

## Análise de Sensibilidade e de Ambigüidade das Aproximações $R_{pp}$ e $R_{sp}$ em Meios Isotrópicos

Darciléa F. Santos<sup>1</sup>, João dos S. Protázio<sup>2</sup>, Jessé C. Costa<sup>3</sup> e Ellen de Nazaré S. Gomes<sup>1</sup>,

<sup>1</sup>Geofísica/UFPa, <sup>2</sup>Matemática/UFPa, <sup>3</sup>Dept<sup>o</sup>. de Física/UFPa, Belém, Brasil.

Copyright 2003, SBGf – Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 8<sup>th</sup> International Congress of The Brazilian Geophysical Society held in Rio de Janeiro, Brazil, 14-18 September 2003.

Contents of this paper was reviewed by The Technical Committee of The 8<sup>th</sup> International Congress of The Brazilian Geophysical Society and does not necessarily represents any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction, or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

### Abstract

In AVO analysis, linearized approximations  $R_{pp}$  are not efficient for the inversion of impedance contrasts, P wave velocity and shear modulus. An analysis of the combination of  $R_{pp}$  and  $R_{ps}$  approximations increases the perspectives for the inversion of the density parameters, or some combinations of these two parameters with some other parameters. In this work we show a sensibility and ambiguity analysis of the combined approximations  $R_{pp}$  and  $R_{sp}$  in isotropic media in order to determine the stability and non uniqueness of a linear inversion problem.

### Introdução

A partir de 1984, quando Ostrander mostrou a utilidade da técnica de AVO (análise de amplitude com afastamento) como indicador direto de óleo e gás em rochas clásticas, as pesquisas têm-se intensificado, principalmente, em torno das aproximações linearizadas de Knott-Zoeppritz (Shoemberg & Protázio, 1992; Castagna, 1993). Drufruca & Mazzotti (1995) constataram que nem todos os parâmetros físicos das linearizações podem ser recuperados na inversão sísmica de AVO, em particular, o contraste de densidade que pode revelar informações importantes sobre a presença e saturação de hidrocarbonetos. Estes problemas advêm da pequena quantidade de informações e da natureza ambígua do problema, enfatizando a falta de informações 'a priori' (Wu; 2000).

Analisando os coeficientes de reflexão de ondas convertidas, observou-se a sua potencialidade para discriminar o conteúdo de saturação do gás em arenitos e prever a sua porosidade, o que motiva o uso das informações de ondas convertidas para análise de AVO.

Neste trabalho, expõem-se as análises de sensibilidade e de ambigüidade das aproximações linearizadas associadas  $R_{pp}$  e  $R_{sp}$  para meios isotrópicos em termos do ângulo de incidência em dados sintéticos contaminados com 5% de ruído aleatório.

### Aproximações linearizada

Considere dois semi-espacos elásticos homogêneos isotrópicos separados por uma interface plana, em que

$\rho_\gamma$ ,  $\alpha_\gamma$  e  $\beta_\gamma$  são a densidade, velocidade de onda-P e velocidade onda-S correspondentes ao meio incidente ( $\gamma=1$ ) e ao meio subjacente ( $\gamma=2$ ), conforme a Figura 1.

As aproximações linearizadas  $R_{pp}$  e  $R_{sp}$  são obtidas truncando-se as equações de Zoeppritz, até o termo  $s^2$ , sendo  $s$  o parâmetro do raio (Santos et al, 2001). Em seguida é feito o desenvolvimento das séries de Taylor em torno dos parâmetros físicos dos meios separados pela interface, assumindo-se a hipótese de pequenos contrastes do meio.

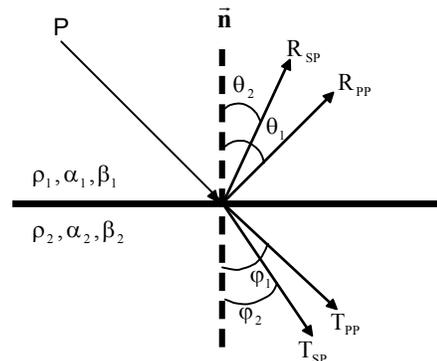


Fig. 1- Espalhamento de uma onda-P incidente

Para obter as aproximações define-se  $\bar{\rho} = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2}$ ,

