



Inferência Bayesiana da saturação

Raquel G. Teixeira* e Luiz Geraldo Loures, UENF/LENP, Brasil

Copyright 2005, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, 11-14 September 2005.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society. Ideas and concepts of the text are authors' responsibility and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

This methodology was developed following the Bayesian methodology of inference and seeks for an fluid indicator for the pore fluid and an associated quality measurement. The sources of information are well log data and seismic attribut data. This article presents the theoretical background and results from tests using a set of well log data.

Resumo

Baseado na Teoria de Probabilidade, este trabalho propõe uma metodologia para determinação da saturação em reservatório. Através da aplicação do Teorema de Bayes, objetiva-se combinar informações a respeito da saturação contidas nos dados de perfis de poços, informações teóricas e informações contidas em dados sísmicos, para obtenção de uma estimativa da saturação, uma medida das incertezas relacionadas com a estimativa e uma análise das fontes destas incertezas. A partir de dados de perfis sísmicos e da curva de saturação foram computadas funções distribuição de probabilidade (fdp), representando o nível de informações a respeito da saturação presente nos dados de Vp e Vs. Com uso da Equação de Gassmann (1951) e de atributos sísmicos é computada uma fdp (função verossimilhança) que representa as informações contidas nos dados de atributos sísmicos a respeito da saturação. A integração de todas essas informações é feita através da aplicação do Teorema de Bayes, resultando numa fdp (distribuição *a posteriori*) que representa o estado de conhecimento a respeito da saturação. A partir da distribuição *a posteriori* e seguindo critérios da teoria da decisão é feita a inferência do fluido.

Este artigo apresenta os principais conceitos teóricos envolvidos no processo e alguns resultados de testes iniciais em dados de poços.

Introdução

Diversas metodologias de discriminação de saturação na região interpoços têm sido desenvolvidas. O objetivo final dessas metodologias é a localização do contato óleo/água, barreiras de permeabilidade, frentes de injeção e porções de óleo não drenadas em um reservatório em produção. Considerando que técnicas convencionais conseguem explorar apenas cerca de 35% do óleo existente na formação, o conhecimento dessas características é fundamental para uma maior produtividade na recuperação avançada.

Entretanto, as estimativas de propriedades físicas da sub-superfície possuem um considerável grau de incerteza associado a etapas do processo de caracterização de reservatório e as fontes de informações usadas. Por consequência disso, o atual desafio no que se refere este assunto, é obter um método de inferência, que vise minimizar e quantificar este grau de incerteza.

Alguns métodos recentes de inferência de propriedades de reservatório a partir de dados sísmicos foram desenvolvidos. Como recentes trabalhos de inferência de propriedades físicas de reservatório, pode-se citar os seguintes: Takahashi (2000), que utiliza uma formulação estatística, teoria da informação e teoria da decisão de Bayes – com modelos de física de rochas; Russel (2004), que combinou técnicas clássicas de estatística multivariada e um método mais atual de análise de rede neural, o RBF (Radial Basis Function); Royle (2004), que utilizou os atributos de AVO e de inversão sísmica na análise de rede neural para obter a porosidade e a densidade do fluido intersticial.

Neste trabalho foi desenvolvido um critério de discriminação da saturação (óleo ou água) em um reservatório em produção através da Teoria Bayesiana da Decisão. Zellner (1996) apresenta os principais fundamentos da Teoria Bayesiana seguidos neste trabalho. Este critério foi aplicado, para teste e validação, em dados de perfis de poços. Inicialmente o trabalho foi aplicado em dados de Vp e Vs. Uma análise do conteúdo de informação a respeito da saturação em outros pares de atributos tem sido feito. Os resultados foram satisfatórios, mostrando a viabilidade para posterior aplicação em dados sísmicos.

Metodologia

Esta metodologia baseia-se na obtenção de fdp's para a saturação a partir de dados de perfis e de dados de Vp e Vs. A partir dessas fdp's é obtida uma fdp final (*distribuição a posteriori*), que representa toda informação disponível a respeito da saturação, a qual será alvo do trabalho de inferência.

Para a obtenção dessas fdp's e em seguida o trabalho de inferência são aplicadas: 1-teoria de substituição de fluidos; 2-Teorema de Bayes, 3-teoria da decisão e 4-análise de incerteza. A seguir será apresentado o embasamento teórico necessário para o entendimento da metodologia.

1- Substituição de Fluido:

A técnica de substituição de fluido permite a modelagem dos efeitos do fluido intersticial dos poros nas velocidades sísmicas e densidade das rochas. A Equação de Gassmann (1951) modela a relação entre propriedades elásticas e propriedades de fluidos a partir das propriedades da matriz da rocha.

