



Uma Solução Analítica do Problema de Weaver da Falha Infinita, Modo TE Magnetotelúrico

Raimundo Nonato Menezes Guimarães e Luiz Rijo, UFPA – Brasil

Copyright 2003, SBGF - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 8th International Congress of The Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, 14-18 September 2003.

Contents of this paper was reviewed by The Technical Committee of The 8th International Congress of The Brazilian Geophysical Society and does not necessarily represents any position of the SBGF, its officers or members. Electronic reproduction, or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

In this work we propose an analytic solution for the Magnetotelluric TE mode infinite fault (Weaver's problem), taking in consideration the presence of the air. Our solution following the hybrid solution, partially analytic and partially numeric, presented in 1985 by Sampaio. In his solution he applied eight boundary conditions. We found that four of them are mathematically inconsistent and had to be modified. Due to that, Sampaio's solution seems to diverge. The modification of the boundary conditions took us to the analytic solution discussed here. This solution is compared with those obtained by Weaver and by Sampaio and also with a finite elements approximate solution, using resistivity contrasts, between the two sides of the fault, equal to 2, 10 and 50. As a result, the analytic solution obtained here for the normalized electric field shows a better fit with the finite element solution than those proposed by either Weaver or Sampaio. Our solution is analytical but is not exact yet. This is a very difficult problem and it is still open to a definitive exact solution. The one shown here is just one big step toward this goal. More research must be done.

Introdução

A modelagem de dados magnetotelúricos de estruturas bidimensionais é, em geral, bastante complexa para ser tratada analiticamente. Apenas estruturas muito simples como diques e falhas verticais aflorantes são susceptíveis de serem tratados de forma exata. Entre as soluções numéricas de estruturas complexas estão o método das equações integrais (Hohmann, 1971), o método das diferenças finitas (Jones, 1972) e o método dos elementos finitos (Rijo, 1977). Entre as soluções analíticas de modelos simples estão as de d'Erceville & Kunetz (1962), para o caso de polarização magnética (TM) de uma falha vertical aflorante e a solução aproximada de Weaver (1963), para o caso de polarização elétrica (TE), também da falha vertical. Na polarização TM o meio acima da superfície (a camada de ar) não precisa ser levada em consideração. Na polarização TE a camada de ar acima da superfície tem que ser incluída na formulação do problema. A solução de Weaver é aproximada porque ele não considerou a influência da camada de ar acima da superfície. Sampaio (1978) propôs uma modificação da solução de Weaver (1963), mantendo a mesma condição de contorno para a

componente horizontal do campo magnético no cálculo do campo elétrico, mas adicionando uma correção para o campo magnético através de expressões e condições de contorno independentes. Dando continuidade a seu trabalho anterior, Sampaio (1985) propôs uma nova abordagem que investiga o espalhamento de uma onda eletromagnética por uma falha vertical infinita no caso de polarização elétrica (TE), analisando o comportamento do campo elétrico nas três regiões do espaço e empregando as condições de contorno exatas em todas as fronteiras. Tal formulação constitui uma extensão dos trabalhos de Weaver (1963) e de Sampaio (1978). Heimer (2001) resolveu o mesmo problema proposto por Weaver (1963) e Sampaio (1985) usando o método dos elementos finitos e chegou a um resultado bastante diferente do alcançado por Sampaio (1985) e, paradoxalmente, mais próximo da solução aproximada de Weaver. Para investigar a diferença entre seus resultados e o de Sampaio, Heimer computou os 16 primeiros termos da série de Neumann contida na solução de Sampaio, contra apenas três termos computados por aquele autor. Apresentando o resultado em forma de gráficos, Heimer verificou que a solução de Sampaio divergia à medida que o número de termos aumentava. Mesmo com apenas três termos a solução original de Sampaio já indicava um certo grau de descontinuidade. Tal situação sinalizou para a possibilidade de que o resultado obtido por Sampaio (1985), na verdade, era incorreto, devendo, portanto, ser reanalisado matematicamente de modo criterioso, para tirar qualquer tipo de dúvida a esse respeito. Este é o objetivo do presente trabalho.

Conforme as Figuras de 1 a 6 obtidas com 2 a 16 iterações da solução de Sampaio, retiradas de Heimer (2001), observa-se claramente que com o aumento do número de termos da série, a solução de Sampaio (1985) diverge. A solução numérica por elementos finitos é representada por círculos (usando o algoritmo do campo total) e por linha pontilhada (usando o algoritmo do campo secundário). Acredita-se que a solução por elementos finitos esteja correta.

