



Modelagem acústica no domínio da transformada wavelet

Felipe P. Loureiro*, Paulo L. Manassi Osório, Marco A. Cetale Santos DEE/PUC-Rio, Djalma M. Soares Filho PETROBRAS

Copyright 2003, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 8th International Congress of The Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, 14-18 September 2003.

Contents of this paper were reviewed by The Technical Committee of The 8th International Congress of The Brazilian Geophysical Society and does not necessarily represents any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction, or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

The present work deals with the wave equation solution in the wavelet transform domain. Since there is a sparse representation of the wavefield in this domain, it is possible to explore this sparseness to increase the efficiency of the modeling algorithms. We studied the wavefield extrapolation for a homogeneous medium and developed an approximation for the heterogeneous case. The results were compared to the finite difference method.

Introdução

A propagação de ondas sísmicas é amplamente utilizada nos processos de modelagem e migração. O método de solução por diferenças finitas (Alford, Kelly e Boore, 1974) para a equação da onda acústica, princípio básico destes processos, é a abordagem mais difundida, sendo geralmente tomada como método de prova para a comparação com resultados de novos métodos propostos. Uma proposição mais recente, denominada deslocamento de fase (Gazdag, 1981), procura resolver a equação no domínio das frequências, alcançado pela aplicação da transformada de Fourier.

Os métodos de diferenças finitas, resolvidos no domínio espaço-tempo, utilizam a amostragem do campo de ondas através da função de Dirac, com boa localização no espaço, porém uniformemente distribuída por todos os números de onda. Os métodos que empregam Fourier, resolvidos no domínio frequência-número de onda, usam a amostragem feita por ondas harmônicas, com boa localização no domínio das frequências espaciais (números de onda), mas apresenta baixa resolução espacial devido ao princípio da incerteza.

No domínio wavelet, a tarefa de amostragem recai sobre um grupo de funções wavelet, que diferem no comprimento e na posição espacial, e são projetadas para serem localizadas em ambos os domínios expostos. Esta é uma de suas propriedades em comum com os sinais sísmicos, por serem estes de natureza oscilatória e transiente, o que permite sua representação eficiente em bases wavelet.

A modelagem sísmica tradicional (diferenças finitas) necessita de paralelização como forma de distribuição de recursos computacionais para modelos de grande escala. Entretanto, um dos problemas que reduzem a performance desta filosofia é a necessidade de comunicação entre os processos sendo computados.

Uma das motivações para este trabalho vem da possibilidade de tornar os processos independentes utilizando métodos de análise em multiresolução, como é o caso da transformada wavelet.

Transformada wavelet

O princípio da transformada wavelet (TW) está na decomposição de um sinal na base formada pelas funções escala $\varphi(x)$ e wavelet $\psi(x)$. Utilizando as notações

$$\varphi_k^j(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k) \quad ; \quad \psi_k^j(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k),$$

onde j especifica as diferentes escalas e k as diferentes translações.

Para transformadas ortogonais, as funções φ^j e ψ^j são bases ortonormais dos subespaços complementares V_j e W_j . Esta abordagem é conhecida como análise em multiresolução, cujos subespaços relacionam-se através das equações:

$$\begin{aligned} V_j &\subset V_{j-1}; \\ V_j &= V_{j+1} \oplus W_{j+1}; \\ V_0 &= W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_j \oplus V_j; \quad J > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Uma boa referência contendo a conexão entre as teorias wavelet, análise em multiresolução e bancos de filtros QMF (*Quadrature Mirror Filters*), é (Strang e Nguyen, 1996). Nela, a transformada wavelet discreta de um sinal é calculada via filtragem e posterior subamostragem. Pode ser implementada através de um sistema de bancos de filtros de dois canais, de acordo com a figura 1, sendo a estrutura de decomposição do sinal em um número maior de níveis conhecida como árvore diádica. A transformada wavelet discreta inversa é equivalente à operação de síntese.

