



Considerações Sobre a Discretização Espacial na Modelagem Sísmica via MEF

Martins, C.J., Dors, C., Mansur, W.J. e Bulcão, A. COPPE/UFRJ, Brasil; Soares Filho, D.M. PETROBRAS S/A, Brasil;

Copyright 2003, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 8th International Congress of The Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, 14-18 September 2003.

Contents of this paper were reviewed by The Technical Committee of The 8th International Congress of The Brazilian Geophysical Society and does not necessarily represents any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction, or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

This work focuses on the importance of spatial discretization in complex geophysics investigation modeling with the main objective to improve the quality and performance of Finite Element responses. It is shown how a correct concentration of elements near the seismic front yields to model the wave field propagation with high reduction in the number of degrees of freedom (around 70%) without loss of quality. A comparison with Finite Difference is presented to validate the work.

Introdução

A modelagem sísmica constitui uma importante etapa do processo de imageamento e inversão em problemas geofísicos. Atualmente, devido à grande complexidade no modelamento de problemas geofísicos reais, devido, dentre outros fatores, à consideração de comportamentos elaborados dos meios físicos analisados (como por exemplo a consideração de meios anisotrópicos, heterogêneos, elastoplásticos, poroelásticos, etc), geometrias e condições de contorno complexas (topografia e geofísica tridimensionais, condições de contorno absorvedoras, etc.), faz-se necessário a adoção de técnicas numéricas para a obtenção de respostas satisfatoriamente próximas à solução exata destes problemas. Dentre tais técnicas numéricas, destacam-se o Método das Diferenças Finitas (MDF), o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método dos Elementos Finitos (MEF).

No Método das Diferenças Finitas, a idéia principal consiste na aproximação das derivadas existentes na equação diferencial governante, através da utilização de uma expansão truncada da série de Taylor. A vantagem na utilização de esquemas envolvendo o Método das Diferenças Finitas consiste em tais esquemas serem comparativamente econômicos, em relação a outros métodos numéricos, para a montagem do sistema linear de equações algébricas resultante, além de tratar de forma natural as fortes heterogeneidades presentes nos modelos geofísicos (Kelly e Manfurt[1]).

O Método dos Elementos Finitos (MEF) constitui uma das mais difundidas ferramentas computacionais utilizada na resolução numérica de problemas físicos reais. Inicialmente desenvolvido visando a análise de problemas estruturais da engenharia Aeronáutica (Tuner e outros[2] e Arqyrist [3]), possui atualmente larga aplicação em praticamente todas as áreas da Engenharia. A idéia básica da análise numérica via MEF

consiste na subdivisão do domínio do problema físico em subdomínios onde o comportamento do problema é facilmente representado. Assim, efetua-se a análise nestes subdomínios de forma individual e em seguida estes são interconectados, simulando o problema físico como um todo. Desta forma obtém-se uma aproximação da resposta física do problema real, que será mais ou menos próxima da solução exata, dependendo, dentre outros fatores, do número de subdomínios utilizados na representação do problema físico.

Em propagação de ondas sísmicas, trabalhos pioneiros envolvendo MEF surgiram na década de 70 (Smith [4] e Lysmer [5]). Estudos sobre a convergência do método foram inicialmente efetuados por Goudreau [6], Krieg e Key [7], Belytschko e Mullen [8]. Recentemente Zukas e Scheffler [9] descreveram a influência de propriedades geométricas da discretização em problemas de propagação de ondas via MEF. Importantes trabalhos descrevendo o comportamento da solução numérica via MEF, considerando-se esquemas de obtenção das matrizes de massa resultantes da discretização do problema físico dinâmico, foram efetuados no passado (Chan et al.[10], Kim [11], Christon [12], Cook [13], Zienkiewicz [14]), resultando em esquemas de armazenamento mais adequados à aplicação em problemas de propagação de ondas.

