

Propagação de Ondas Elásticas em Meios Isotrópicos através do método de Bubnov-Galerkin com dois graus de liberdade: "Um Estudo do deslocamento"

Carlos Eduardo Guerra*, Departamento de Matemática, Campus de Santarém, UFPA
 Jadir da Conceição da Silva, Departamento de Geologia, IGEO, CCMN, UFRJ

Copyright 2003, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 8th International Congress of The Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, 14-18 September 2003.

Contents of this paper were reviewed by The Technical Committee of The 8th International Congress of The Brazilian Geophysical Society and does not necessarily represents any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction, or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

The displacement wave equation in three dimensions is numerically solved in a cylindrical geometry with axial symmetry. The studied area is closed; of course, the radio and the height are finite. A media matter fills out the cylinder, such that a perfect elastic way is achieved. The media is equally divided in triangular elements equally distributed and with the same dimensions. In each element, the two components of the displacement are calculated in the three vertexes. The distribution of displacements in the considered geometry is obtained then through the composition of the same ones, made calculations in each element. The temporary variations of these distributions are obtained then approximately through an outline of finite differences.

Introdução

Uma etapa importante na obtenção de modelos de prospecção sísmica e principalmente de perfilagem acústica consiste em simular o efeito da presença de um meio acústico perfeito (fluido) junto com um meio perfeitamente elástico (rocha) na propagação de ondas. No fluido, por uma questão de simplicidade, considera-se apenas a propagação da pressão. Já no meio elástico, trabalhar com a tensão significaria manipular simultaneamente três variáveis (componentes da tensão) o que levaria inevitavelmente a considerar todas as componentes da equação da onda. Em modelos que admitem uma simetria cilíndrica, tais como os do tipo poço-formação, uma abordagem que utilize os deslocamentos poderia introduzir uma significativa simplificação, reduzindo o número de variáveis para duas componentes e, conseqüentemente, o número de equações necessárias, i.é, duas equações da onda, uma para o deslocamento radial e outra para o longitudinal.

Neste trabalho, focalizaremos a atenção no estudo da propagação das ondas elásticas em meios homogêneos e isotrópicos assumindo uma simetria cilíndrica perfeita aliada a ausência de deslocamentos azimutais. O modelo em questão parte das equações de movimento em coordenadas cilíndricas simplificadas para uma geometria axisimétrica ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU_r) + \lambda \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U_z}{\partial r} + r \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) + f_r = \rho \ddot{U}_r \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial}{\partial r} (rU_r) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U_z}{\partial r} + r \frac{\partial U_r}{\partial z} \right) + f_z = \rho \ddot{U}_z$$

A Geometria utilizada pode ser visualizada na Figura (1), onde notamos que a fonte possui também uma simetria cilíndrica e que a sua componente em z não está presente.

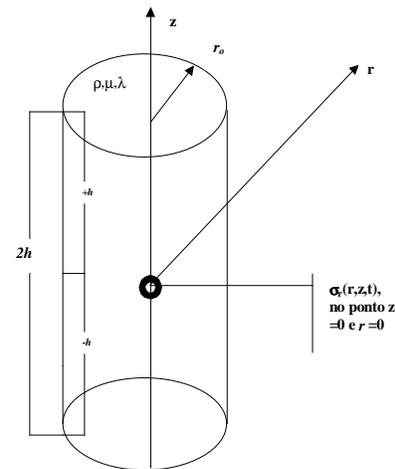


Figura 1 : Modelo geométrico de uma região cilíndrica preenchida por um meio elástico. A região simula uma seção de rocha de comprimento 2h e raio r_0 . Nesta geometria, será obtida uma solução numérica da equação da onda na forma de deslocamento.

