



Propagação de pulsos em meios anisotrópicos

Protázio J S., Pereira R M., CPGF/UFGA

Copyright 2003, SBGF - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 8th International Congress of The Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, 14-18 September 2003.

Contents of this paper was reviewed by The Technical Committee of The 8th International Congress of The Brazilian Geophysical Society and does not necessarily represents any position of the SBGF, its officers or members. Electronic reproduction, or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

AVO analysis is an important tool for extracting lithological information from seismic data using the contrast in acoustic impedance at lithological boundaries. The isotropic assumption behind this analysis does not hold in many cases. The advent of large offset surveys and multi-component data has revealed the presence of subsurface anisotropy. To interpret such data, the AVO analysis must include anisotropy. This work presents a pulse theory and numerical results for an arbitrary anisotropic layered medium.

First, are introduced equations generalized to the study of reflected and transmitted pulses at plane interface to anisotropy media; second, the behaviour of pós-critical reflected and transmitted pulses through a stack of anisotropic layers is discussed. The post-critical pulses are shown to carry valuable information on the anisotropy of the structure through which the waves propagate.

Introdução

Com a introdução de novas técnicas de aquisição de dados tais como as medidas de Perfil Sísmico Vertical (PSV), levantamentos com grandes afastamentos além do desenvolvimento de geofones com multicomponentes, a presença de anisotropia no estudo da propagação de ondas através de meios elásticos lineares passou a ser considerada (Thomsen, 1986). Por outro lado, micro estruturas mais regulares da subsuperfície como finas estratificações (Backus, 1962) ou microfaturas (Hudson, 1981; Schoenberg & Douma, 1988), em escala de heterogeneidade muito menor que o comprimento de ondas, comportam-se efetivamente como meios anisotrópicos. Portanto, o estudo do comportamento da propagação de ondas nestes meios constitui um tema muito promissor, principalmente pela sua potencialidade na descrição de aspectos micro-estruturais, atributos fundamentais na caracterização de reservatórios.

Métodos numéricos eficientes aplicados na propagação de ondas elásticas planas através de meios estratificados são bastante conhecidos, dentre eles: o método recursivo de Kennett aplicado no caso de camadas isotrópicas e a sua extensão para meios estratificados anisotrópicos mais gerais aplicada por Mandai & Mitchel (1986) e Fryer & Fraser (1987), além das adaptações para experimentos em VSP, aplicadas por Mallick & Fraser (1988). Todos se englobam nos chamados métodos de refletividade e sintetizam todo o processo de espalhamento sem,

entretanto, um estudo mais específico do comportamento de cada onda espalhada.

No caso particular da propagação de pulsos, o seu estudo foi originalmente estabelecido, no caso de estratificações isotrópicas, por Ewing et al (1957). Mais recentemente, Protázio (1994) propôs uma extensão do trabalho de Ewing, estudando o espalhamento de pulsos através de estratificações anisotrópicas, considerando-se meios com pelo menos um plano de simetria especular. Foram estudados os efeitos da presença de anisotropia na deformação dos pulsos espalhados bem como nos seus estados de polarização.

Neste trabalho é estabelecida uma extensão da propagação de pulsos através de estratificações horizontais, considerando-se camadas anisotrópicas arbitrarias. O comportamento pós-critico destes eventos são estudados para a obtenção de valiosas informações sobre a anisotropia das estruturas atravessadas pelas ondas propagadas

As equações de ondas em um meio elástico, linear e anisotrópico.

Em um meio perfeitamente elástico, linear e anisotrópico, com densidade ρ e parâmetros elásticos dados por c_{ijkl} , as equações que descrevem a propagação de ondas são dadas por (Auld, 1973):

$$\begin{aligned} \rho \partial_{tt} w_i &= \partial_j \tau_{ij} + f_i \\ \tau_{ij} &= c_{ijkl} \partial_l w_k \end{aligned} \quad (1.1)$$

sendo w_i , o campo de onda; ∂_{tt} , a segunda derivada no tempo; ∂_j , a j-ésima derivada espacial; τ_{ij} , o tensor de tração e f_i , uma fonte externa associada ao problema. As equações acima determinam a chamada equação de onda em meios elásticos gerais, dada por:

$$\rho \partial_{tt} w_i = \partial_j [c_{ijkl} \partial_l w_k] + f_i \quad (1.2)$$