Pouca atenção foi dada à utilização do método dos elementos finitos, pelos geofísicos, até meados da década de 80, destacando-se os trabalhos de Simons e Randolph [15] e Brooker e Small [16]. A partir do final da década de 80 importantes contribuições foram feitas na área de propagação de ondas sísmicas, como por exemplo Zhu et al [17], Priolo e Seriani [18], Sochaki et al. [19], Abboud et al. [20], e Wang e Takemiya [21]. Recentes trabalhos, como o artigo de Qingyun e outros[22] que modela estruturas geológicas complexas e Komatitsch et al [23] analisando problemas geofísicos 2D e 3D por meio de esquemas espectrais, mostram a importância do Método dos Elementos Finitos como ferramenta de modelagem acústica e elástica de problemas sísmicos, caracterizando uma alternativa ao Método das Diferenças Finitas, utilizado em grande escala neste tipo de análise.

Neste trabalho será mostrado como a correta discretização através do MEF, considerando-se maior refinamento de elementos em torno da fonte sísmica (onde são esperados elevados gradientes de pressão), pode aumentar significativamente a sua eficiência, permitindo a obtenção de respostas adequadas com performance comparável ao MDF.

Formulação do MEF

No Método dos Elementos Finitos, o domínio de definição do problema físico é discretizado por uma série de elementos finitos interconectados entre si por seus nós e arestas. Considerando um elemento genérico m , a

variável u pode ser aproximada a partir de seus valores nodais por

$$\mathbf{u}^m = \sum_{i=1}^k h_i^m u_i^m = \mathbf{H}^m \mathbf{U}^m \quad (1)$$

onde u_i^m representa o valor da variável u no i -ésimo nó do elemento, h_i^m são as funções polinomiais de aproximação para o elemento m , e k o número de valores nodais deste elemento. Uma vez que os deslocamentos nodais sejam conhecidos dentro de um elemento, as deformações podem ser expressas por

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \mathbf{B}^m \mathbf{U}^m \quad (2)$$

o que significa dizer que apenas os valores nodais de deslocamento provocam deformações no elemento. A matriz \mathbf{B} pode ser obtida a partir da matriz \mathbf{H} , diferenciando suas linhas e efetuando combinações lineares das mesmas. A partir da técnica dos resíduos ponderados (ver [13,14] para detalhes) chega-se a equação de equilíbrio dinâmico do MEF

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (3)$$

com

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}^m] = \left[\int_{\Omega^m} \rho (\mathbf{H}^{m,T} \mathbf{H}^m) d\Omega^m \right] \quad (4)$$

$$\mathbf{D} = [\mathbf{D}^m] = \left[\int_{\Omega^m} \phi (\mathbf{H}^{m,T} \mathbf{H}^m) d\Omega^m \right] \quad (5)$$

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}^m] = \left[\int_{\Omega^m} (\mathbf{B}^{m,T} \mathbf{C}^m \mathbf{B}^m) d\Omega^m \right] \quad (6)$$

$$\mathbf{R} = [\mathbf{R}^m] = \left[\int_{\Omega^m} (\mathbf{H}^{m,T} \mathbf{F}_b^m) d\Omega^m \right] + \left[\int_{\Gamma^m} (\mathbf{H}^{m,T} \mathbf{F}_s^m) d\Gamma^m \right] + \left[\int_{\Omega^m} (\mathbf{B}^{m,T} \mathbf{C}^m \boldsymbol{\varepsilon}_0^m) d\Omega^m \right] - \left[\int_{\Omega^m} (\mathbf{B}^{m,T} \boldsymbol{\sigma}_0^m) d\Omega^m \right] + \left[\sum_{k=1}^{N_k} \mathbf{F}_k^m \right] \quad (7)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{D} e \mathbf{K} representam as matrizes globais de massa, amortecimento e rigidez, montadas sobre o número total de elementos N . ϕ corresponde à lei de amortecimento do material, N_k ao número de forças nodais \mathbf{F}_k^m aplicadas ao problema, \mathbf{D} a matriz constitutiva e ρ a densidade do material.