Soluções analíticas elásticas em coordenadas cilíndricas da equação da onda em deslocamento não são fáceis de serem obtidas. Alguns autores preferem trabalhar em coordenadas esféricas quando se trata de meios homogêneos, onde a solução assume a forma $u = f(r, z, t)/r$. Foi assim que Sharpe (1942) e Blake (1942) obtiveram uma solução puramente compressional devido a excitação do meio elástico por uma cavidade esférica. Posteriormente, White (1965) estudou a geração dos campos de pressão e deslocamentos devidos a ação de diversos tipos de fontes. Por outro lado, é na presença de geometrias heterogêneas que se observa a complexidade das soluções analíticas. O trabalho de Tsang and Kong (1979) é um exemplo típico, mesmo

adotando uma fonte pontual. A presença da interface introduz um problema adicional de continuidade e o acoplamento entre fluido e sólido exige o uso de potenciais de Helmholtz (Graff, 1975), a fim de simplificar a obtenção da solução geral.

Pensando numa forma de trabalhar diretamente com as componentes da equação da onda (1), somos remetidos diretamente ao uso de uma metodologia que trabalhe com soluções aproximadas, ou seja, uma abordagem numérica. Pela técnica de elementos finitos, as funções deslocamento radial e longitudinal não são obtidas em todos os pontos do espaço e sim num número finitos de pontos que são denominados nós. Estas funções são substituídas por um conjunto de funções interpoladoras. Uma integração é então efetuada nas componentes da equação da onda tendo-se como base a região discretizada (Desay, 1979). O resultado é um sistema de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem que pode ser resolvido por um método convencional qualquer (Reddy, 1993). Normalmente utiliza-se o método de diferenças finitas centrais devido a sua facilidade de implementação e a sua fácil convergência.

Finalmente, o objetivo final deste trabalho é obter uma solução por elementos finitos da equação da onda em deslocamento num meio homogêneo e elástico, excitado por uma fonte pontual. Esta solução numérica será comparada com uma solução analítica clássica para o problema da propagação de ondas em meios elásticos White (1974). Esta metodologia será o ponto de partida para a implementação de uma abordagem mais completa que vise o estudo de propagação de ondas em meios heterogêneos isotrópicos e anisotrópicos.

Metodologia

Neste trabalho, queremos resolver a equação da onda numa região cilíndrica de altura $2h$ e raio r_0 . A região é totalmente preenchida por meio elástico de densidade P e parâmetro de Lamé λ e compressibilidade μ (Figura 1). No ponto de coordenadas $(r=0, z=0)$ uma fonte pontual transiente no tempo excita o meio. Podemos representar o cilindro como uma região plana Ω no espaço $\langle xyz \rangle$ que sofre uma rotação em torno do eixo z .

$$\Omega = (x=0) \cap (y \geq 0) \cap (y \leq r_0) \cap (z \geq -h) \cap (z \leq h). \quad (2)$$

Em coordenadas cilíndrica, a região obtida pela rotação de Ω é definido por Ω^T , ou seja :

$$\Omega^T = (r \leq r_0) \cap (r \geq 0) \cap (z \leq h) \cap (z \geq -h) \cap (\theta \geq 0) \cap (\theta \leq 2\pi).$$

O problema a ser resolvido numericamente consiste das equações (1) sujeita, às seguintes condições iniciais e de fronteira:

$$U_r(r, z, 0) = U_z(r, z, 0) = 0, t \geq 0$$

$$\frac{\partial U_r(r_0, z, t)}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial U_z(r, h, t)}{\partial z} = \frac{\partial U_z(r, -h, t)}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$f_z(r, z, t) = 0$$

$$f_r(r, z, t) = Al^{-\alpha} \text{sen}(\beta t) \frac{\delta(r)\delta(z)}{2\pi r}, 0 \leq t \leq t_f.$$

Começamos o procedimento por dividir a região Ω^T em n sub-regiões triangulares Ω^e . Por uma questão de simplicidade e de simetria do problema, assumiremos que as regiões Ω^e possuem a mesma área e as mesmas dimensões. Em cada vértice do triângulo definimos os deslocamentos nodais U_{ri}^e e U_{zi}^e , onde "i" é o número do vértice e "e" é o elemento em questão. Como o sistema de coordenadas é o cilíndrico e a região é axi-simétrica, os campos de deslocamentos independem do ângulo azimutal θ , e discretização da região Ω^T assume um caráter "2D", ou seja, é como se estivéssemos trabalhado sobre a região plana. Na Figura 2 podemos observar o aspecto da região discretizada.