A propagação de ondas planas

Uma onda harmónica plana tem a forma:

$$w_i = A n_j e^{-i\omega(t - x_k s_k)} \quad (1.3)$$

sendo A , a amplitude da onda; n_j , a sua polarização unitária; t , o tempo; ω , a frequência e s_k , o vetor de vagarosidade, que determina a direção normal da frente de onda. A sua substituição em (1.2), tomando-se $f_i = 0$, gera a conhecida equação de Christoffel:

$$(\Gamma_{ik} - \rho \delta_{ik}) n_k = 0 \quad (1.4)$$

sendo $\Gamma_{ik} = c_{ijkl} s_j s_l$ a chamada matriz de Christoffel, que tem como propriedades mais imediatas, ser simétrica e

positiva definida. Introduzindo a velocidade de fase por $s_i = \frac{m_i}{v}$, sendo m_i , uma direção unitária de s_i , a equação de Christoffel (1.4) é reescrita como o problema de auto-valor:

$$(\tilde{\Gamma}_{ik} - \rho v^2 \delta_{ik}) n_k = (c_{ijkl} s_j s_l - \rho v^2 \delta_{ik}) n_k = 0 \quad (1.5)$$

A condição de existência de soluções não triviais para (1.5) é que $\det(\tilde{\Gamma}_{ik} - \rho v^2 \delta_{ik}) = 0$. Esta equação apresenta três soluções, determinando conseqüentemente três velocidades $v_t \leq v_s \leq v_p$ em que os sub-índices t, s e p representam as ondas com menor, média e maior velocidades, respectivamente. Para cada uma destas, são determinadas as polarizações associadas n_{ij}, n_{si} e n_{pi} , que são ortogonais entre si. Fisicamente, a ocorrência destas três velocidades informa que em um meio anisotrópico arbitrário acontece a propagação de três ondas elásticas com velocidades, em geral, distintas em cada direção do vetor de fase s_i . Na maioria das vezes, os autovetores calculados são distintos, entretanto existem direções especiais em que a multiplicidade dos mesmos é dois ou três. Tais direções são conhecidas como singulares e, nestes casos, as polarizações ficam indefinidas. Para cada direção unitária m_i , $s_i = \frac{m_i}{v}$

determina uma superfície associada à velocidade de fase v . Cada uma destas superfícies leva o nome de superfície de vagarosidade da onda. Exemplos destas superfícies são mostrados nas Figuras 1 e 2. Nelas, as setas normais às superfícies de vagarosidade apontam na direção do vetor de velocidade da energia ou vetor de velocidade de grupo, definido em Auld (1973) como:

$$\mathbf{v}_g = \frac{\nabla F(s_i)}{\mathbf{s} \cdot \nabla F(s_i)}, \quad (1.6)$$

sendo $F(s_i) = \det(\Gamma_{ik} - \rho \delta_{ik})$. A vagarosidade e a velocidade de grupo satisfazem a conhecida relação de reciprocidade polar $\mathbf{s} \cdot \mathbf{v}_g = 1$.

O espalhamento de ondas planas através de meios anisotrópicos gerais.

Considerando-se um meio elástico anisotrópico arbitrário com densidade ρ e parâmetros elástico c_{ijkl} , o campo de uma onda plana em um horizonte arbitrário x_3 é descrito por (1.3). Para cada componente horizontal $\mathbf{s}_H = (s_1, s_2)^t$ fixa (Lei de Snell), a equação de Christoffel $\det(\Gamma_{ik} - \rho \delta_{ik}) = 0$ determina uma equação de sexto grau em s_3 , cujas raízes podem ser reais ou complexas, no caso da ocorrência de eventos pré ou pós críticos, respectivamente. No caso das raízes reais, estes eventos podem ainda ser classificados como descendentes (d) ou ascendentes (u) conforme a componente vertical da velocidade de grupo associada ser positiva ou negativa. Mesmo no caso de eventos pós-críticos, pode-se

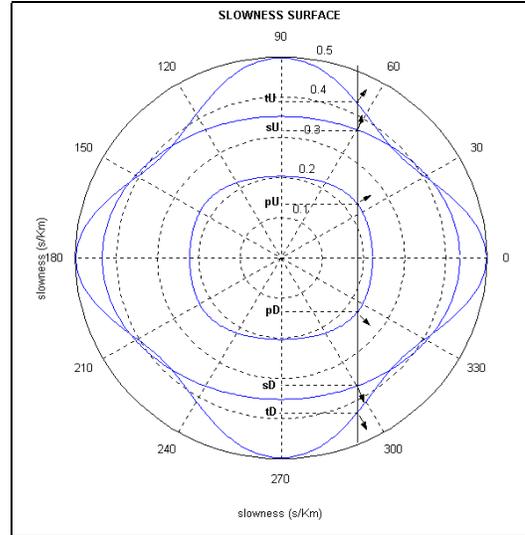


Figura 1 - Superfícies de vagarosidade no plano xy para um meio ortorrômbico. Cada vagarosidade horizontal \mathbf{s}_H determina três componentes verticais ascendentes $\{s_{3up}, s_{3us}, s_{3ut}\}$ e três descendentes $\{-s_{3up}, -s_{3us}, -s_{3ut}\}$ observando-se a simetria horizontal.