Na integração temporal da equação de equilíbrio, o tempo de análise é subdividido em intervalos de tempo Δt , normalmente constantes em análises lineares, assim, a equação dinâmica de equilíbrio no tempo t , dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\mathbf{U}^t = \mathbf{R}^t \quad (8)$$

é discretizada no tempo segundo algum procedimento numérico, sem que ocorra nenhuma espécie de transformação do sistema. O modo como estas leis de variação são consideradas influencia na convergência e qualidade das respostas determinando os diversos esquemas de integração temporal direta existentes.

Os esquemas de integração direta no tempo que se baseiam na obtenção da solução do problema no tempo t , a partir da equação de equilíbrio do sistema nos tempos $t - n\Delta t$ são denominados de esquemas explícitos de integração temporal. Caso a obtenção da solução considere a equação de equilíbrio em t , tem-se os chamados esquemas implícitos. Os esquemas explícitos, apesar de serem condicionalmente estáveis, ou seja, exigirem um intervalo de tempo menor que um determinado valor limite, denominado intervalo de tempo crítico, são computacionalmente mais eficientes se comparados aos implícitos.

Neste trabalho considerou-se o método explícito proposto por Chung [24] e Chung and Hulbert [25], pois tal método apresenta controle de dissipação numérica de altas frequências e precisão de segunda ordem no tempo, além de derivar o esquema da Diferença Central, dependendo da escolha adequada dos seus parâmetros. Este método usa a equação de balanço entre as forças inerciais no tempo $t + \Delta t$ e as forças externas e internas no tempo t , ou seja,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}^t + \mathbf{K}\mathbf{U}^t = \mathbf{R}^t \quad (9)$$

com

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t^2 (\hat{\beta} \ddot{\mathbf{U}}^t + \beta \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}) \quad (10)$$

e

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{U}}^t + \Delta t (\hat{\gamma} \ddot{\mathbf{U}}^t + \gamma \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t}) \quad (11)$$

onde os parâmetros $\hat{\beta}$, β , $\hat{\gamma}$, γ são parâmetros que influenciam na convergência e estabilidade.

A introdução de NRBC através da decomposição da equação da onda escalar (Givoli, D., Neta, B., [26] para mais detalhes) pode ser incluída na formulação via MEF considerando o termo

$$\int_{\Gamma(\mathbf{x})_\beta} \frac{\cos(\alpha)}{c} \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} d\Gamma(\mathbf{x})_\beta \quad (12)$$

com Γ_β correspondendo à parte do contorno sob condição de contorno não-reflexiva, c à velocidade de propagação da onda acústica e α ao ângulo de incidência. Desta forma, após a discretização com elementos finitos, a condição de contorno não-reflexiva definida em (12) pode ser adicionado ao sistema matricial como condição de contorno natural acrescentando-se o termo

$$\sum_{m=1}^N \int_{\Gamma^m} \frac{\cos(\alpha)}{c\Delta t} \mathbf{H}^{m,T} \left(\mathbf{u}_{t+\Delta t}^{m,T} - \mathbf{u}_t^{m,T} \right) d\Gamma^m \quad (13)$$

ao vetor global de termos independentes, dado por (7).

Em problemas físicos envolvendo materiais cujas propriedades físicas variam ponto a ponto dentro do elemento, como no caso de modelos geológicos em levantamentos geofísicos, a aproximação por elementos com propriedades constantes (Figura 1-a) pode dar origem a ondas artificiais que em alguns casos podem interferir de forma significativa nas respostas obtidas. Assim, a integração das propriedades físicas dentro dos elementos (Figura 1-b) se torna importante, apesar do aumento no custo computacional para sua obtenção.