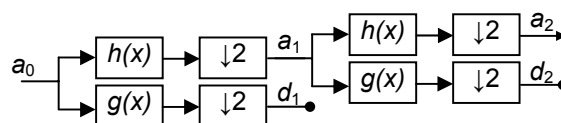


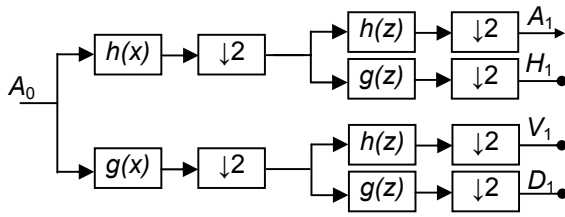
Figura 1: Decomposição wavelet 1D por filtros QMF

As relações das funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ com os coeficientes dos filtros QMF, h_k e g_k , cujas respostas impulsivas têm comprimento L , são

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} h_{k+1} \varphi(2x - k) \quad , \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} g_{k+1} \varphi(2x - k).$$

Uma função $f(x)$ no espaço V_0 , pode ser decomposta conforme (1), em subespaços wavelet de menor resolução

$$f(x) = \sum_{k \in Z} a_k^0 \varphi_k^0(x) = \sum_{k \in Z} a_k^J \varphi_k^J(x) + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in Z} d_k^j \psi_k^j(x),$$



A_2	H_2	H_1
V_2	D_2	
V_1		D_1

Figura 2: Decomposição wavelet 2D em dois níveis segundo a seqüência não convencional: (a) banco de filtros para um único nível; (b) subespaços da transformada wavelet.

em que

a_k^j = coeficientes no subespaço V_j ,

d_k^j = coeficientes no subespaço W_j .

A precisão da reconstrução da função a partir destes coeficientes está relacionada com a base wavelet utilizada. Pelo fato do algoritmo implementado neste trabalho necessitar de uma reconstrução perfeita para a obtenção do sismograma, empregou-se as wavelets desenvolvidas por Daubechies em (Daubechies, 1992).

A decomposição de um sinal bidimensional em seus coeficientes wavelet, quando efetuada a mais de uma escala (nível), pode ser obtida de duas formas diferentes. A primeira consiste na tomada da TW das linhas seguida pela TW das colunas. A maior desvantagem desta forma é a mistura entre as diferentes escalas.

A outra forma é obtida pela decomposição alternada de linhas e colunas a cada nível, conforme mostrados em (Matos e Osório, 2002). Este segundo formato, comumente chamado de não-convencional, é o mais utilizado. A figura 2 mostra o banco de filtros e os subespaços da TW.

O resultado de cada nível de decomposição j é um novo grupo de quatro subespaços denominados aproximação, detalhe horizontal, detalhe vertical e detalhe diagonal, ou simplesmente, A_j , H_j , V_j e D_j .

Pode-se representar a transformada wavelet matricialmente por W , e sua inversa por W^{-1} . Defina os vetores concatenados de coeficientes wavelet

$$1D: \tilde{f} \equiv \{a_j, d_j\} | j = 1, \dots, J,$$

$$2D: \tilde{S} \equiv \{A_S^j, H_S^j, V_S^j, D_S^j\} | j = 1, \dots, J.$$

As transformadas wavelet das funções discretas f^0 e $S^{0,0}$ são

$$\tilde{f} = Wf^0 \Leftrightarrow f^0 = W^{-1}\tilde{f},$$

$$\tilde{S} = WS^{0,0}W^T \Leftrightarrow S^{0,0} = W^{-1}\tilde{S}W^{-T}.$$

Devido a utilização de bases wavelet ortonormais, a transformação W^T equivale à W^T , fato que será levado em consideração daqui em diante.

Operadores diferenciais para bases wavelet

Estudos de (Beylkin, 1992; Jameson, 1993) demonstram a estreita relação entre operadores diferenciais wavelet e os de diferenças finitas. Os operadores para wavelets Daubechies, determinados exclusivamente por sua expressão no espaço A_0 , exibem a mesma forma dos

operadores de diferenças finitas. Por exemplo, ao usar wavelets Daubechies com 2 momentos, os coeficientes do operador $\partial/\partial x$ em A_0 são os mesmos do operador central de quarta ordem para diferenças finitas.