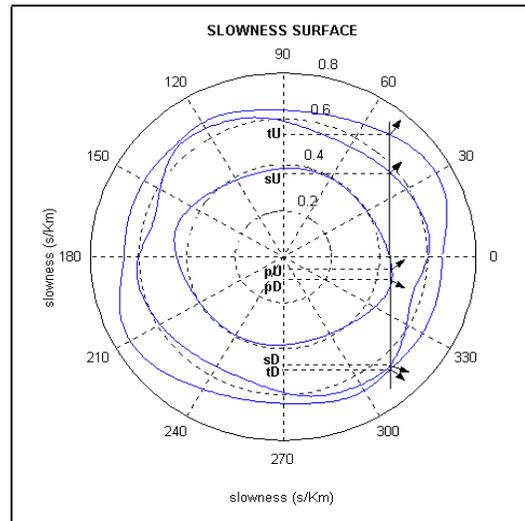


Figura 2 - Superfícies de vagarosidade no plano xy para um meio tricínico. Cada vagarosidade horizontal \mathbf{s}_H determina três componentes verticais ascendentes $\{s_{3up}, s_{3us}, s_{3ut}\}$ e três descendentes $\{s_{3dp}, s_{3ds}, s_{3dt}\}$ observando-se a ausência de simetria horizontal.

escolher as componentes de s_3 como sendo descendente ou ascendente. Em resumo, para cada componente horizontal \mathbf{s}_H , as seis componentes s_3 são separadas em dois blocos de três componentes cada um: um, o bloco ascendente, contendo as componentes $\{s_{3up}, s_{3us}, s_{3ut}\}$ e outro, o bloco descendente, contendo

as componentes $\{s_{3dp}, s_{3ds}, s_{3dt}\}$. Por outro lado, as polarizações também vão ficar divididas em dois blocos: um ascendente, $\{n_{up}, n_{us}, n_{ut}\}$ e outro, descendente, $\{n_{dp}, n_{ds}, n_{dt}\}$. Portanto, superpondo-se os efeitos de todos os eventos ascendentes e descendentes, em cada horizonte x_3 o campo de onda total é dado por:

$$\mathbf{w} = e^{-i\omega(t - \langle \mathbf{s}_H, \mathbf{x}_H \rangle)} \mathbf{N}_d e^{i\omega x_3} \mathbf{S}_{3d} \mathbf{d} + e^{-i\omega(t - \langle \mathbf{s}_H, \mathbf{x}_H \rangle)} \mathbf{N}_u e^{i\omega x_3} \mathbf{S}_{3u} \mathbf{u}, \quad (1.7)$$

sendo \mathbf{d} e \mathbf{u} as amplitudes das ondas descendentes e ascendentes, respectivamente; ω a frequência angular; t , o tempo; $\mathbf{s}_H = (s_1, s_2)^t$, a componente horizontal da vagarosidade; $\mathbf{x}_H = (x_1, x_2)^t$, a componente horizontal do vetor posição e $\langle \cdot, \cdot \rangle$, o usual produto interno de vetores. As matrizes de polarização \mathbf{N}_d e \mathbf{N}_u guardam as informações das polarizações das ondas ascendentes e descendentes, respectivamente e apresentam as formas:

$$\mathbf{N}_d = [\mathbf{n}_{dp} \ \mathbf{n}_{ds} \ \mathbf{n}_{dt}] \text{ e } \mathbf{N}_u = [\mathbf{n}_{up} \ \mathbf{n}_{us} \ \mathbf{n}_{ut}], \quad (1.8)$$

enquanto as matrizes diagonais \mathbf{S}_{3d} e \mathbf{S}_{3u} guardam as informações das componentes verticais das vagarosidades das ondas ascendentes e descendentes, respectivamente e apresentam as formas:

$$\mathbf{S}_{3d} = \text{diag}[s_{3dp} \ s_{3ds} \ s_{3dt}] \text{ e } \mathbf{S}_{3u} = \text{diag}[s_{3up} \ s_{3us} \ s_{3ut}] \quad (1.9)$$