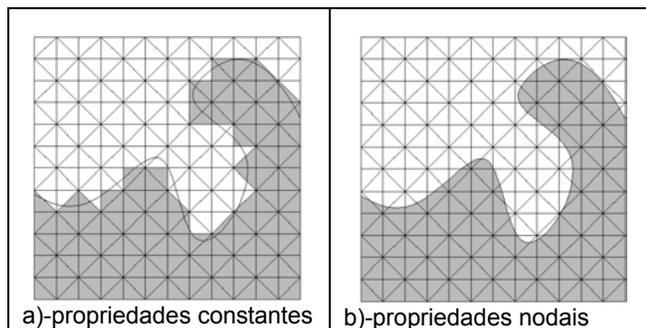


Figura 1 – Integração das propriedades físicas

Exemplo

Neste exemplo, considera-se um modelo geológico elástico composto por três camadas de solo com velocidades de onda compressional, cisalhante e densidades mostradas na figura 3. Considerou-se uma fonte sísmica de 30 Hertz aplicada no eixo de simetria vertical e a 250 metros de profundidade, grid composto de 1001x601 pontos espaçados de 5 metros, tempo de análise de 5 segundo e intervalo de tempo de 0,2 milissegundos.

As análises foram efetuadas com o MDF e MEF. No caso do método das Diferenças Finitas, adotou-se operador heterogêneo de quarta ordem no espaço e segunda ordem no tempo (Cohen e Joly[27]) e condições de contorno não-reflexiva de primeira ordem nas bordas do modelo. No método dos Elementos Finitos considerou-se uma malha composta por um grid estruturado (1001x601 pontos) com espaçamento de 5 metros e elementos lagrangeanos quadráticos (figura 2-b), além de uma malha com refinamento em torno da fonte, elementos triangulares quadráticos e espaçamento médio de 10 metros (figura 2-a), com 70% a menos de nós. As respostas de sismogramas (com aumento de 10% na percepção) são apresentadas nas figuras 4 e 5.

Conclusões

Pode-se observar, a partir dos sismogramas apresentados que as respostas obtidas com o MDF e MEF (com refinamento local em torno da fonte) apresentam resultados próximos, em termo de posicionamento das reflexões originadas devido à diferença de impedância acústica das subcamadas geológicas. Reflexões devido ao truncamento do modelo são observadas em todos sismogramas, mas possuem magnitude desprezível, se comparado às reflexões das subcamadas. Cabe ressaltar que neste modelo a análise com malha de Elementos Finitos, otimizada com

refinamento em torno da fonte sísmica, acarretou redução do número de graus de liberdade em torno de 70% em relação ao grid estruturado de Elementos Finitos. Como nenhuma diferença considerável entre os resultados obtidos nas análises via MEF foi observado, obteve-se uma elevada redução do custo computacional da análise, tornando-a competitiva com as análises via Diferenças Finitas, sem redução na qualidade das respostas.

References

1. Kelly, K. R., Manfurt, K. J., 1990, Numerical Modeling of Seismic Wave Propagation, Geophysics reprint series, Tulsa, Oklahoma, 13.
2. Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C. And Topp, L.J., 1956, Stiffness And Deflection Analysis Of Complex Structures, Journal Of The Aeronautical Science.
3. Argyris, J. H., 1965, Continua And Discontinua, Conference On Matrix Methods In Structural Mechanics, Ohio.
4. Smith, W. D., 1974, A Nonreflecting Plane Boundary For Wave Propagation Problem, J. Comp. Physics, Vol 13.
5. Lysmer, J., Drake L. A., 1972, A Finite Element Methods For Seismology, International Methods In Computational Physics, Vol 11.
6. Goudreau, G. L., 1970, Evaluation Of Discrete Methods For The Linear Dynamic Response of Elastic and Viscoelastic Solids, UC SESM Report 69-15, University Of California, Berkeley, California.
7. Krieg, R. D. And Key, S. W., 1972, Advances In Computational Methods In Structural Mechanics And Design, Ala.
8. Belytschko, T., And Mullen, R., 1978, On Dispersive Properties Of Finite Element Solutions, New York.
9. Zukas, J. A. And Scheffler, D. R., 2000, Practical Aspects Of Numerical Simulations Of Dynamic Events: Effects Of Meshing, International Journal Of Impact Engineering, 24.
10. Chan, C. H., Cai, C. W. And Cheung, Y. K., 1992, Convergence Studies Of Dynamic Analysis By Using Finite Element Method With Lumped Mass Matrix, Journal Of Sound And Vibration, 165.
11. Kim, K., A Review Of Mass Matrices For Eigenproblems, Computers & Structures, 46, 1993.
12. Christon, M. A., 1999, The Influence Of The Mass Matrix On The Dispersive Nature Of The Semi-Discrete, Second-Order Wave Equation, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 173.
13. Cook, R. D., 2001, Concepts And Applications Of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons Inc.
14. Zienkiewicz, O. C. & Taylor, 1989, R. L., The Finite Element Method, Vol. 1-2, Mc-Graw-Hill.
15. Simons, H.A., Randolph, M.F., 1986, Comparison Of Transmitting Boundaries In Dynamic Finite Element Analyses Using Explicit Time Integration, I. J. Num.