A derivação de uma função f pode ser representada por

$$f' = Df$$

onde D é uma matriz multi-diagonal, onde cada uma de suas diagonais contém um dos coeficientes do operador diferencial. Por exemplo, a partir do operador causal de primeira ordem para a primeira derivada $[-1 \ 1]$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & & -1 \\ -1 & 1 & \\ & -1 & 1 \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

como operador à esquerda de um sinal com 4 linhas.

Já que existe tal equivalência, os operadores em domínio wavelet podem ser obtidos da TW 2D dos operadores D em domínio espacial.

$$\tilde{D} = WDW^T \Leftrightarrow D = W^{-1}\tilde{D}W^{-T};$$

$$\text{onde } \tilde{D} = \begin{bmatrix} A_D & H_D \\ V_D & D_D \end{bmatrix}$$

segue que

$$f' = W^{-1}\tilde{D}W^{-T}W^T\tilde{f} \therefore f' = W^{-1}\tilde{D}\tilde{f} \therefore Wf' = \tilde{D}\tilde{f} \therefore \tilde{f}' = \tilde{D}\tilde{f}$$

onde o operador mapeia os coeficientes originais aos coeficientes da derivada no domínio wavelet.

Propagação no domínio wavelet

Propagação em meio homogêneo:

A propagação da onda acústica é o conceito fundamental na dedução de um processo de modelagem ou migração sísmica, sendo regida pela equação da onda escalar, que em 2D assume a forma

$$\frac{\partial^2 U(x,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x,z,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U(x,z,t)}{\partial t^2}$$

onde estão representados x (deslocamento horizontal), z (profundidade), t (tempo), U (pressão) e C (velocidade da onda de pressão no meio). As transformadas wavelet 2D direta e inversa do campo discretizado U são

$$\begin{aligned}\tilde{U} &= W_z U W_x^T \Leftrightarrow U = W_z^T \tilde{U} W_x; \\ W_x &= TWD \text{ com respeito a } x, \\ W_z &= TWD \text{ com respeito a } z.\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas pelos operadores e aplicando a transformada wavelet, considerando C constante, temos

$$\tilde{U} \tilde{D}_x^2 + \tilde{D}_z^2 \tilde{U} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}$$

Explicitando a estrutura da operação matricial do primeiro membro para o caso da decomposição em um nível, e considerando uma variante do processo de descarte dos subespaços H_{DX} , H_{DZ} , V_{DX} e V_{DZ} dos operadores, conforme visto em (Dessing e Wapenaar, 1995), chega-se à aproximação

$$\begin{bmatrix} A_U A_{DX} + A_{DZ} A_U & H_U D_{DX} + A_{DZ} H_U \\ V_U A_{DX} + D_{DZ} V_U & D_U D_{DX} + D_{DZ} D_U \end{bmatrix}$$

o que mostra a desejada independência entre os subespaços.

Para reduzir o efeito causado pela descontinuidade nas extremidades do campo, é aplicada uma atenuação nos valores próximos a esses limites (Cerjan et al, 1985), que pode ser representada pela multiplicação $P_z U P_x$ por matrizes P_z e P_x diagonais correspondentes à aplicação do processo em ambas as direções. A implementação da

atenuação no domínio wavelet vira

$$\tilde{P}_z \tilde{U} \tilde{P}_x,$$

onde a acentuação indica a transformada wavelet dos componentes.

Propagação em meio heterogêneo:

Para se efetuar precisamente a propagação da onda acústica em meios heterogêneos, esta deveria ser feita a partir da solução da equação geral da onda escalar. Porém é de interesse que se analise como a equação geral se comporta em relação à homogênea.