Por outro lado, o campo vertical de tração apresenta a forma:

$$\tau_3 = e^{-i\omega(t - \langle \mathbf{s}_H, \mathbf{x}_H \rangle)} \mathbf{Z}_d e^{i\omega x_3} \mathbf{S}_{3d} \mathbf{d} + e^{-i\omega(t - \langle \mathbf{s}_H, \mathbf{x}_H \rangle)} \mathbf{Z}_u e^{i\omega x_3} \mathbf{S}_{3u} \mathbf{u}, \quad (1.10)$$

sendo \mathbf{Z}_d e \mathbf{Z}_u as matrizes de impedância do meio (Gomes, 1999). Como em cada horizonte x_3 serão consideradas as continuidades dos campos \mathbf{w} e τ_3 , define-se o campo:

$$\mathbf{b}(x_3) = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \tau_3 \end{bmatrix} = e^{-i\omega(t - \langle \mathbf{s}_H, \mathbf{x}_H \rangle)} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_d & \mathbf{N}_u \\ \mathbf{Z}_d & \mathbf{Z}_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\omega x_3} \mathbf{S}_{3d} & 0 \\ 0 & e^{i\omega x_3} \mathbf{S}_{3u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

que pode ser reescrito compactadamente como:

$$\mathbf{b}(x_3) = e^{-i\omega(t - \langle \mathbf{s}_H, \mathbf{x}_H \rangle)} \mathbf{N} e^{i\omega x_3} \mathbf{S}_3 \mathbf{v}, \quad (1.12)$$

$$\text{sendo } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_d & \mathbf{N}_u \\ \mathbf{Z}_d & \mathbf{Z}_u \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

O espalhamento através de interface plana horizontal

A representação acima é adequada para a obtenção do espalhamento de ondas através de uma interface plana horizontal, separando dois meios anisotrópicos arbitrários. Para isto, faz-se $x_3 = 0$ e considera-se a

onda incidente no semiespaço superior $x_3 < 0$ e transmitida no semiespaço inferior $x_3 > 0$, conforme Figura 3. No semi-espaco superior ocorrem a incidência, de amplitude i e a reflexão, de amplitude r . As matrizes de polarização são representadas respectivamente por \mathbf{N}_i e \mathbf{N}_r e as de impedância por \mathbf{Z}_i e \mathbf{Z}_r . No meio inferior, ocorre a transmissão das ondas e as suas matrizes de polarização e de impedância são dadas por \mathbf{N}_t e \mathbf{Z}_t , respectivamente. Considerando-se a continuidade do campo $\mathbf{b}(x_3)$ em $x_3 = 0$, obtêm-se a identidade:

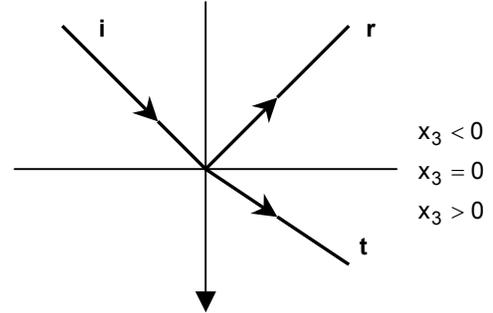


Figura 3 - Modelo esquemático do espalhamento de ondas em interface plana horizontal.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_i & \mathbf{N}_r \\ \mathbf{Z}_i & \mathbf{Z}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_t & 0 \\ \mathbf{Z}_t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (1.13)$$

que determina o sistema matricial:

$$\begin{cases} \mathbf{N}_i i + \mathbf{N}_r r = \mathbf{N}_t t \\ \mathbf{Z}_i i + \mathbf{Z}_r r = \mathbf{Z}_t t \end{cases} \quad (1.14)$$

Considerando-se a inversibilidade das matrizes envolvidas, uma possível solução explícita do sistema acima é dada por (Gomes, 1999):

$$\begin{aligned} t &= (\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_r \mathbf{N}_r^{-1} \mathbf{N}_t)^{-1} (\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_r \mathbf{N}_r^{-1} \mathbf{N}_i) i \\ r &= \mathbf{N}_r^{-1} (\mathbf{N}_t t - \mathbf{N}_i i) \end{aligned} \quad (1.15)$$

O espalhamento de ondas através de multicamadas

Observa-se que o campo $\mathbf{b}(x_3)$ satisfaz a equação:

$$\frac{d\mathbf{b}}{dx_3} = i\omega (\mathbf{N} \mathbf{S}_3 \mathbf{N}^{-1}) \mathbf{b}, \quad (1.16)$$

que é uma equação diferencial que possui solução formal:

$$\mathbf{b}(x_3) = e^{i\omega (\mathbf{N} \mathbf{S}_3 \mathbf{N}^{-1})(x_3 - x_{30})} \mathbf{b}(x_{30}), \quad (1.17)$$

sendo x_{30} e x_3 coordenadas do topo e da base de uma camada de espessura $h = x_3 - x_{30}$, conforme a Figura 4. A representação acima pode ser reescrita como:

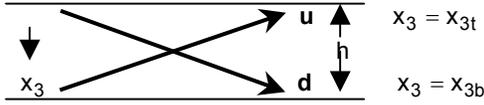


Figura 4 – Diagrama esquemático das ondas ascendente (**u**) e descendente (**d**) em camada com espessura h .

$$\mathbf{b}(x_3) = \mathbf{N} \mathbf{e}^{i\omega h \mathbf{S}_3} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{b}(x_{30}), \quad (1.18)$$

mostrando que $\mathbf{Q}(h) = \mathbf{N} \mathbf{e}^{i\omega h \mathbf{S}_3} \mathbf{N}^{-1}$ corresponde exatamente á matriz de propagação através da camada.

No caso particular de propagação em regime quase estático, ou seja, em que $\|\omega h \mathbf{S}_3\| \ll 1$, a matriz de propagação pode ser aproximada por:

$$\mathbf{N} \mathbf{e}^{i\omega h \mathbf{S}_3} \mathbf{N}^{-1} \approx \mathbf{I} + i\omega h \mathbf{N} \mathbf{S}_3 \mathbf{N}^{-1}. \quad (1.19)$$

O espalhamento de pulsos através de meios anisotrópicos gerais.

Segundo Protázio (1994), para cada frequência ω , o campo de onda incidente apresenta a forma:

$$\bar{\mathbf{w}}_i(\omega) = e^{-i\omega \tau} \mathbf{N}_i \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_{3i}} \mathbf{i}(\omega), \quad (1.20)$$

sendo $\tau = t - \langle \mathbf{s}_H, \mathbf{x}_H \rangle$, \mathbf{S}_{3i} a matriz das componentes verticais das vagarosidades incidentes e

$$\mathbf{i}(\omega) = \begin{bmatrix} F_p(\omega) \\ F_s(\omega) \\ F_t(\omega) \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

o vetor das amplitudes das ondas incidentes no domínio das frequências. Aplicando-se a transformada de Fourier, o campo incidente pode ser expresso, no domínio do tempo, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega \tau} \mathbf{N}_i \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_{3i}} \mathbf{i}(\omega) d\omega, \\ &= \begin{bmatrix} n_{p1i} & n_{s1i} & n_{t1i} \\ n_{p2i} & n_{s2i} & n_{t2i} \\ n_{p3i} & n_{s3i} & n_{t3i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_p(\tau - s_{3pi} x_3) \\ f_s(\tau - s_{3si} x_3) \\ f_t(\tau - s_{3ti} x_3) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

sendo $f_q(t)$ a assinatura da fonte no tempo.

De forma análoga, o campo refletido, no domínio do tempo, é dado por:

$$\mathbf{w}_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega \tau} \mathbf{N}_r \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_{3r}} \mathbf{R}(\omega) \mathbf{i}(\omega) d\omega, \quad (1.23)$$

e o transmitido por:

$$\mathbf{w}_t(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega \tau} \mathbf{N}_t \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_{3t}} \mathbf{T}(\omega) \mathbf{i}(\omega) d\omega. \quad (1.24)$$

O sinal analítico dos pulsos espalhados

Dado um sinal temporal $f(\tau)$, o sinal analítico a ele associado tem a forma:

$$f^{(A)}(\tau) = f(\tau) + i f_H(\tau), \quad (1.25)$$

sendo $f_H(\tau)$ a transformada de Hilbert do sinal, definida por:

$$f_H(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - \tau} dt. \quad (1.26)$$

Para a obtenção do sinal analítico do pulso refletido, será considerado apenas o caso pós-crítico, já que no caso pré-crítico, todo o processo de espalhamento das ondas será real. Nesse caso cada componente do pulso refletido tem a forma