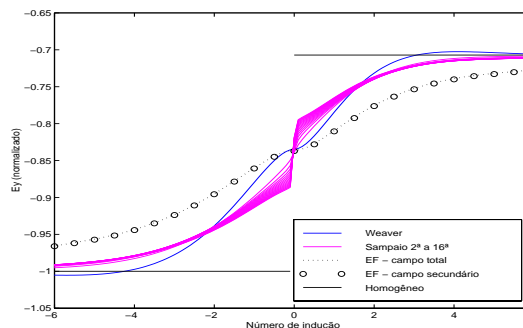


Figura 1: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para R=2.

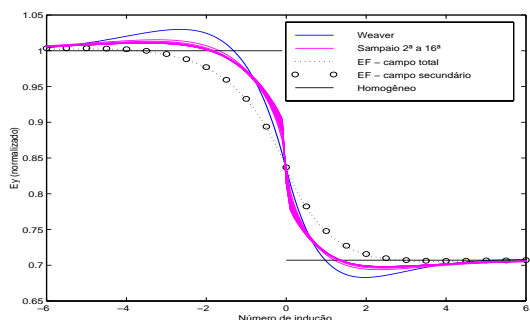


Figura 2: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para R=2.

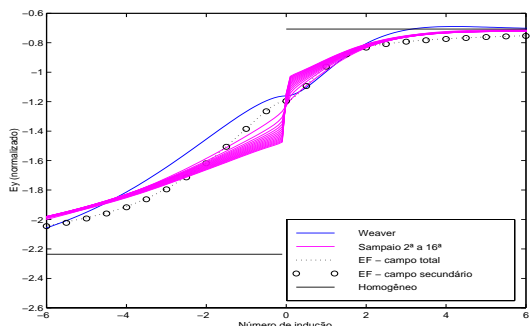


Figura 3: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para R=10.

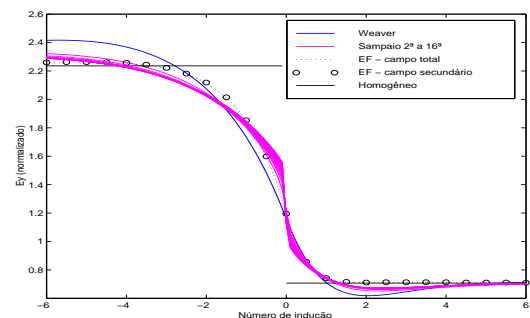


Figura 4: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para R=10.

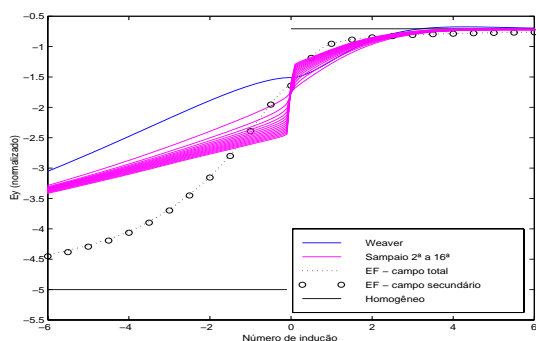


Figura 5: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para R=50.

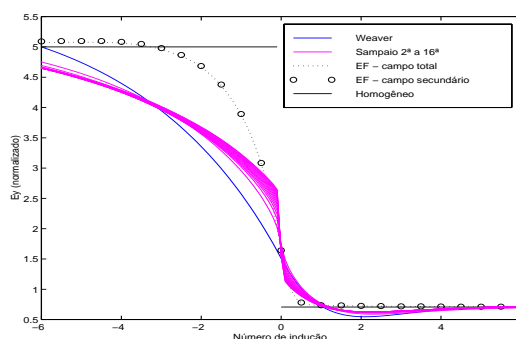


Figura 6: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para R=50.

Formulação do problema

O problema a seguir foi proposto por Sampaio (1985), para a resolução do problema de espalhamento de uma onda eletromagnética plana de polarização elétrica, ou modo TE, incidente sobre uma *falha infinita vertical*, conforme é mostrado na Figura 7.

Esta metodologia consiste em solucionar a *equação de onda de Helmholtz*, em duas dimensões:

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_i}{\partial z^2} + k_i^2 E_i = 0, \tag{1}$$

em que: $\begin{cases} i = 0, 1, 2 ; \\ \text{Re}[k_i] > 0 ; \end{cases}$

sujeita às condições de contorno apropriadas.