Wu e McMechan (1998) demonstram o resultado

$$\begin{aligned}\tilde{U} \tilde{D}_x^2 + \tilde{D}_z^2 \tilde{U} &\approx \tilde{S} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}; \\ \tilde{S} &= \{\tilde{S}_{k,l}^{j,j}, \tilde{S}_{k,l}^{j,j}, \tilde{S}_{k,l}^{i,j}, \tilde{S}_{k,l}^{i,j}\}; \\ S(x,z) &= \frac{1}{C^2(x,z)},\end{aligned}$$

cuja solução numérica é idêntica à solução para meios homogêneos. A validade deste resultado depende da suavidade na variação das velocidades no campo.

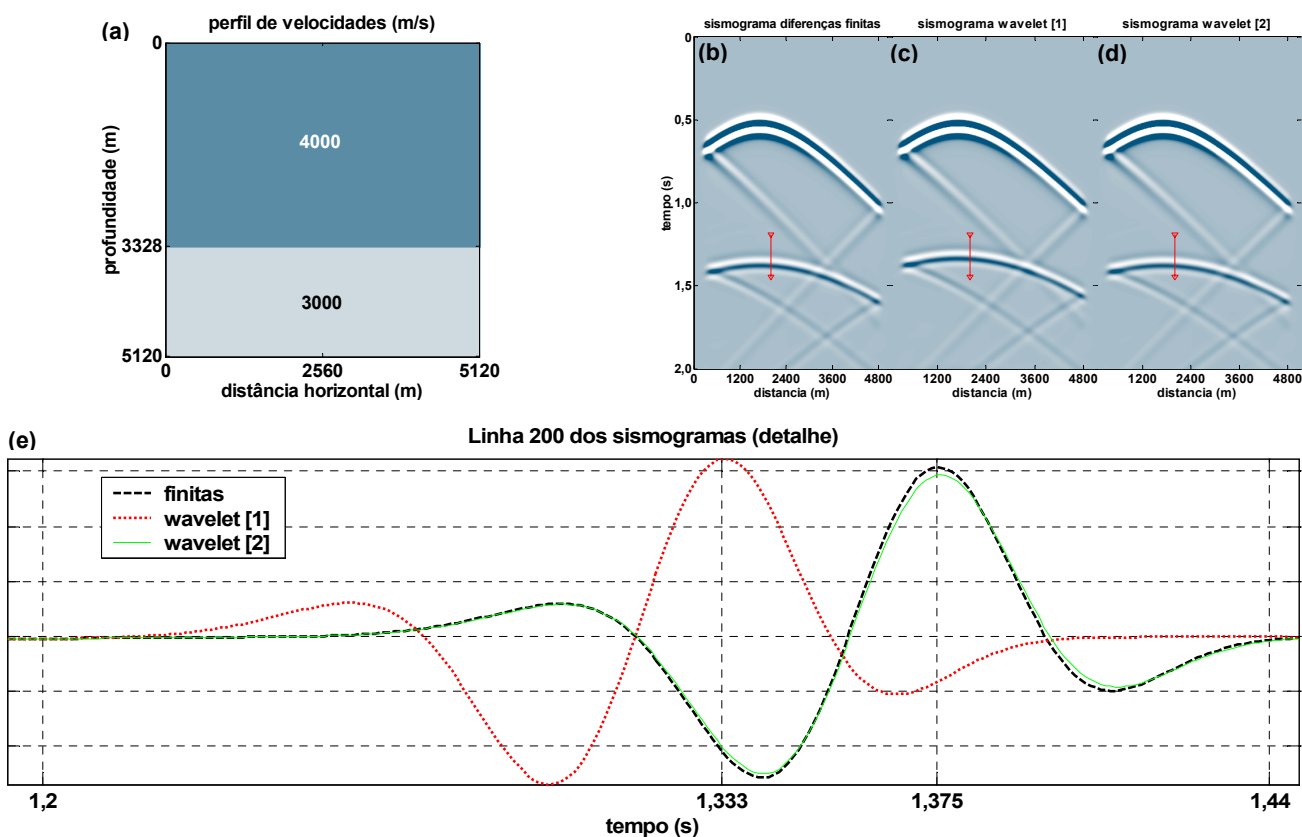


Figura 3: Erros no posicionamento da segunda camada devido a decimação do campo de velocidades: (a) perfil de velocidades; (b) sismograma obtido por diferenças finitas (padrão); (c) sismograma obtido por wavelets e decimação direta; (d) sismograma obtido por wavelets e decimação após a filtragem proposta; (e) Comparação entre as amplitudes ao longo das linhas assinaladas em (b), (c) e (d).