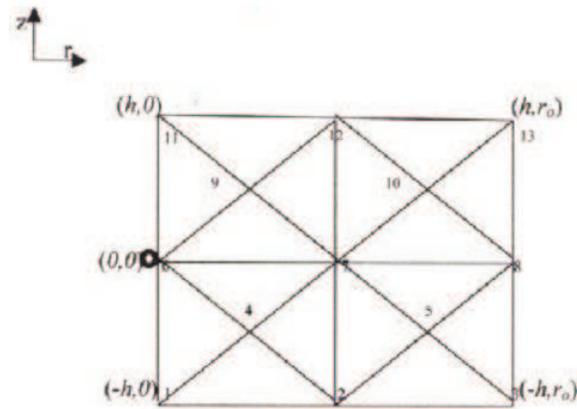


Figura 2

Região Ω^T discretizada com 8 elementos de áreas triangulares idênticos. No nó 4, cuja coordenada é $(r=0, z=0)$, uma fonte pontual excita o meio fluido. Embora a região estudada seja 3D, a discretização assume um caráter 2D, uma vez que Ω^T possui simetria cilíndrica e P independe da coordenada θ .

Como se pode observar na equação (1), a fonte possui componentes em r e z . Como queremos simular uma fonte pontual do tipo monopolo, devemos considerar apenas a componente r . Integrando (1) em relação ao volume V considerado, segundo o procedimento padrão do método de BUBNOV-GALERKIN para a discretização (com elementos triangulares) de uma região cilíndrica

axisimétrica, obtemos as seguintes matrizes locais de rigidez e massa respectivamente:

$$[K_s]_{6 \times 6} = \left[-2\pi r_c \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\beta_i\beta_j + \mu\gamma_i\gamma_j & \lambda\gamma_i\beta_j + \mu\beta_i\gamma_j \\ \lambda\gamma_i\beta_j + \mu\beta_i\gamma_j & (\lambda+2\mu)\beta_i\beta_j + \mu\gamma_i\gamma_j \end{pmatrix} ds \right]_{j=1,2,3} \quad (4)$$

$$[K_m]_{6 \times 6} = \left[-2\pi r_c \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega_i} \begin{pmatrix} N_i N_j & 0 \\ 0 & N_i N_j \end{pmatrix} ds \right]_{j=1,2,3}$$

Finalmente, a equação da onda discretizada assume a forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\sum_{e=1}^{ne} [K_m^e]_{6 \times 6} [\ddot{U}]_{6 \times 1} = - \sum_{e=1}^{ne} [K_s^e]_{6 \times 6} [U]_{6 \times 1} + \frac{\exp(-\alpha t) \text{sen}(w_0 t)}{2\pi} [f]_{6 \times 1} \quad (5)$$

Os vetores $[\ddot{U}]_{6 \times 1}$, $[U]_{6 \times 1}$ e $[f]_{6 \times 1}$ armazenam os deslocamentos radiais e longitudinais, as suas respectivas derivadas segunda no tempo e a fonte. Nota-se que um único vetor armazena ambas as soluções para deslocamento já que o método dois graus de liberdades.

A solução para deslocamento no domínio do tempo

A equação (5) é na verdade um sistema de equações diferenciais ordinárias do tipo linear de 2ª ordem, que resolve o problema do deslocamento em Ω^T , somando

soluções obtidas em cada sub-região elemento Ω^e . Entretanto, o somatório pode ser colocado na forma de um sistema global que contabiliza a contribuição total de cada elemento. Desta forma reescreveremos (5) na forma de um sistema único global, ou seja:

$$[K_{Gd}]_{n \times n} [\ddot{U}]_{n \times 1} = [K_{Gd}]_{n \times n} [U]_{n \times 1} + \frac{F(t)}{2\pi} [K_i]_{n \times 1} \quad (6)$$

A equação (6) é então reescrita usando-se um esquema de diferenças finitas centrais

$$\{[U]_{n \times 1}\}_{j+1} = (\Delta t^2 [K_{Gd}]_{n \times n}^{-1} [K_{Gd}]_{n \times n} + 2) \{[U]_{n \times 1}\}_j + \frac{F_j}{2\pi} \Delta t^2 [K_{Gd}]_{n \times n}^{-1} [K_i]_{n \times 1} - \{[U]_{n \times 1}\}_{j-1} \quad (7)$$