- Analytical Methods In Geomechanics, V. 10, 329-342.
16. **Brooker, J.R. And Small, J.C.**, 1981, Finite Element Analysis Of Problems With Infinitely Distant Boundaries, International Journal For Numerical And Analytical Methods In Geomechanics, 5, 345-368.
 17. **Zhu, Y. Q., Hu, T. Y. And Guo, Z. Q.**, 1991, The Seismic Wave Propagation In Media Whith Viscous-Elastic Property And Its Tomographic Effects, Acta Seismologia Sinica.
 18. **Priolo, E. And Seriani, G.**, 1993, Advancement In Large Scale Seismic Wave Modelling By The Finite Element Method, 55th Mtg. Eur. Assoc. Expl. Geophys.
 19. **Sochaki, I. Kubichek, R., George, J., Fletcher, W. R. & Smitson, S.**, 1987, Absorbing Boundary Conditions And Surface Waves, Geophysics, 52, 60-71.
 20. **Abbound, N.N., And Pinsky, P.M.**, 1992, Finite Element Dispersions Analysis For The Three-Dimensional Second-Order Scalar Wave Equation, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 35, 1183-1218.
 21. **Wang, H. & Takemiya H.**, 1994, Dynamic Response Of Tunnels To Incident P,SV And Rayleigh Waves By Combined Finite Element Method And Try Function Method, Comp. Meth. Advances In Geomechanics (Eds).
 22. **Qingyun Di, Zhu, L. And Wang, 2000, M.**, 2-D Finite Element Modeling For Seismic Wave Response In Media With Sand Bodies, Physics Of The Earth And Planetary Interiors, 120.
 23. **Komatitsch, D., Vilotte, J.P., Vai, R., Castillo-Covarrubias, J.M. And Sánchez-Sesma, J.**, 1999, The Spectral Element Method For Elastic Wave Equations-Application To 2D And 3D Seismic Problems, International Journal For Numerical Methods In Engineering, 45.
 24. **Chung, J. And Lee, J.M.**, 1996, A New Family Of Explicit Time Integration Methods For Linear And Non-Linear Structural Dynamics, International Journal For Numerical Methods In Engineering.
 25. **Chung, J. And Hulbert, G.M.**, 1996, Explicit Time Integration Algorithms For Structural Dynamics With Optimal Numerical Dissipation, Comput. Methods Appl. Mech. Engng.
 26. **Givoli, D., Neta, B.**, 2002, High-order non-reflecting boundary conditions for dispersive waves, Wave Motion 1114 ,1-15.
 27. **COHEN, G., JOLY, P.**, 1990, Fourth Order Schemes For The Hheterogeneous Acoustics Equation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 80, 397-407.