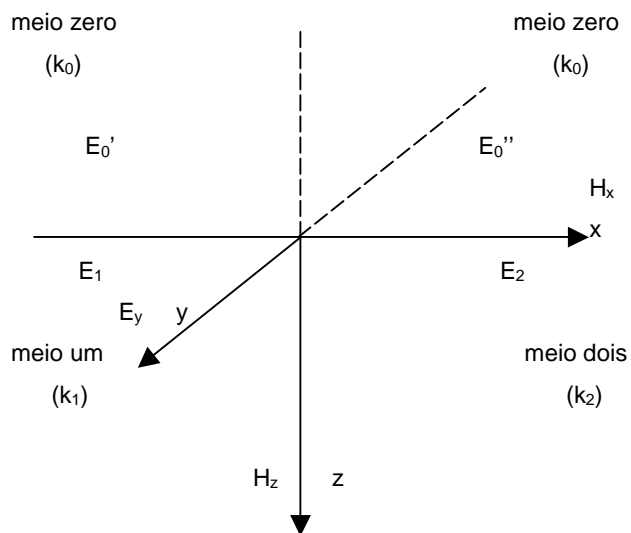


Figura 7: Modelo da falha infinita modo TE

Discussão dos resultados e exemplos

Após uma minuciosa análise da solução de Sampaio constatamos que das oito condições de fronteira usadas

por ele, apenas quatro eram consistentes do ponto de vista matemático. Esta é a razão porque a solução apresentada por Sampaio diverge. Detectadas e corrigidas as falhas das condições de contorno e após a resolução do sistema de oito equações resultantes da aplicação das oito condições de contorno corretas e aplicando-se a normalização dos campos elétricos pelo número de indução θ_2 , obtemos as seguintes expressões analíticas:

$$E_{yN}^{(1)}(\theta_2) = -\sqrt{-jR} - j \frac{4\sqrt{-jR}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-jt\theta_2}}{t + \sqrt{t^2 - j\frac{1}{R}}} dt, \quad (2)$$

$$E_{yN}^{(2)}(\theta_2) = -\sqrt{-j} - \frac{4\sqrt{-j}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-jt\theta_2}}{t + \sqrt{t^2 - j}} dt. \quad (3)$$

Mesmo sendo analítica, esta solução, infelizmente, não é exata. Isto foi verificado experimentalmente comparando com os dados das curvas das Figuras de 8 a 13. Isto nos levou a incluir, empiricamente, vínculos de continuidade exatamente em cima da falha, onde as soluções de Weaver e dos elementos finitos coincidem. A Tabela 1 mostra os parâmetros que vincula a solução. Os campos normalizados com tais parâmetros são:

$$E_{yN}^{(1)}(\theta_2) = -\sqrt{-jR} + j \frac{A\sqrt{-jR}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-jt\theta_2/C}}{t^2 + \sqrt{t^2 - j\frac{1}{R}}} dt, \quad \theta_2 < 0. \quad (4)$$

$$E_{yN}^{(2)}(\theta_2) = -\sqrt{-j} + \frac{B\sqrt{-j}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{e^{jt\theta_2/C}}{t^2 + \sqrt{t^2 - j}} dt, \quad \theta_2 > 0. \quad (5)$$

Tabela 1: Parâmetros dos campos em (4) e (5)

R	A	B	C	Re(E _{yN})	Im(E _{yN})
2	0,43	-0,56	-10/13	Sim	Não
10	0,87	-2,10	-0,5	Sim	Não
50	0,94	-3,30	-0,25	Sim	Não
2	-0,24	0,38	-10/13	Não	Sim
10	-0,70	1,00	-0,5	Não	Sim
50	-0,75	1,90	-0,25	Não	Sim

Como a solução de Sampaio é do tipo híbrido (metade analítica e metade numérica) é impraticável aplicar o mesmo tipo de vínculos empregados aqui. É exatamente a falta de vínculo de continuidade que faz com que a solução de Sampaio seja divergente. Os resultados gráficos finais obtidos após a efetivação deste trabalho foram os seguintes:

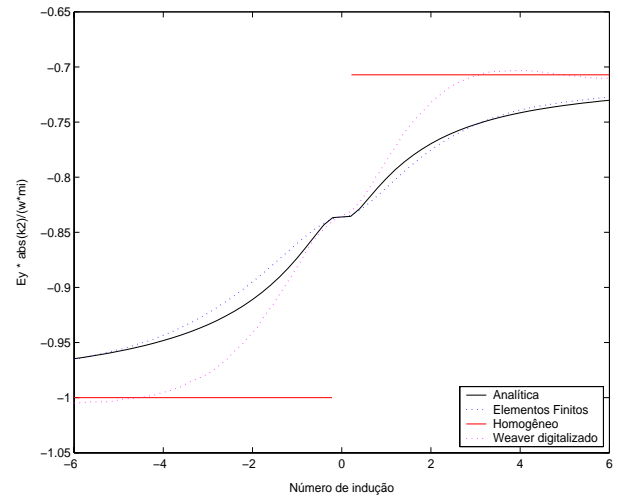


Figura 8: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para R=2.

