M. & Vanin R.V.-1981):

$$\sigma_a = ((\partial a/\partial S_{ut})^2 \sigma_{ut}^2 + (\partial a/\partial S_{uu})^2 \sigma_{uu}^2 + (\partial a/\partial S_{ut}) \sigma_{ut} (\partial a/\partial S_{uu}) \sigma_{uu})^{1/2}$$

Similarmente b e c. E;

$$\sigma_\alpha = ((\partial \alpha/\partial S_{uu})^2 \sigma_{uu}^2 + (\partial \alpha/\partial S_{tt})^2 \sigma_{tt}^2 + (\partial \alpha/\partial S_{uu}) \sigma_{uu} (\partial \alpha/\partial S_{tt}) \sigma_{tt})^{1/2}$$

Similarmente b e c. E;

Que resultam:

$$\sigma_a = ((\sigma_{ut}/S_{uu})^2 + (S_{ut}\sigma_{uu}/S_{uu}^2)^2 + (-\sigma_{ut}S_{ut}\sigma_{uu}/S_{uu}^3))^{1/2}$$

E:

$$\sigma_\alpha = ((\sigma_{uu}/S_{tt})^2 + (S_{uu}\sigma_{tt}/S_{tt}^2)^2 + (-\sigma_{uu}S_{uu}\sigma_{tt}/S_{tt}^3))^{1/2}$$

Agradecimentos: IRD-CNEN Rio de Janeiro.