Construção dos campos de velocidades para meios heterogêneos:

A simples repetição do procedimento empregado no caso homogêneo não reflete de maneira correta o posicionamento das interfaces, pois a ferramenta utilizada para efetuar a TW 2D provoca um deslocamento devido à convolução empregada no seu processo de filtragem e devido à decimação. A primeira tentativa de compensar este deslocamento foi a ampliação do tamanho do sinal em função do número de amostras dos filtros Daubechies utilizados, o que não apresentou melhoria significativa.

Como forma de tratar o efeito do deslocamento abordou-se separadamente suas causas, solucionando primeiramente, através da aplicação de filtros passa-baixa (PB), a invariância provocada pela decimação do sinal. Notou-se que a aplicação de filtros com o mesmo comprimento que os empregados na decomposição resolvem o deslocamento devido à convolução. Portanto nada mais conveniente que aplicar os próprios filtros PB de decomposição. Desta forma, a versão reduzida do campo original passa a ser o subespaço de aproximação de sua TW 2D, sofrendo assim o mesmo deslocamento que o campo de ondas.

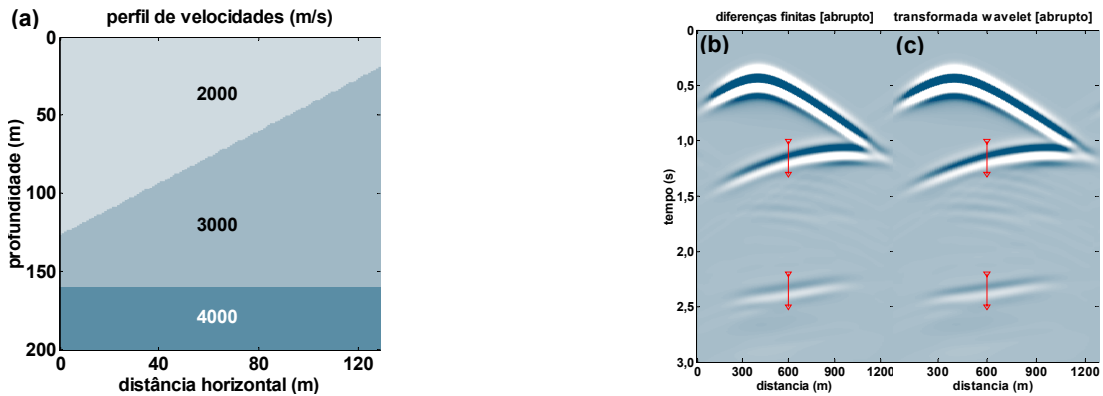


Figura 4: Sensibilidade a variações abruptas no perfil de velocidades. (a) perfil abrupto de velocidades. (b) sismograma obtido por diferenças finitas. (c) sismograma obtido por wavelets.