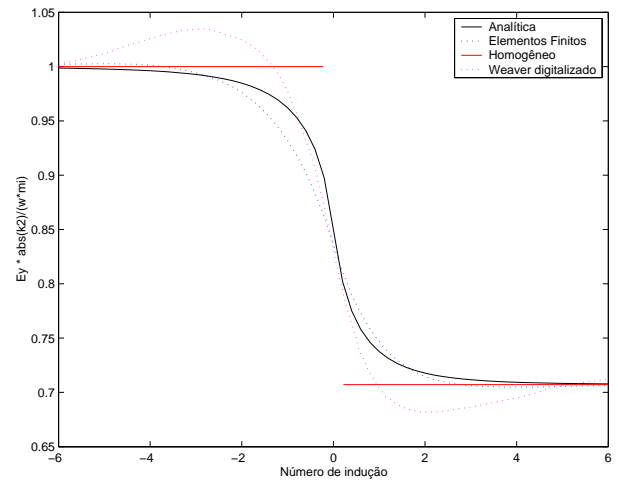


Figura 9: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para R=2.

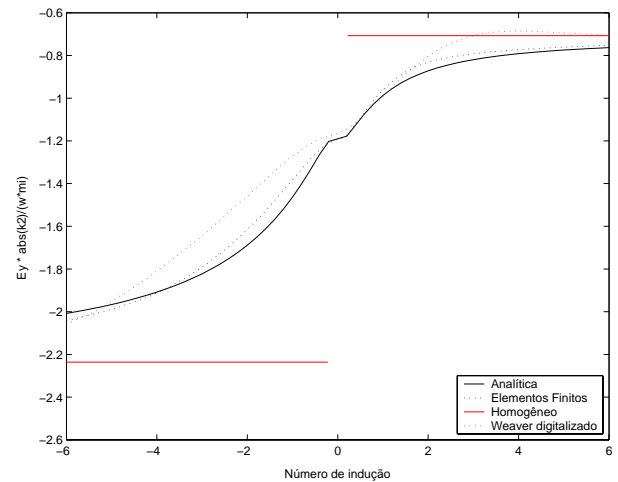


Figura 10: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para R=10.

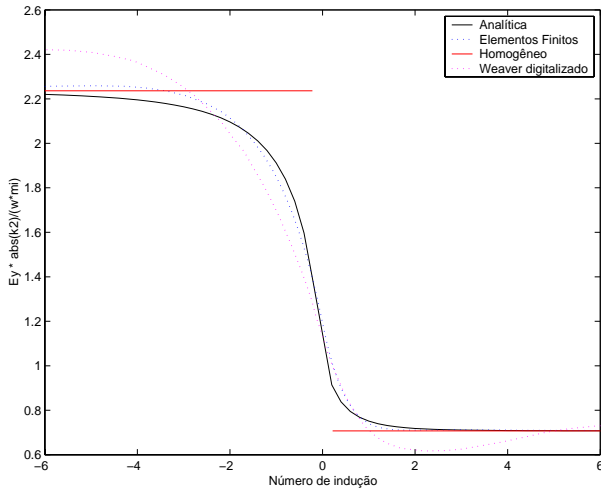


Figura 11: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para $R = 10$.

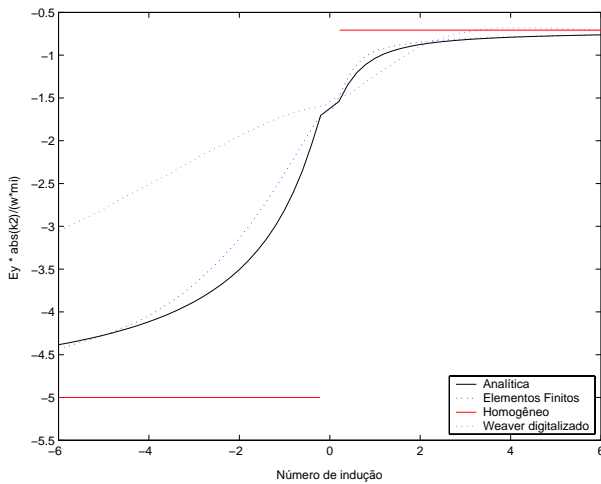


Figura 12: Parte real do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=50$.