1.1- Equação de Gassmann: Neste trabalho empregamos a Equação de Gassmann conforme descrita por Han and Batzle (2004). Segundo este autor, o módulo de compressibilidade da rocha saturada K_s pode ser descrito como:

$$K_s = K_d - \Delta K_d \quad (1)$$

$$\Delta K_d = \frac{K_0(1 - K_d/K_0)^2}{1 - \phi - K_d/K_0 + \phi \times K_0/K_f} \quad (2)$$

$$\mu_s = \mu_d \quad (3)$$

onde K_0 , K_f e K_d são o módulo de bulk do grão mineral, do fluido e da rocha seca respectivamente. ϕ é a porosidade; μ_s e μ_d são o módulo de cisalhamento da rocha saturada e da rocha seca. ΔK_d é o incremento no módulo de bulk da rocha seca resultante da saturação do fluido. Essas equações mostram que a saturação do fluido afeta o módulo de bulk, mas não o módulo de cisalhamento.

Considerando que as relações de Gassmann serão aplicadas em dados de perfis de poços, onde as velocidades compressional e cisalhante V_p e V_s , a densidade ρ , a saturação de água S_w , ϕ , e a argilosidade φ são conhecidos, considerando ainda que o reservatório em questão é formado por quartzo ($K_q = 36$, $\rho_q = 2.55$) e argila ($K_c = 21$, $\rho_c = 2.6$) e que o poço é saturado em água ($K_w = 3.093$, $\rho_w = 1.067$) e/ou óleo ($K_h = 0.934$, $\rho_h = 0.782$), tem-se que os valores de:

$$K_{s1} = \rho \times (V_p^2 - 4/3 \times V_s^2) \quad (4)$$

$$\mu = \rho \times V_p^2 \quad (5)$$

$$K_{f1} = K_w \times S_w + K_h \times (1 - S_w) \quad (6)$$

$$\rho_s = \rho_q \cdot (1 - \varphi) + \rho_c \cdot \varphi \quad (7)$$

onde K_{s1} é o módulo de bulk da rocha saturada com o fluido original de módulo K_{f1} .

Já o valor de K_0 foi calculado através da média dos limites Reuss e Voigt (Han and Batzle, 2004):

$$K_0 = 0.5 \times \left\{ \frac{1}{\frac{\varphi}{K_c} + \frac{1-\varphi}{K_q}} + [K_c \times \varphi + K_q \times (1-\varphi)] \right\} \quad (8)$$

De posse desses valores, K_d fica:

$$K_d = K_{s1} - \Delta K_s \quad (9)$$

$$= K_{s1} - \frac{K_0(1 - K_{s1}/K_0)^2}{\phi \times K_0/K_{f1} + K_d/K_0 - 1 - \phi}$$

Onde o efeito de saturação do fluido (ΔK_{s1}) é calculado a partir de K_{s1} .

Para calcular K_{s2} da rocha saturada com um novo fluido de módulo K_2 , basta aplicar na equação (2) os parâmetros já conhecidos: K_d , K_0 , K_f e ϕ . De posse de

K_{s2} , a densidade ρ_2 e as velocidades sísmicas V_{p2} e V_{s2} deste novo cenário podem ser calculadas de acordo com as equações

$$\rho_2 = \rho_w \cdot S_w \cdot \phi + \rho_o \cdot (1 - S_w) \cdot \phi + \rho_s \cdot \phi \quad (10)$$

$$V_{p2} = \sqrt{\frac{K + 4/3 \times \mu}{\rho}} \quad (11)$$

$$V_{s2} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (12)$$

2- Inferência Bayesiana e teste de hipóteses:

2.1-Teorema de Bayes

Seja Y o vetor de observações da variável aleatória bivariada (V_p, V_s) e θ o vetor de parâmetros. $p(y, \theta)$ é conhecida como a função densidade de probabilidade (fdp) conjunta de Y e θ , que segundo a teoria da probabilidade pode ser expressa como:

$$p(Y, \theta) = p(Y | \theta) \cdot p(\theta) = p(\theta | Y) \cdot p(\theta) \quad (13)$$

conseqüentemente

$$p(\theta | Y) = \frac{p(\theta) \cdot p(Y | \theta)}{p(Y)}, p(Y) \neq 0. \quad (14)$$

Esta expressão é conhecida como Teorema de Bayes e pode ser escrita da forma simplificada:

$$p(\theta | Y) \propto p(\theta) \cdot p(Y | \theta) \quad (15)$$

Onde \propto significa proporcionalidade, $p(\theta|Y)$ é distribuição *a posteriori* de vetor de parâmetros θ , $p(\theta)$ é a fdp *a priori* do vetor de parâmetros θ , e $p(Y|\theta)$ é a função de verossimilhança, descrita em função de θ .

Note que a distribuição *a posteriori* conjunta $p(\theta|Y)$ incorpora as informações *a priori* via distribuição *a priori* e as informações contidas nas observações via função de verossimilhança. Com esta função, é possível fazer inferências sobre parâmetros, que é o que será visto a seguir.