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega \tau} n_{rik}(\omega) R_{kq}(\omega) F_q(\omega) e^{i\omega s_{3qr} x_3} d\omega, \quad (1.27)$$

sendo $s_{3qr} = \text{Re}(s_{3qr}) - i \text{sgn}(\omega) |\text{Im}(s_{3qr})|$ a componente vertical da vagarosidade; $n_{rik}(\omega) = a_{rik} + i \text{sgn}(\omega) b_{rik}$ cada componente da matriz de polarização \mathbf{N}_r da onda refletida e $R_{kq}(\omega) = A_{kq} + i \text{sgn}(\omega) B_{kq}$ cada componente da matriz de reflexão \mathbf{R} . Desenvolvendo a equação acima obtém-se o sinal analítico refletido através de uma interface, na sua forma mais geral como:

$$\mathbf{w}_r(t) = \frac{1}{\pi} \mathbf{N}_r \mathbf{R} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega \tau} \mathbf{e}^{i\omega x_3 \text{Re}(\mathbf{S}_{3r})} \mathbf{e}^{\omega x_3 |\text{Im}(\mathbf{S}_{3r})|} \mathbf{i}(\omega) d\omega, \quad (1.28)$$

sendo $\mathbf{e}^{\omega x_3 |\text{Im}(\mathbf{S}_{3r})|}$ o termo de decaimento com a profundidade.

Já o pulso analítico transmitido tem a forma:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega \tau} n_{tik}(\omega) T_{kq}(\omega) F_q(\omega) e^{i\omega s_{3qt} x_3} d\omega, \quad (1.29)$$

sendo $s_{3qt} = \text{Re}(s_{3qt}) + i \text{sgn}(\omega) |\text{Im}(s_{3qt})|$ a componente vertical da vagarosidade; $n_{tik}(\omega) = a_{tik} + i \text{sgn}(\omega) b_{tik}$ cada componente da matriz de polarização \mathbf{N}_t da onda transmitida e $T_{kq}(\omega) = A_{kq} + i \text{sgn}(\omega) B_{kq}$ cada componente da matriz de reflexão \mathbf{T} . Análoga ao caso refletido, a sua forma mais geral é dado por:

$$\mathbf{w}_t(t) = \frac{1}{\pi} \mathbf{N}_t \mathbf{T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega \tau} \mathbf{e}^{i\omega x_3 \text{Re}(\mathbf{S}_{3t})} \mathbf{e}^{-\omega x_3 |\text{Im}(\mathbf{S}_{3t})|} \mathbf{i}(\omega) d\omega, \quad (1.30)$$

sendo $\mathbf{e}^{-\omega x_3 |\text{Im}(\mathbf{S}_{3t})|}$ o termo de decaimento com a profundidade.

O espalhamento de pulsos através de estratificações

Considerando-se, agora, uma estratificação com N camadas, limitada por um semi-espaco superior e por um semi-espaco inferior, a matriz de propagação relacionando a interface superior com a interface inferior, é dada pelo produto das matrizes de propagação de cada camada. Assim,

$$\mathbf{b}(x_{3b}) = \prod_{k=N}^1 \mathbf{Q}_k(h_k) \mathbf{b}(x_{3t}) \equiv \mathbf{Q} \mathbf{b}(x_{3t}) \quad (1.31)$$

sendo $\mathbf{Q}_k(h_k)$ a matriz de propagação calculada na k -ésima camada da estratificação. Após algumas manipulações matemáticas pode-se mostrar que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{N+1,N} \mathbf{P}_N \mathbf{E}_{N,N-1} \cdots \mathbf{E}_{2,1} \mathbf{P}_1 \mathbf{E}_{1,0} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{E}_d \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

sendo que cada $\mathbf{E}_{k,k-1}$, $k = 1, 2, 3, \dots, N+1$ corresponde à uma matriz que controla o espalhamento na interface que separa as camadas k e $k-1$ e cada \mathbf{P}_k , $k = 1, 2, 3, \dots, N$ corresponde à matriz de propagação através da k -ésima camada. A matriz \mathbf{E}_d será denominada matriz descendente de espalhamento associada à estratificação.

A equação (1.32) pode ser reescrita gerando

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{0,1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{E}_{1,2} \cdots \mathbf{E}_{N-1,N} \mathbf{P}_N^{-1} \mathbf{E}_{N,N+1} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{E}_u \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{u11} & \mathbf{E}_{u12} \\ \mathbf{E}_{u21} & \mathbf{E}_{u22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{E}_u = \mathbf{E}_d^{-1}$ corresponde à matriz ascendente de espalhamento associada à estratificação.

Para o caso de uma simples camada, o coeficiente de transmissão pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{T}_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{R}_{10} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{R}_{12})^{-1} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{T}_{01} \mathbf{i} \\ &\equiv \mathbf{T}_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{T}_{01} \mathbf{i}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

os símbolos \mathbf{R}_{jk} e \mathbf{T}_{jk} representando a reflexão e a transmissão da onda através da interface que separa os meios j e k , no meio k . Cada matriz $\mathbf{\Lambda}_j = e^{i\omega h_j} \mathbf{S}_3$ representa a matriz propagadora na j -ésima camada. A expressão acima traduz todo o processo de propagação da onda transmitida através da camada e o operador

$$(\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{\Pi} + \mathbf{\Pi}^2 + \mathbf{\Pi}^3 + \dots \quad (1.35)$$

constitui o chamado **operador de reverberação** e cada uma de suas parcelas é responsável pela descrição de cada múltipla envolvida na propagação através da camada.