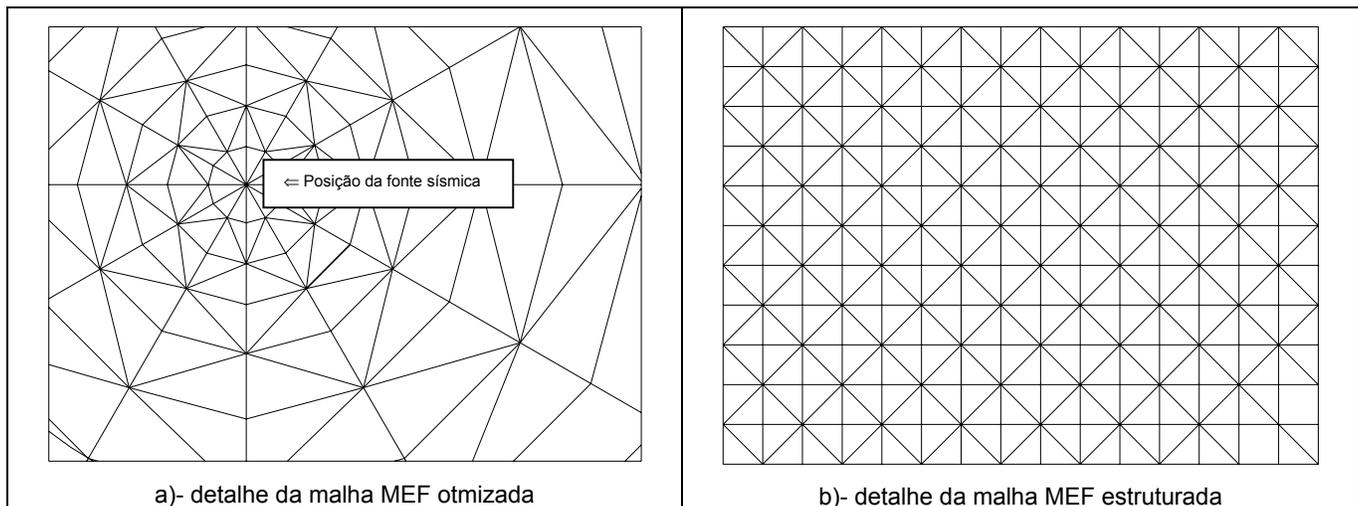


Figura 2 – Perfil de velocidades(modelo SEG)

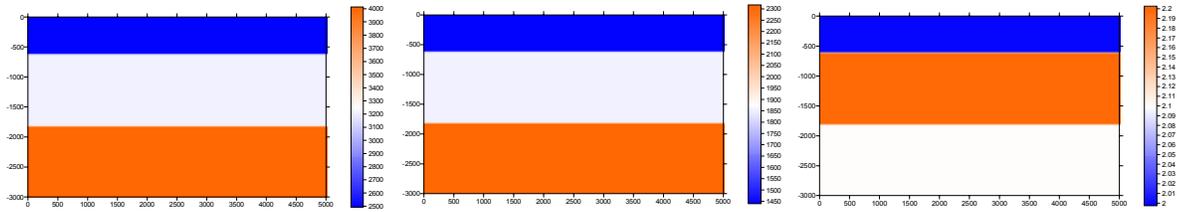
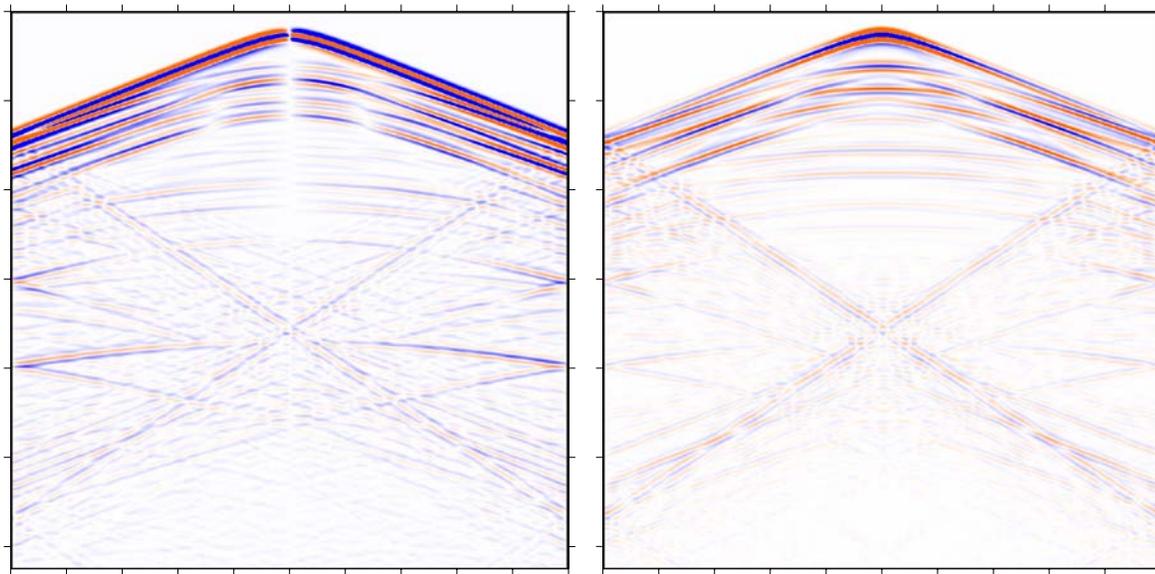