$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$  e  $\bar{\beta} = \frac{\beta_2 + \beta_1}{2}$  como sendo as médias aritméticas entre as densidades, as velocidades de onda-P e de onda-S, respectivamente;

$\delta\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}$ ,

$\delta\alpha = \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}$  e  $\delta\beta = \frac{\beta_2 - \beta_1}{2}$  como sendo os contrastes médios entre as densidades, as velocidades de onda-P e de onda-S, respectivamente, e

$\bar{\delta\rho} = \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}$ ,  $\bar{\delta\alpha} = \frac{\delta\alpha}{\bar{\alpha}}$  e

$\bar{\delta\beta} = \frac{\delta\beta}{\bar{\beta}}$  como sendo os *contrastos médios relativos* de densidade, de velocidade de onda-P e de onda-S, respectivamente.

A plicando-se a lei de Snell na interface, o parâmetro do raio é dado por:

$$s = \frac{\sin\theta_1}{\alpha_1}, \quad (1)$$

sendo  $\theta_1$  o ângulo de incidência associado à velocidade de onda compressional  $\alpha_1$ .

Definido-se  $k = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$  como sendo a razão entre a velocidade da onda-S ( $\beta_1$ ) e a velocidade da onda-P ( $\alpha_1$ ) do meio incidente, as aproximações linearizadas são dadas por:

$$r_{pp}(\theta_i) = \overline{\delta Z} + \sin^2\theta_i \overline{\delta\alpha} - 4k^2 \sin^2\theta_i \overline{\delta\mu}, \quad (2)$$

$$r_{sp}(\theta_i) = - \left( 1 + \frac{k^2}{2} \sin^2\theta_i \right) \sin\theta_i \overline{\delta Z} + \left( 1 + \frac{k^2}{2} \sin^2\theta_i \right) \sin\theta_i \overline{\delta\alpha} - 2k \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} + k \right) \sin^2\theta_i \right] \sin\theta_i \overline{\delta\mu}, \quad (3)$$

sendo  $i = 1, \dots, N$ , com  $N$ , o número de observações;  $r_{pp}(\theta_i)$  e  $r_{sp}(\theta_i)$ , as amplitudes dos coeficientes refletido R<sub>PP</sub> e convertido R<sub>SP</sub>, respectivamente, calculados em  $\theta_i$ , o ângulo de incidência na  $i$ -ésima observação;  $\overline{\delta Z} = \overline{\delta\rho} + \overline{\delta\alpha}$ , o contraste médio relativo de impedância e  $\overline{\delta\mu} = \overline{\delta\rho} + 2\overline{\delta\beta}$ , o contraste médio relativo do módulo de cisalhamento.

As expressões (2) e (3), podem ser representadas matricialmente como:

$$\tilde{\mathbf{r}} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{N} \end{bmatrix} \equiv \tilde{\mathbf{M}} \delta\mathbf{p}, \quad (4)$$

sendo  $\tilde{\mathbf{r}}$ , o vetor das observações de reflexões associadas [R<sub>PP</sub> R<sub>SP</sub>];  $\tilde{\mathbf{M}}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$ , as matrizes de sensibilidade definidas pelas aproximações [R<sub>PP</sub> R<sub>SP</sub>], R<sub>PP</sub> e R<sub>SP</sub>, respectivamente; e  $\delta\mathbf{p} = \left[ \overline{\delta Z}, \overline{\delta\alpha}, \overline{\delta\mu} \right]^t$ , o vetor dos parâmetros a serem invertidos, em que o sobrescrito  $t$  indica a usual transposição matricial.

### Análise de Sensibilidade e de Ambigüidade

Analisando as matrizes de sensibilidade  $\tilde{\mathbf{M}}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$  podem-se determinar quais parâmetros terão problemas de estabilidade e de unicidade. Para realizar as análises de sensibilidade, utiliza-se o método de decomposição em valores singulares (SVD) nas matrizes de sensibilidade que definem as aproximações linearizadas associadas e dissociadas. Este método consiste em fatorar uma matriz genérica  $\mathbf{A}$  na forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^t, \quad (5)$$

sendo  $\mathbf{U}$  uma matriz  $m \times m$ , ortogonal no espaço dos dados das observações;  $\mathbf{V}$  uma matriz  $n \times n$ , ortogonal no espaço dos parâmetros e  $\mathbf{S}$  uma matriz  $m \times n$ , diagonal, cujos elementos são os valores singulares de  $\mathbf{A}$ . As

colunas de  $\mathbf{U}$  são os autovetores de  $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$  e as colunas de  $\mathbf{V}$  são autovetores de  $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$  (Golub & Van Loan, 1983).