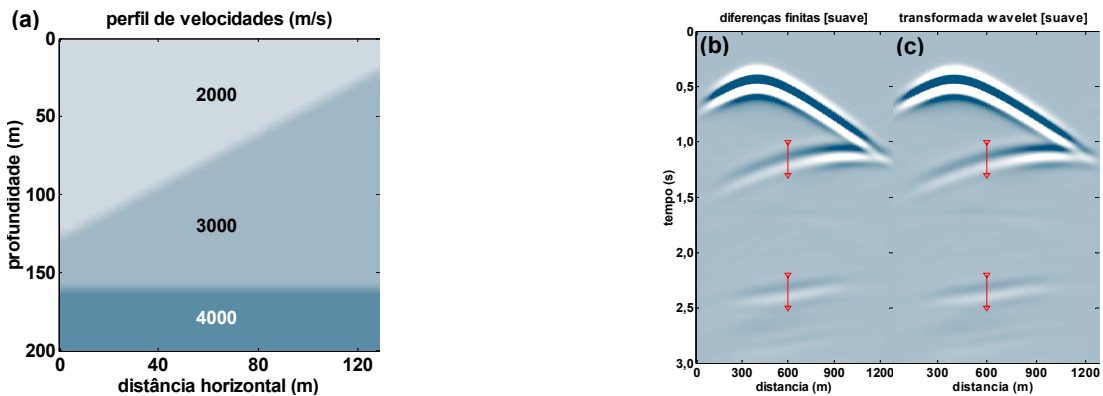


Figura 5: Sensibilidade a variações abruptas no perfil de velocidades. (a) suavização do perfil de velocidades da figura 4 (a). (b) sismograma obtido por diferenças finitas. (c) sismograma obtido por wavelets.

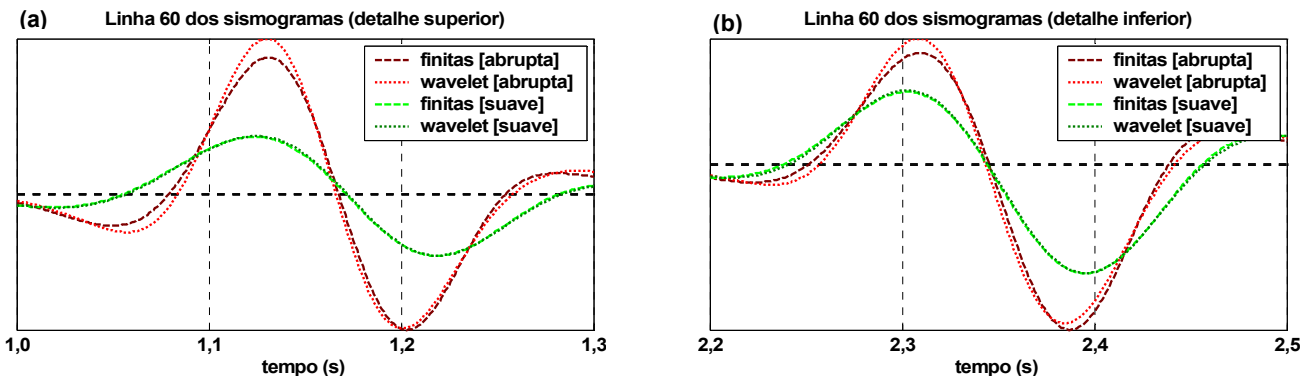


Figura 6: Comparação entre as amplitudes ao longo das linhas assinaladas nos sismogramas: (a) detalhe entre os instantes 1,0s e 1,3s; (b) detalhe entre os instantes 2,2s e 2,5s.

Exemplos

Para explicitar o problema do deslocamento na representação do campo de velocidades aplicada aos subespaços, foram geradas, em forma de sismogramas, as respostas da excitação de um campo heterogêneo por uma fonte pontual limitada em banda. O campo, representado na figura 3, foi simulado com uma malha de 512x512 pontos com intervalos de 10m entre cada amostra e um tempo total de simulação de 2s com passo de 0,1ms. A figura 3 (a) mostra o campo de velocidade utilizado. As figuras 3 (b), (c) e (d) mostram os sismogramas resultantes da aplicação dos métodos de diferenças finitas, wavelet com decimação direta, e wavelet com decimação após a filtragem proposta, respectivamente. A figura 3 (e) mostra a comparação entre as amplitudes ao longo das linhas assinaladas nas figuras 3 (b), (c) e (d). Na comparação percebe-se mais claramente o erro já visível nos sismogramas para o método de decimação direta, enquanto a solução proposta torna-se quase equivalente ao padrão, obtido por diferenças finitas.