Para resolvermos a equação (7) temos que ter duas aproximações para as componentes do vetor deslocamento. O problema de propagação de ondas abordado neste trabalho impõe que as funções deslocamento, tensão e pressão sejam causais, ou seja, se o sinal da fonte é detectado a uma distância $d > 0$ é razoável supor que:

$$t < \frac{d}{c} \Rightarrow U_r(r, z, t) = U_z(r, z, t) = 0 \quad (8)$$

A equação diferencial (2), na forma analítica, juntamente com a condição inicial (6), é denominada “Problema de Cauchy”, e se levarmos em consideração as condições nas bordas da malha, teremos um problema típico de

valor de contorno. Na forma discreta, a condição inicial (6) pode ser reescrita como:

$$\{[U]_{n \times 1}\}_{-1} = \{[0]_{n \times 1}\}, \quad (9)$$

$$\{[U]_{n \times 1}\}_0 = \{[0]_{n \times 1}\}.$$

Exemplos

Nos resultados que serão mostrados a seguir, a equação da onda na forma de deslocamento, resolvida numericamente, assume a forma não homogênea onde o termo $f(r, z, t)$ representa uma fonte pontual com uma distribuição mostrada nas condições de contorno (3). Por definição a condição Neumam é assumida; logo, é possível perceber o problema numérico que isto acarreta. Para minimizar as indesejáveis reflexões no final da malha substituímos as condições de Neuman por duas novas condições a serem aplicadas em $r = r_0$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_p \frac{\partial}{\partial r} \right) U_r = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + V_s \frac{\partial}{\partial r} \right) U_z = 0 \quad (10)$$

As novas condições de fronteiras mostradas em (10) são denominadas de fronteiras absorventes (Higdon 1991) e tem como objetivo minimizar as reflexões na fronteira $r = r_0$ devido as chegadas das frentes de ondas P e S, respectivamente.

A solução numérica é então comparada com uma solução analítica obtida por White (1965):

$$U_R = A \int_0^{t'} g'(\tau) U_{RH}(\tau - t') d\tau$$

$$\text{onde } U_{RH} = \frac{a^3}{4\mu V_p} \delta(t'), \quad (11)$$

$g(t)$ é a distribuição da fonte no tempo mostrada em (3), U_{RH} é a solução devido a excitação devido uma função do tipo degrau unitário no tempo, V_p é a velocidade da onda P e a é o raio da cavidade esférica. Como observado em (11) a solução encontra-se em coordenadas esféricas. Para compararmos com a solução numérica é necessário converter a solução analítica para coordenadas cilíndricas, o que é feito numericamente calculando o ângulo entre o raio vetor $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ e o eixo r no sistema de coordenadas cilíndricas e, a seguir, decompondo U_R em U_r e U_z .

A FIGURA 3 mostra uma seqüência de “SNAPSHOT’S” referente à propagação das frentes de ondas P e S. Na seqüência, começando na primeira linha da esquerda

para direita, observam-se duas frentes de ondas que se propagam com velocidades distintas. A primeira frente, mais rápida trata-se da onda P e a segunda, que aparece como uma semicircunferência menor, se propaga com uma velocidade mais baixa. Na segunda linha o segundo e o terceiro quadro mostram um efeito residual de reflexão no final da malha. Este efeito deve-se ao fato de que as condições absorventes adotadas desprezarem o efeito da onda P em U_z e da onda S em U_r . As dimensões da malha foram projetadas proporcionalmente de forma a evitar a chegada da onda S na borda $r = r_0$. Pode-se demonstrar que as condições mostradas em (10) não são apropriadas para absorver as frentes de onda S .

Na FIGURA 4, temos uma seqüência de sismogramas sintéticos referente a chegada da onda P nos receptores a 84, 105 e a 127 cm da fonte. Estes sinais foram gerados por uma malha com 101 nós em r e 301 nós em z . A região discretizada possui dimensões $r=1.0$ m e $z=3.0$ m. O Δt utilizado foi de $0.8 \cdot 10^{-6}$ ms e a freqüência da fonte é de 10 KHz. Estes valores são suficientes para minimizar os problemas de alias e dispersão numérica, uma vez que eles satisfazem a relação de estabilidade $(\chi = \frac{C\Delta t}{\Delta r} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \Delta r = \Delta z)$.