Define-se a *matriz de resolução* (Lanczos, 1961) como:

$$\mathbf{M}_{resol} = \mathbf{V}_{ef} \mathbf{V}_{ef}^t, \quad (6)$$

em que  $\mathbf{V}_{ef}$  é a matriz ortogonal do espaço dos parâmetros associada ao espaço efetivo de  $\mathbf{S}$ .

Para obter o espaço efetivo de  $\mathbf{S}$  utiliza-se um critério de corte para eliminar os valores singulares muito próximos de zero a fim de evitar instabilidade e ambigüidade, determinando um novo posto para a matriz  $\mathbf{S}$ , denominado de *posto efetivo* (Sen & Stoffa, 1995). A submatriz obtida de  $\mathbf{S}$  pela eliminação dos valores singulares determinados pelo critério de corte tem dimensão do posto efetivo e é denotada por  $\mathbf{S}_{ef}$  (Sen & Stoffa, 1995). Neste trabalho o valor de corte é escolhido através do número de condições  $n_{cond}$  dado por:

$$n_{cond} = \frac{\max(\mathbf{S})}{\min(\mathbf{S})}. \quad (7)$$

O posto efetivo de  $\mathbf{S}$  é escolhido como o maior inteiro  $r$  que satisfaz a desigualdade:

$$\frac{\max(\mathbf{S})}{S_r} < n_{cond}. \quad (8)$$

Este critério determina os valores singulares que estão no espaço nulo.

Devido a relação que a matriz  $\mathbf{V}_{ef}$  possui com o espaço dos parâmetros associado aos elementos da matriz  $\mathbf{S}_{ef}$ , estas matrizes são analisadas. Estas avaliações seguem os seguintes passos:

1. Ao menor valor singular associa-se a coluna correspondente da matriz  $\mathbf{V}_{ef}$ .
2. Para cada elemento desta coluna associa-se um elemento  $\delta p_j$  correspondente ao vetor de parâmetros, em que  $j=1,2,3$ .
3. A menor projeção da matriz  $\mathbf{V}_{ef}$ , em valor absoluto, vai estar associada ao parâmetro de melhor resolução e a maior projeção, ao parâmetro mais instável e ambíguo.

Após observar estes critérios, os experimentos são avaliados em função do número de condição, definida na expressão (4), e em função dos elementos da matriz  $\mathbf{S}$  em relação à máxima cobertura angular.

Como a ambigüidade é caracterizada por um conjunto de parâmetros ajustarem os dados definidos pela função objeto, avaliam-se as curvas de contorno das aproximações associadas e dissociadas através das funções-objetivos. As funções-objetivos correspondem a um funcional com a finalidade de ajustar os dados sintéticos e os dados do funcional de ajuste definidos nas expressões (2), (3) e (4):

$$\begin{aligned}\phi(\delta\mathbf{p}) &= \|\tilde{\mathbf{r}} - \tilde{\mathbf{M}}\delta\mathbf{p}\|^2, \\ \phi'(\delta\mathbf{p}) &= \|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{M}\delta\mathbf{p}\|^2, \\ \phi''(\delta\mathbf{p}) &= \|\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{N}\delta\mathbf{p}\|^2,\end{aligned}\quad (9)$$

sendo  $\phi(\delta\mathbf{p})$ ,  $\phi'(\delta\mathbf{p})$  e  $\phi''(\delta\mathbf{p})$  os funcionais das aproximações  $[R_{PP} \ R_{SP}]$ ,  $R_{PP}$  e  $R_{SP}$ , respectivamente. Nestas análises fixa-se um dos parâmetros e apresentam-se os mapas de contorno em relação aos outros dois.

Estes mapas produzem vales nos quais se pode observar que os parâmetros ou combinações de parâmetros produzem maior ou menor região de ambigüidade.

## Resultados

Neste trabalho foram utilizados dados sintéticos gerados a partir das equações de Zoeppritz em um modelo cujo contato de interface é de uma camada incidente de folhelho com uma camada subjacente de arenito saturada com gás. Os seus parâmetros elásticos verdadeiros são dados na Tabela 1.