O coeficiente \mathbf{r} pode ser, então, calculado como:

$$\mathbf{r} = \left[\mathbf{R}_{01} + \mathbf{T}_{10} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{R}_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1} \mathbf{\Lambda}_1 \mathbf{T}_{01} \right] \mathbf{i}. \quad (1.36)$$

Sismogramas sintéticos de ondas planas.

Para ilustrar o uso do formalismo apresentado nas seções anteriores, alguns experimentos numéricos foram aplicados a um modelo constituído por um meio isotrópico intercalado por uma camada anisotrópica. Visando marcar as diferenças produzidas pela presença de anisotropia, os experimentos são apresentados em dois níveis: no primeiro, é tomado um meio de fundo

isotrópico intercalado por uma camada também isotrópica de espessura $h = 0.5 \text{ km}$; no segundo, a camada é fraturada de acordo com o modelo estudado por Hood (1990), conforme a Figura 4. Os parâmetros físicos do meio de fundo são dados por $\alpha = 2.02 \text{ km/s}$, $\beta = 1.23 \text{ km/s}$ e $\rho = 2.13 \text{ g/cm}^3$ e os da camada por $\alpha = 3.31 \text{ km/s}$, $\beta = 1.82 \text{ km/s}$ e $\rho = 2.44 \text{ g/cm}^3$. Após o fraturamento, a camada fica determinada pela matriz de rigidez definida na Tabela 1. São apresentados sismogramas de ondas planas de eventos R_{pp} considerando os dois níveis de experimentos.

Resultados

Os sismogramas sintéticos de ondas planas são computados no domínio (t, s) , sendo $s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$, com $s_1 = \sin\theta \cos\phi / \alpha$, $s_2 = \sin\theta \sin\phi / \alpha$ e α , a velocidade longitudinal do meio incidente projetada no plano sagital. A assinatura no tempo t do pulso incidente é dada pela função $f(t) = \sin(\omega_c t)$, sendo ω_c a frequência do pulso, que no experimento é tomado como 25Hz. Os sismogramas foram calculados para o caso isotrópico -

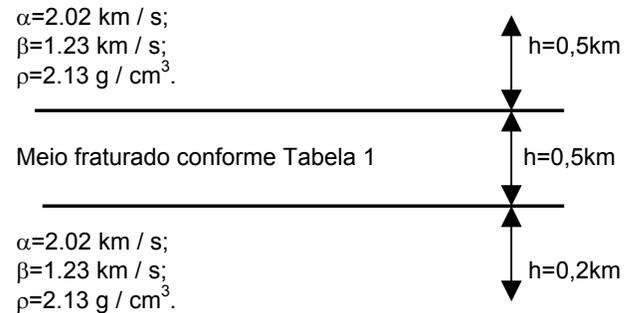


Figura 5 - Modelo esquemático usado no experimento numérico no estudo do espalhamento de pulsos.

$$C = \begin{pmatrix} 20.2892 & 7.5785 & 8.5790 & 0 & 0 & 0 \\ 7.5785 & 31.9282 & 12.1620 & 0 & 0 & 0 \\ 8.5790 & 12.1620 & 24.2500 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8.0734 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.0367 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.2961 \end{pmatrix} \times 10^9 \text{Nm}^{-2}$$

Tabela1. Parâmetros elásticos de um meio anisotrópico Ortorrômbico gerado a partir de um meio TI fraturado conforme modelo de Hood com $\delta_N=0.4, \delta_2=0.5$ e $\delta_3=0.5$

isotrópico no azimute $\phi = 0^\circ$ em virtude do mesmo ser invariante por rotação; para o caso isotrópico-ortorrômbico eles foram calculados nos azimutes $\phi = 15^\circ$ e $\phi = 75^\circ$ visando marcar o seu comportamento em direções sub-paralelas e sub-normais às direções de fratura. Os ângulos de incidência θ foram calculados no intervalo $[0, 90^\circ]$.

Com relação aos sismogramas sintéticos, observa-se tanto na componente x quanto na z - pois, na componente y não há evento - uma primeira chegada que

corresponde à reflexão no topo da camada. Verifica-se, também, a partir do ângulo crítico de propagação, a ocorrência do aumento da amplitude do pulso refletido. A segunda chegada que se estende até o valor crítico de s possui energia menor e representa a primeira reflexão na base da camada. Observa-se também o registro de reflexões múltiplas, apesar de sua pouca energia. O outro evento pós-crítico que é observado corresponde a uma convertida P da onda S na base da camada. Pode-se verificar, ao se comparar os dois experimentos, significativas alterações no comportamento dos pulsos espalhados, principalmente na mudança do ângulo crítico.