Entretanto, devemos salientar que este critério não impede o aparecimento de freqüências parasitas, que podem ser observadas ao longo de todos os sismogramas, como uma pequena ondulação que acompanha todo o traçado das curvas. Estas freqüências parasitas só podem ser eliminadas ao custo de uma discretização bastante acentuada, o que nos leva a considerar o custo benefício com relação ao tempo e recursos computacionais. Um outro ponto que merece destaque é a comparação com a solução analítica. Uma vez que esta última foi obtida pela convolução da resposta ao degrau unitário com a distribuição temporal da fonte, o sismograma analítico jamais chegará a zero; isto pode ser observado nas figuras dos sismogramas antes do tempo de preenchimento ("zeropadding"), i.é., para todo $t \leq 1.25$ ms. Na verdade a comparação da solução analítica do tipo cavidade esférica com a solução pontual em elementos finitos só tem efeito prático se considerarmos os sinais como parte do denominado campo distante. Próximo da fonte (campo próximo) os sinais divergem uma vez que na solução por elementos finitos, a fonte situa-se no nó de coordenadas $(0,0)$, enquanto que a solução analítica só é contínua para R esférico maior ou igual a " a_0 ".

Conclusões

Este trabalho mostrou que é possível fazer uma modelagem numérica de propagação de ondas utilizando-se recursos computacionais convencionais, desde que sejam obedecidos os critérios matemáticos de convergência e estabilidade. As malhas regulares, confeccionadas com elementos triangulares, se mostraram perfeitamente aplicáveis para a discretização de espaços homogêneos. Obteve-se, com o método de Galerkin aplicado ao problema de duas variáveis por nó,

uma razoável eficiência na discretização espacial de uma região cilíndrica de dimensões longitudinais e radiais próxima de um metro por um metro, com uma densidade de oitenta pontos em cada eixo, o que perfaz uma densidade de pontos nodais da ordem de 30401, na malha. Também não houve a necessidade de empregar filtros ou janelas de freqüências para melhorar a qualidade do sinal modelado no tempo, uma vez que as freqüências parasitas ficaram restritas a uma amplitude aceitável e dentro de uma faixa compatível. Foi necessária apenas a aplicação de uma janela para separar a primeira chegada (onda P). Dada a freqüência alta do evento e o meio elástico com velocidade alta, a discretização temporal no esquema de diferenças finitas constitui o principal gargalo no processamento das soluções numéricas, sem que, no entanto, toma-se a metodologia inviável.

Referências

- WHITE, J. E.**, Seismic Waves, Radiation, Transmission, And Attenuation, McGraw-Hill, 1965.
- SHARPE, J. A.**, The Production of Elastic Waves By Explosion Pressures. I. Theory and Empirical Field Observations, *Geophysics*, Vol. 7 N° 1-4, P. 144-154, (1942).
- HIGDON, R. L.**, Absorbing Boundary Conditions for elastic waves, *Geophysics*, Vol. 56 N° 2, P. 231-241, (1991).
- DESAY, C.S.**, Elementary Finite Element Method, Prentice-Hall Inc. (1979).
- REDDY, J. N.**, An Introduction to the Finite Element Method, McGraw Hill, Inc, Second edition (1993).
- BOUCHON, M.**, A numerical simulation of the acoustic and elastic wavefields radiated by a source on a fluid-filled borehole embedded in a layered medium, *Geophysics*, Vol. 58 N° 4, P. 475-481, (1992).
- BUTKOV**, Física Matemática, LTC Editora, (1993).
- GJSKI, D. D.**, Principles of Digital Design, Prentice Hall (1997).
- GRAFF, K. F.**, Wave motion in elastic solids, Clarendon . Oxford (1975).
- ETGAN, J.T.**, accurate wave equation modeling, **SEP-60**, P. 131-148, Stanford University, (1989).
- WHITHAM, G. B.**, Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Sons Inc. (1974).
- MARFURT, K. J.**, Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations, *Geophysics*, Vol. 49, N° 5, P. 533-549, (1984).