**Tabela 1 - Parâmetros elásticos do meio incidente e de transmissão**

Modelo 1	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	$\alpha$ (m/seg)	$\beta$ (m/seg)
Folhelho	2,20	3270	1650
Arenito com gás	2,05	3040	1740

Para a análise do número de condição os gráficos são apresentados em função da máxima cobertura angular e mostram o desempenho da inversão linear para a estimativa dos três parâmetros, sendo ilustrados na Figura 2. Estes experimentos informam que, para o modelo definido neste trabalho, tanto a inversão  $R_{PP}$  quanto a inversão  $R_{SP}$  possuem um parâmetro no espaço nulo, o que é constatado através da grande magnitude do número de condição (média em torno de  $10^{17}$ ) das duas matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$ . Isto informa que, nos dois casos,  $\min(S_j) \approx 0$ . Quanto à inversão combinada, as figuras mostram que o número de condição diminui consideravelmente em relação às matrizes dissociadas. O valor máximo do número de condição para a matriz  $\tilde{\mathbf{M}}$  é  $10^5$  e o valor mínimo é 10, o que implica afirmar que o menor valor singular da matriz  $\tilde{\mathbf{M}}$  é bem maior do que os menores valores singulares das matrizes  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{N}$ . Observou-se ainda que a resolução dos parâmetros melhora com o uso da matriz  $\tilde{\mathbf{M}}$ , quanto maior for a cobertura angular.

Este tipo de análise foi realizado por Wang (1999) apenas nas aproximações linear e quadrática de  $R_{PP}$ . Nos seus experimentos, Wang mostra que a aproximação quadrática consegue estimar os três parâmetros definidos em seu trabalho enquanto a aproximação linear não consegue, por possuir um

número de condição muito alto. Os resultados aqui apresentados confirmam que a utilização das aproximações lineares combinadas torna o problema da inversão bem mais estável do que nos casos das aproximações dissociadas.

As Figuras 3-a à 3-c são referentes ao logaritmo dos valores singulares da matriz  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{N}$  e  $\tilde{\mathbf{M}}$ . Estes experimentos se basearam nos testes de sensibilidade produzidos por Wang (1999) e têm o objetivo de ilustrar o desempenho dos três tipos de matrizes de sensibilidade e a sensibilidade dos parâmetros em relação à cobertura angular.

Observou-se, nos experimentos, que os autovalores crescem com o aumento da máxima cobertura angular e que a partir de aproximadamente 30° cada valor singular tende a estabilizar-se em um único valor, para todos os modelos. Em vista deste resultado, restringiu-se os próximos experimentos na cobertura angular de  $[0^\circ \ 30^\circ]$ .

Nota-se, por outro lado, que as matrizes de sensibilidade das amplitudes dos coeficientes  $R_{PP}$  e  $R_{SP}$  possuem o terceiro e o segundo valores singulares menores que  $10^{-10}$ . Isto implica dizer que os parâmetros que produzem instabilidade para o  $R_{PP}$  podem ser identificados através da análise da terceira coluna da matriz  $\mathbf{V}_{ef}$ . No caso do  $R_{SP}$ , os parâmetros que produzem instabilidade podem ser identificados através da análise da segunda coluna dessa matriz. Estas análises informam que o terceiro autovalor e o segundo autovalor produzem instabilidade e ambigüidade no problema de inversão linear para o  $R_{PP}$  e o  $R_{SP}$  devido às colunas da matriz  $\mathbf{V}_{ef}$  associadas a estes autovalores se encontrarem no espaço nulo. Ou seja, o problema de inversão linear é mal-posto conforme observado nas Figuras 3-a a 3-c.

Para a aproximação  $R_{PP}$  observa-se que a menor projeção na terceira coluna da matriz  $\mathbf{V}_{ef}$  identifica o parâmetro melhor resolvido, no caso  $\overline{\delta Z}$ , enquanto a maior projeção identifica aquele que possui maior ambigüidade e instabilidade, no caso  $\overline{\delta\mu}$ . Da mesma forma analisa-se a segunda coluna da matriz  $\mathbf{V}_{ef}$  em relação à aproximação  $R_{SP}$ . E assim têm-se para o  $R_{SP}$  que o parâmetro melhor resolvido é  $\overline{\delta\mu}$  e  $\overline{\delta\alpha}$  é o mais ambíguo e instável.