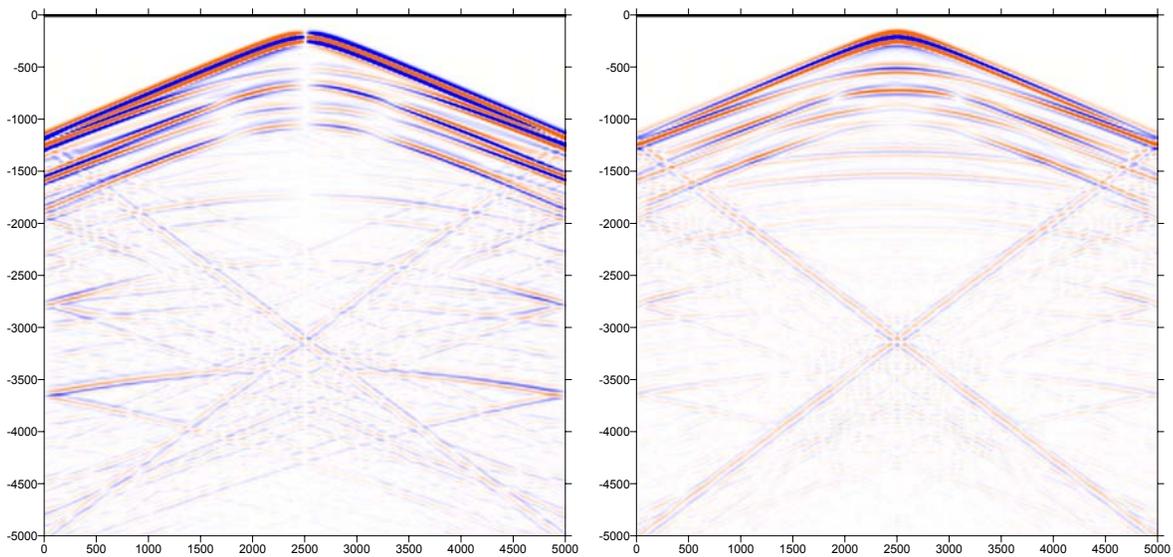
Figura 3 – velocidade de compressão, cisalhamento e densidade.



Sismograma direção horizontal

Sismograma direção vertical

Figura 4 – Resultado de sismogramas com aumento de 10 vezes na percepção.
MDF-grid 1001x601, espaçamento constante de 5 metros, 601601 pontos.



Sismograma direção horizontal

Sismograma direção vertical

Figura 5 – Resultado de sismogramas com aumento de 10 vezes na percepção.
MEF-refinado na fonte, espaçamento global de 10 m, 173037 pontos.