WEAVER, H. J., Theory of Discrete and Continuous Fourier Analysis, John Wiley & Sons, Inc. (1989).

DIAS, J., et al, Introdução à Física, McGraw Hill de Portugal (2000).

GOLUB, G. H., Scientific Computing and Differential Equations, An introduction to Numerical Methods, Academic Press (1992).

BLAKE, F. G., Spherical Wave Propagation in Solid Media, The *Journal of Acoustical Society of America*, Vol. 24, N° 2, P. 211-215, (1962).

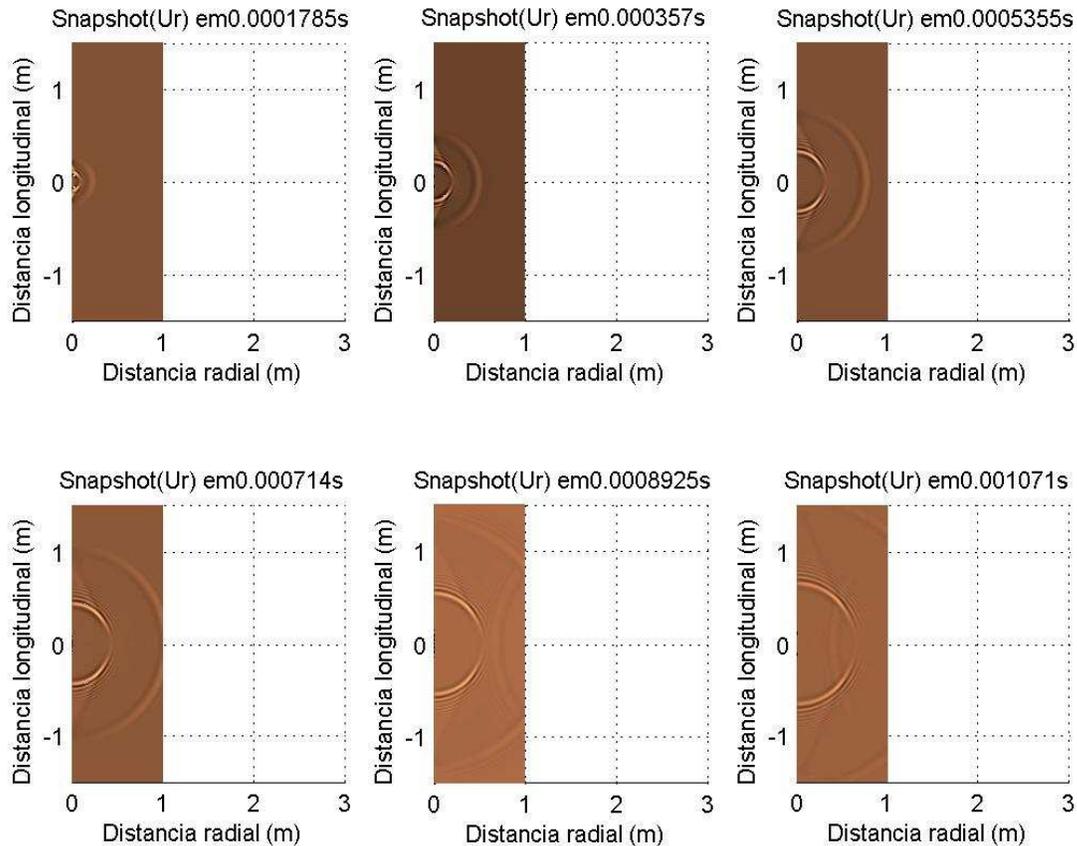


Figura 3: ‘Snaphots’ produzidos em um meio homogêneo, elástico e isotrópico, excitado por uma fonte pontual (monopolo). Na seqüência, observa-se que à medida que o tempo cresce, o raio da frente de onda cresce e o contraste com o meio diminui, indicando claramente uma perda de amplitude (mais precisamente energia) e a característica de retardo de $U(r,z,t)$. Neste modelo foi gerado com uma malha de $1.0m \times 3.0m$ com uma densidade de nós na faixa de 101×301 . Nota-se também, a presença de duas frentes de ondas (P e S) com velocidades distintas.