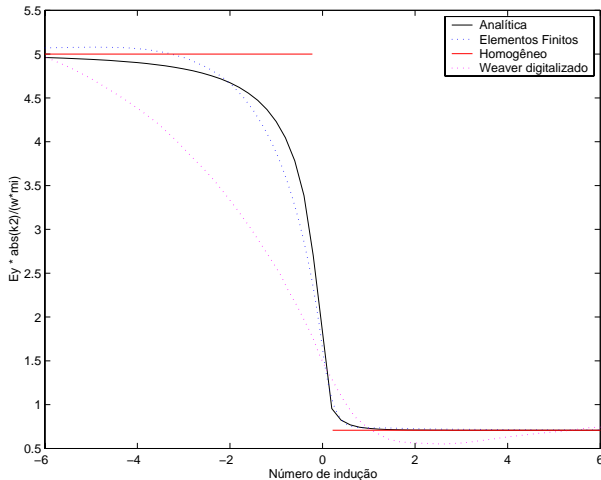


Figura 13: Parte imaginária do campo elétrico normalizado no modo TE para $R=50$.

Conclusões

Apresentamos aqui uma solução analítica do modelo da falha infinita para o modo TE magnetotelúrico utilizando como base o trabalho de Sampaio (1985). A comparação da solução analítica para o campo elétrico normalizado apresentada nas equações (4) e (5), com a solução de elementos finitos fornece a expectativa positiva de se conseguir resolver este problema totalmente de maneira analítica, considerando que os resultados por elementos finitos estejam razoavelmente precisos. A solução híbrida apresentada por Sampaio usa apenas três termos da série de Neumann. Isto nos leva a crer que com o aumento das iterações da série de Neumann a solução de Sampaio deveria convergir para um valor próximo ao valor exato esperado, entretanto isto não ocorre, conforme foi mostrado por Hiemer (2001). Na verdade, a solução proposta por Sampaio diverge em virtude da inconsistência das condições de contorno utilizadas. Os gráficos da solução final apresentada neste trabalho apresentam a flexibilidade de vincular as soluções, dos dois meios em cada lado da falha, a partir dos parâmetros introduzidos empiricamente a partir da solução de Weaver próximo à falha. Em virtude da imposição destes parâmetros de vinculação, a solução aqui apresentada, embora convergente e próxima da solução numérica por elementos finitos, ainda não é uma solução exata no sentido preciso da palavra. Assim, o problema de Weaver continua em aberto, esperando uma solução exata. A solução numérica por elementos finitos é bastante precisa, embora seja uma solução aproximada.

Agradecimentos

Aos órgãos fomentadores ANP e CNPq pelo apoio dispensado ao Laboratório de Processamento Eletromagnético do Departamento de Geofísica da UFPA (PROEM.) onde este trabalho foi realizado.

Referências

- D'ERCEVILLE, I & KUNETZ, G, 1962. The effect of a fault on Earth's natural electromagnetic field. *Geophysics*, 27(5), 651-465
- HIEMER, M. 2001. *Ensaio sobre a contribuição do ar nos resultados da modelagem do modo transversal-elétrico do método magnetotelúrico*. Belém, Universidade Federal do Pará, Departamento de Geofísica, 47 p. (Dissertação de Mestrado).
- HOHMAN, G. 1971, Electromagnetic scattering by conductors in the Earth near a source of current. *Geophysics*, 36(1): 101-131.
- JONES, F. W., & PRICE, A. T. 1970, The perturbation of alternating fields by conductive anomalies. *Geophysics*, 20: 317-334.

MENEZES, R. 2002. *Análise Teórica do Problema de Weaver da Falha Infinita, Modo TE Magnetotelúrico*. Belém, Universidade Federal do Pará, Departamento de Geofísica, 109 p. (Dissertação de Mestrado).

RIJO L. 1877, Modeling of electric and electromagnetic data. PH.D. Thesis, University of Utah.

SAMPAIO, E. E. S. 1985. *Espalhamento de uma onda eletromagnética plana por dois quartos-de-espaço condutores*. UFBA, 35 p. (Trabalho de professor titular).

SAMPAIO, E. E. S. 1978. *Perfilagem eletromagnética de falhas e diques verticais empregando campos de onda plana*, UFBA/ PPPG, 140 p. (Tese de Doutorado).

WEAVER J. 1963. The electromagnetic field within a discontinuous conductor with reference to geomagnetic micro pulsations near a coast line. *Canadian Journal of Physics*, 42(3): 484-495.