Analisando-se as curvas de contorno da função objetivo, Figuras 4 até 6 na faixa angular de  $[0^\circ \ 30^\circ]$ , observa-se que a combinação de parâmetro  $\overline{\delta\alpha}$  e  $\overline{\delta\mu}$  produz ambigüidade e instabilidade para o problema de inversão linear, sugerindo que estas combinações possuem alguma dependência linear.

A análise da matriz de sensibilidade informa quais parâmetros podem ou não ser estimados a partir dos dados de observações. A Figura 7 mostra a matriz de resolução com escala de cores variando de aproximadamente -0,4 até 1. Uma das características da matriz de resolução diz que quanto mais próximo da unidade o parâmetro correspondente estiver, melhor é a

sua resolução. Observou-se que o parâmetro  $\overline{\delta Z}$  possui uma excelente resolução e não depende de nenhum outro parâmetro, confirmando o resultado discutido na análise de ambigüidade. Já os parâmetros  $\overline{\delta\mu}$  e  $\overline{\delta\alpha}$  estão inter-relacionados, como é mostrado nos mapas das curvas de contorno. Estas análises permitem concluir que os parâmetros  $\overline{\delta\mu}$  e  $\overline{\delta\alpha}$  causam problemas de instabilidade e não unicidade nos procedimentos de inversão.

Pode-se analisar que apesar do bom desempenho da matriz de sensibilidade  $\tilde{M}$  as curvas de contorno da função objetivo mostram que os parâmetros  $\overline{\delta\alpha}$  e  $\overline{\delta\mu}$  estão interrelacionados e qualquer valor que satisfaça o intervalo de ambigüidade é uma solução para o problema de inversão, fato constatado através da reconstrução dos coeficientes  $R_{PP}$  e  $R_{SP}$  usando o estimador da inversa generalizada em dados sintéticos contaminados com 5% de ruído aleatório duzentas vezes. Este tipo de experimento denomina-se simulação numérica e tem o objetivo de confirmar os resultados obtidos nas análises de sensibilidade e ambigüidade. Cada parâmetro invertido apresentado neste trabalho é resultado da média aritmética do número de simulações. As reconstruções dos coeficientes  $R_{PP}$  e  $R_{SP}$ , utilizam os parâmetros estimados  $\overline{\delta Z} = -0,0709$ ;  $\overline{\delta\alpha} = -0,0728$  e  $\overline{\delta\mu} = 0,1786$ . As Figuras 8-a até 8-b confirmam a ambigüidade no problema de inversão.

### Conclusões

As análises de sensibilidade e de ambigüidade dos coeficientes associados [ $R_{PP}$   $R_{SP}$ ] predizem a não unicidade e instabilidade para o problema de inversão linear de AVO. A partir das análises sobre o número de condição, dos valores singulares e das projeções das colunas de  $V$ , observa-se que as aproximações combinadas dos coeficientes de  $R_{PP}$  e  $R_{SP}$  produzem inversões muito mais estáveis do que as dissociadas, em todos os testes apresentados. Analisando-se as curvas de contorno das funções-objetivos e a matriz de sensibilidade, observa-se que as combinações dos parâmetros  $\overline{\delta\alpha}$  e  $\overline{\delta\mu}$  produzem sempre ambigüidade e instabilidade para o problema de inversão linear, sugerindo que estas combinações possuem alguma dependência linear. Este fato é confirmado pela reconstrução dos coeficientes de reflexão.

As análises apresentadas neste trabalho podem ser estendidas para as aproximações lineares e quadráticas em meios monoclinicos e ortorrômbicos.

### Agradecimentos

Os autores agradecem ao convênio de infra-estrutura ANP/FINEP-UFPa e a CAPES.

### Referências

**Castagna, J.P. 1993.** AVO Analysis - Tutorial and Review. In Castagna, J.P. & Backus, M.M. (eds.). Offset-dependent reflectivity-Theory and Practice in AVO Analysis: seg: p.3-35.

**Drufuca, G. & Mazzotti, A 1995.** Ambiguities in AVO Inversion of Reflections from a Gas-Sand. Geophysics, 60: 134-141.

**Golub, G.H. & Van Loan, C.F. 1983.** Matrix Computations. Baltimore, The Johns Hopkins University Press, 476p.

**Lanczos, C. 1961.** Linear Differential operators, D. Van Nostrand Co., Lond.

**Ostrander, W.J. 1984.** Plane-wave reflection coefficients for gas sands at nonnormal angles of incidence, Geophysics, 49 (10): 1637-1648.