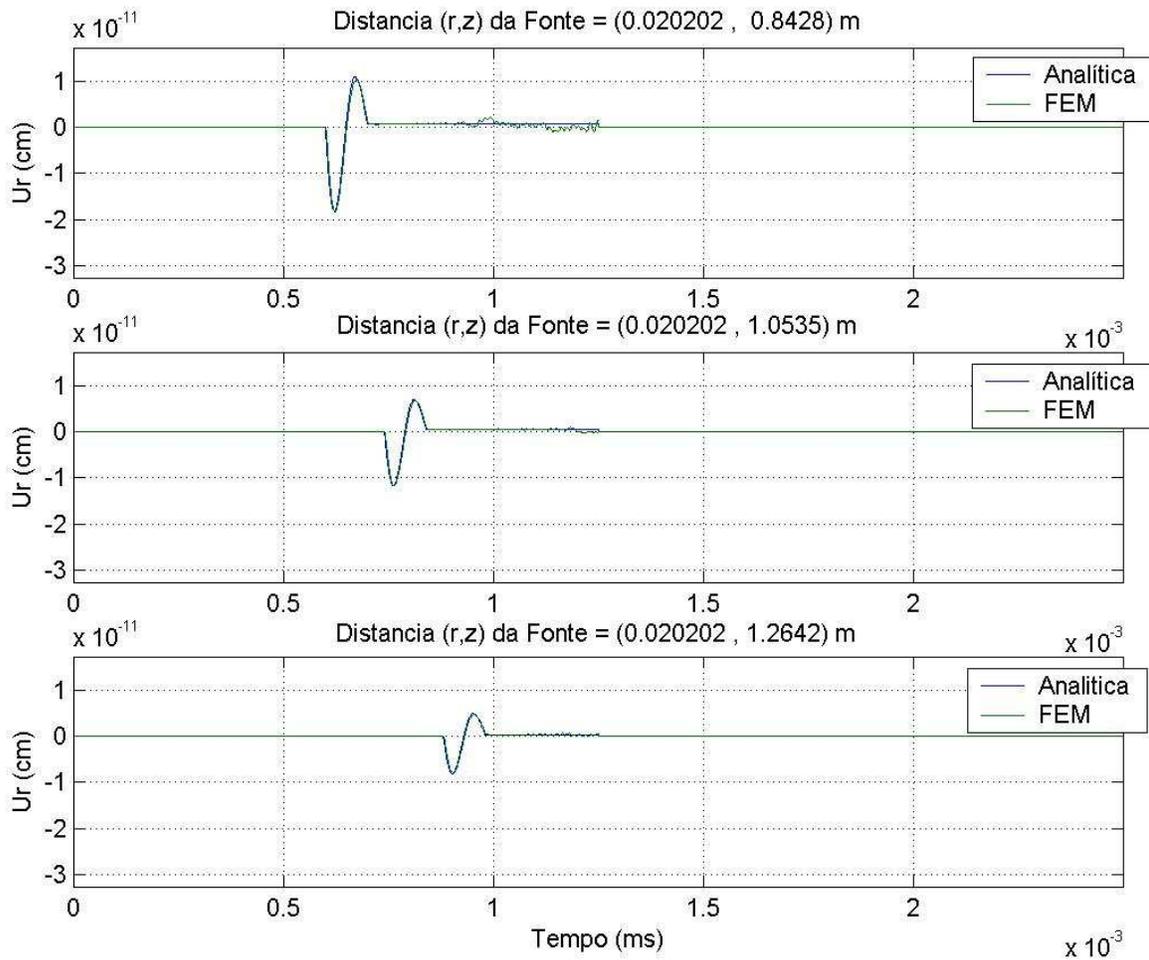


Figura 4: Sismogramas sintéticos obtidos em receptores afastados a 84, 105 e 127 cm da fonte, com uma discretização de 101 pontos em r e 301 em z . Nota-se o casamento na amplitude e na fase, mas observa-se também um efeito de dispersão numérica, vista como uma ondulação que acompanha toda a curva.