Outro aspecto avaliado foi a resposta do método wavelet diante de uma interface abrupta. Segundo (Wu e McMechan, 1998), diante de tal interface, com a violação da condição de homogeneidade local, o método wavelet responde com uma reflexão que, em comparação com o método de diferenças finitas, possui erros em fase e amplitude. Essa discrepância é drasticamente reduzida à medida que a interface for suavizada. Os resultados estão nas figuras 4, 5 e 6. A figura 4 (a) mostra o perfil de velocidades com interfaces abruptas utilizado. Os resultados obtidos por diferenças finitas e pelo método wavelet são mostrados nas figuras 4 (b) e (c), respectivamente. A informação exibida na figura 5 é similar à exibida na figura 4, desta vez com um perfil de velocidades com interfaces suavizadas. Os detalhes, superior e inferior, aos quais se referem os títulos das figuras 6 (a) e (b), são as duas marcações feitas em regiões de interesse de cada sismograma das figuras 4 e 5, onde podemos localizar a primeira reflexão de cada interface. Nelas, pode-se perceber a falha causada pelo método wavelet em virtude da quebra da condição de homogeneidade local, assim como a maior equivalência obtida com a suavização das interfaces.

Discussões

A construção do sismograma para o método de diferenças finitas é feita a partir de uma só linha do campo, armazenada a cada passo de tempo. A implementação do algoritmo wavelet sofre um acréscimo de carga computacional pela necessidade do cálculo da transformada wavelet inversa do campo, a cada instante, para a obtenção do sismograma. Entretanto, a informação necessária para a reconstrução do datum está contida somente em algumas linhas dos subespaços do campo transformado. Este conhecimento pode ser aplicado em um aprimoramento, que seria o cálculo da

transformada wavelet inversa somente em parte do campo.

O quadro torna-se mais favorável quando se pensa na redução substancial do tempo total de processamento, causada pela distribuição em paralelo do processamento de cada subespaço. No método diferenças finitas, a distribuição dos recursos computacionais, geralmente utilizada em modelos de grande escala, sofre com uma desgastante comunicação entre os processos. Por sua vez, o método wavelet, além da distribuição dos recursos, oferece, através das aproximações discutidas, a independência total dos processos até o último passo, quando então seus resultados são combinados.

O próximo passo deste estudo é a implementação do algoritmo de migração reversa no tempo utilizando esta abordagem wavelet.

Referências

- Alford, R. M., Kelly, K. R., e Boore, D. M.**, 1974, Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation: *Geophysics*, 39, 834-842
- Beylkin, G.**, 1992, On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets: *SIAM J. Numer. Anal.*, 6, 1716-1740
- Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., e Reshef, M.**, 1985, A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations: *Geophysics*, 50, 705-708
- Daubechies, I.**, 1992, Ten Lectures on Wavelets: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, EUA. CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics.
- Dessing, F. J., e Wapenaar, C. P. A.**, 1995, Efficient migration with one-way operators in the wavelet transform domain: 64th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1240-1243
- Gazdag, J.**, 1981, Modeling of the acoustic wave equation with transform methods: *Geophysics*, 46, 854-859.
- Jameson, L.**, 1993, On the Daubechies-based wavelet differentiation matrix: *Inst. Comput. Appl. Sci. Eng., Rpt. No. 93-95.*
- Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel, S., e Alford, R. M.**, 1976, Synthetic seismograms: a finite-difference approach: *Geophysics*, 41, 2-27.
- Matos, M. C., e Osorio, P. L.**, 2002, Wavelet Transform filtering in the 1D and 2D for ground roll suppression: Society of Exploration Geophysicists.
- Strang G., Nguyen T. Q.**, 1996, Wavelet and Filter Banks: Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, E. U. A.
- Wu, Y., e McMechan, G. A.**, 1998, Wave extrapolation in the spatial wavelet domain with application to poststack reverse-time migration: *Geophysics*, 63, 589-600.