**Santos, D. F., Protázio, J. S., Costa, J. C. & Gomes, E. N. S. 2001.** Aproximações Quadráticas para Análise de AVO de Ondas Convertidas, 7CISBGf/PS6: p.1-4

**Schoenberg, M. & Protázio, J.S. 1992.** Zoeppritz Rationalized and Generalized to Anisotropy. Journal of Seismic Exploration, (1): 125-144.

**Sen, M. & Stoffa, P. L. 1995.** Global optimization methods in geophysical inversion. Elsevier.

**Wang, Y. 1999.** Approximations to the Zoeppritz equations and their use in AVO analysis. Geophysics, 64 (6): 1920-1927.

**Wu, Y. 2000.** Estimation of Gas Saturation using P-to-S Converted Waves. In: Annual Meeting SEG, 2000, Calgary. Anais eletrônicos... Calgary. Disponível em: <http://www.seg.org>

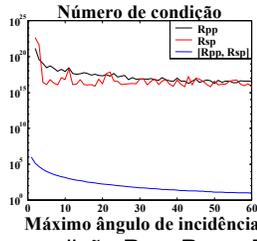


Fig. 2- Número de condição  $R_{pp}$ ,  $R_{sp}$  e  $[R_{pp} R_{sp}]$  versus o máximo ângulo de incidência do Modelo 1.

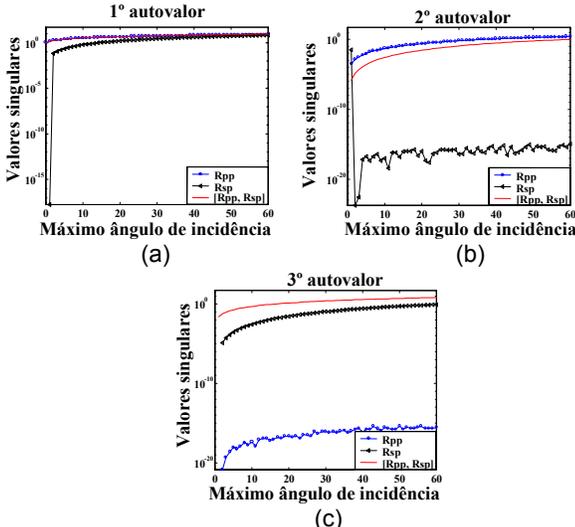


Fig. 3- As figuras 3-a a 3-c, logaritmos dos valores singulares da matriz de sensibilidade  $R_{PP}$ ,  $R_{SP}$  e  $[R_{PP} R_{SP}]$  versus o máximo ângulo de incidência Modelo 1.

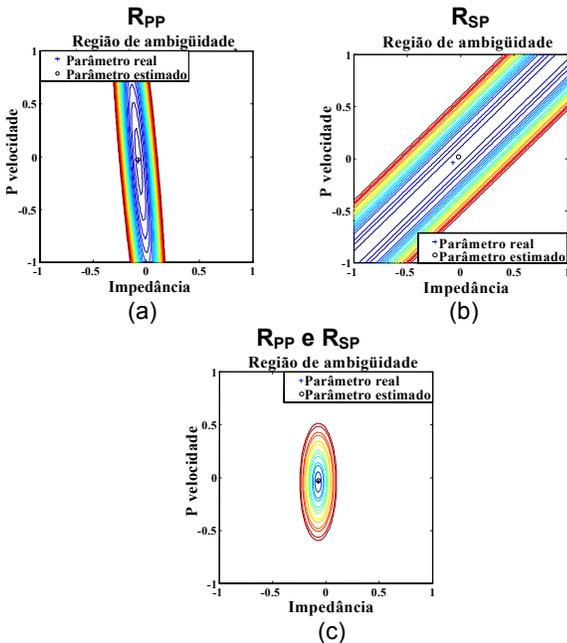


Fig. 4- As figuras 4-a, a 4-c, curvas de contorno do modelo 1 para a combinação de parâmetros  $\delta Z \times \delta \alpha$  em que as funções-objetivos são definidas pelas aproximações  $R_{PP}$ ,  $R_{SP}$  e  $[R_{PP} R_{SP}]$ .