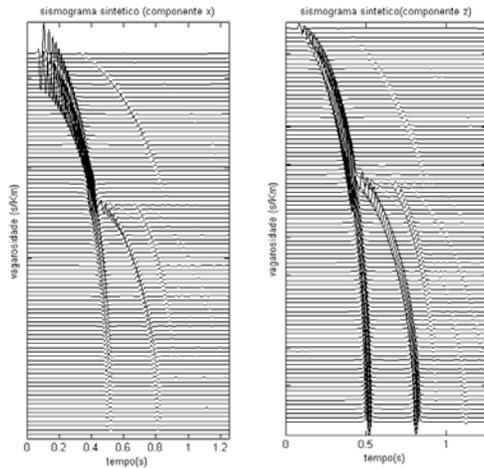


Figura 6 Sismograma de ondas planas para reflexão r_{pp} considerando-se o experimento isotrópico-isotrópico, no azimute $\phi=0^\circ$.

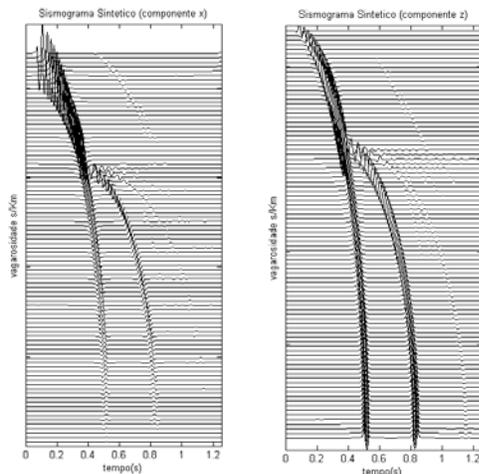


Figura 7 Sismograma de ondas planas para reflexão r_{pp} considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute $\phi=15^\circ$.

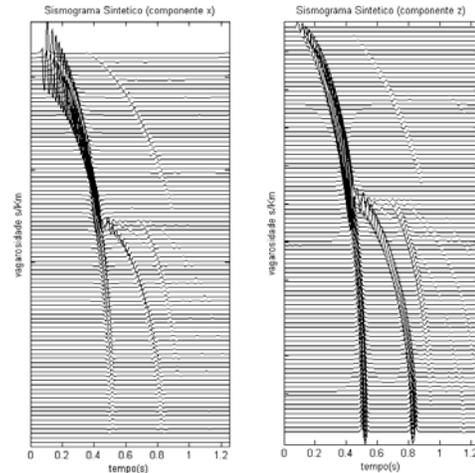


Figura 8 Sismograma de ondas planas para reflexão r_{pp} considerando-se o experimento isotrópico-ortorrômbico, no azimute $\phi=75^\circ$.

Bibliografia.

Backus, G. E. 1962. Long-wave anisotropy produced by horizontal layering. *J. Geophys. Rés.*, 66(4): 427 - 440.

Ewing, W. M.; Jardetzky, W.; Press, F. 1957. *Elastic Waves in Layered Media.* New York, McGraw-Hill.

Fryer, G. J. & Frazer, L. N. 1987. Seismic waves in stratified anisotropic media – II. Elastodynamic eigensolutions for some anisotropic system. *Geophys.J.R.astr. Soc.*, 91:73-101.

Gomes, E. N. S. 1999. Refletividade de ondas P em meios anisotrópicos, Tese de Mestrado, Matemática/CCEN/UFPA.

Hood, J. A. 1990. Fracture estimation in anisotropic media, Hawaii, University of Hawaii. 45 p. Tese (Doctor of Philosophy in Geology and Geophysics) - Graduate division of the University of Hawaii, 1990.

Hudson, J.A. 1981. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 64: 133 - 150.

Mandal, B. & Mitchel, B.J. 1986. Complete seismogram synthesis for transversely isotropic media. *J. Geophys.*, 59: 149 - 156.

Protázio, J. S., 1994, Espalhamento elástico em meios anisotrópicos estratificados, Tese de Doutorado, CPGF-UFPA.

Schoenberg, M. & Douma, J. 1988. Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks. *Geophys. Prosp.*, 36: 571 - 590.

Thomsen, L. 1986. Weak elastic anisotropy *Geophysics*, 51(10): 1954 - 1966.