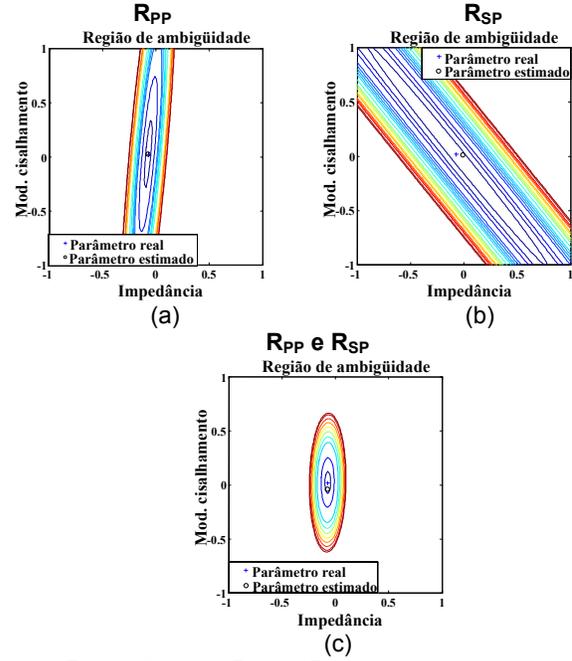


Fig. 5- As figuras 5-a a 5-c, curvas de contorno do modelo 1 para a combinação de parâmetros  $\delta Z \times \delta \mu$  em que as funções-objetivos são definidas pelas aproximações  $R_{PP}$ ,  $R_{SP}$  e  $[R_{PP} R_{SP}]$ , respectivamente.

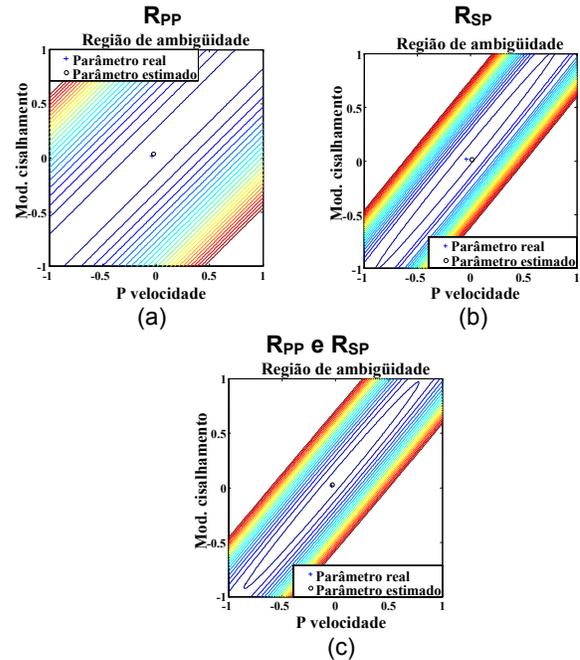


Fig. 6- As figuras (a), (b) e (c) são curvas de contorno do modelo 1 para a combinação de parâmetros  $\delta \alpha \times \delta \mu$  em que as funções-objetivos são definidas pelas aproximações  $R_{PP}$ ,  $R_{SP}$  e  $[R_{PP} R_{SP}]$ .

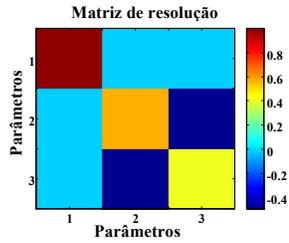


Fig. 7- Matrizes de resolução da matriz  $\tilde{M}$  para cobertura angular  $[0^\circ 30^\circ]$  do modelo 1.

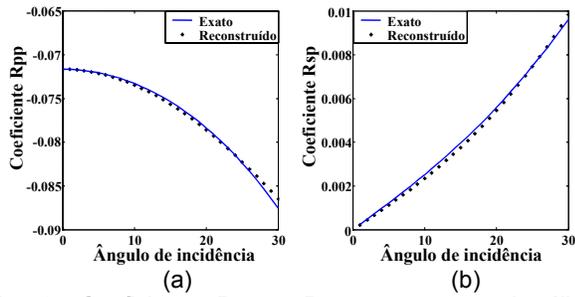


Fig. 8- Coeficiente  $R_{PP}$  e  $R_{SP}$ , a curva azul sólida corresponde aos coeficientes exatos, e a curva preta descrita por asteriscos corresponde ao coeficiente reconstruído usando os parâmetros estimados do modelo.