2.2- Distribuição *a priori*

A partir de dados de velocidades elásticas e saturação, obtidas através de perfis, foram computadas as distribuições *a priori*. Técnica de substituição de fluidos foi aplicada nos dados de perfis sísmicos (V_p e V_s) para obtenção de curvas de V_p e V_s nas situações de saturações em água e óleo. Elas consistem nas distribuições normais bivariadas $p(V_{po}, V_{so})$ e $p(V_{pa}, V_{sa})$, onde, para cada par de velocidades (V_p, V_s) a soma das duas probabilidades é igual a 1. As Distribuições *a priori* estão representadas na Figura 1.

2.3- Funções de verossimilhança

Considere agora um novo vetor de dados de velocidades elásticas (V_p, V_s). A função verossimilhança, que representa a distribuição de probabilidade dos dados deste vetor, e incorpora o conhecimento teórico a respeito da relação entre V_p e V_s com a saturação, dada pela Equação de Gassmann pode ser obtida

considerando-se que os erros contidos nestes dados são independentes e possuem distribuição normal, resultando numa fdp da seguinte forma:

$$p(V_p, V_s | S_w) = \prod \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} [(Y_i - Y_{calc})^T (Y_i - Y_{calc})] \right\} \quad (16).$$

Y_{calc} é obtido a partir do uso da Equação de Gassmann. Consideraram-se como limites de valor para S_w ser saturado em óleo $S_w < 0.3$, e se $S_w > 0.3$, em água.

2.2- Probabilidade *a posteriori* Associada a Hipóteses

O Teorema de Bayes foi aplicado para obtenção da distribuição *a posteriori* e em seguida os testes de hipóteses (Zellner, 1996), onde basicamente é avaliado se a formação é saturada em água ou óleo, a partir do par de atributos sísmicos V_p e V_s .

Considere duas hipóteses mutuamente exaustivas e excludentes

$$\begin{cases} H_o : \text{sat. em óleo} \\ H_a : \text{sat. em água} \end{cases}, \text{ onde } w = \begin{cases} 1 \text{ se } H_o \text{ é verdadeira} \\ 0 \text{ se } H_a \text{ é verdadeira} \end{cases}$$

As probabilidades *a priori* associadas às hipóteses são

$$\begin{aligned} p(H_o) &= p(w = 1) \\ p(H_a) &= p(w = 0) \end{aligned} \quad (17)$$

onde $p(H_o) + p(H_a) = 1$.

Seja θ o vetor de parâmetros associados a H_o e ψ o vetor de parâmetros associado a H_a , as fdp's do vetor de observações Y são dadas por

$$\begin{aligned} p(Y | H_o) &= p(Y | w = 1, \theta) \\ p(Y | H_a) &= p(Y | w = 0, \psi) \end{aligned} \quad (18)$$

Com isso, a fdp conjunta de Y , w e Θ ($\Theta = \theta, \psi$) é dada por

$$\begin{aligned} p(Y, w, \Theta) &= p(Y)p(w, \Theta | Y) \\ &= p(w, \Theta) \cdot p(Y | w, \Theta), \text{ ou} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} p(w, \Theta | Y) &= \frac{p(w, \Theta)p(Y | w, \Theta)}{p(Y)} \\ &= \frac{p(w)p(\Theta | w)p(Y | w, \Theta)}{p(Y)} \end{aligned} \quad (20)$$

Onde $p(w)$ é a fdp *a priori* de w e $p(\Theta | w)$ é a fdp condicional *a priori* de Θ , dado w .

Temos que $p(\Theta | w = 1) = p(\theta)$ e $p(\Theta | w = 0) = p(\psi)$ são as fdp *a priori* de θ e ψ respectivamente.

Então, a distribuição *a posteriori* associada com H_o pode ser obtida a partir da equação (20) inserindo $w = 1$ e integrando em função de θ , como segue

$$p(H_o | Y) = \frac{p(w = 1) \int p(\theta) p(Y | \theta) d\theta}{p(Y)} \quad (21)$$

similarmente

$$p(H_a | Y) = \frac{p(w = 0) \int p(\psi) p(Y | \psi) d\psi}{p(Y)} \quad (22)$$

A partir das probabilidades *a posteriori* encontradas, foi adotado o seguinte critério de determinação da saturação:

Se $\frac{p(H_o | Y)}{p(H_a | Y)} > 1$, dizemos que a observação é saturada em óleo. Caso contrário em água.

3- Erro associado ao teste de hipóteses

Depois de calculadas as distribuições *a posteriori* de H_o e H_a , passa-se para uma outra fase: aceitar ou rejeitar H_o , considerando que possam existir duas situações: H_o e verdadeira ou H_a e verdadeira, como esquematiza o quadro a seguir.

	Situação Real	
	H_o verdadeira	H_a verdadeira
Ação	Aceitar H_o $L(H_o, \hat{H}_o) = 0$	$L(H_a, \hat{H}_o)$
	$L(H_o, \hat{H}_a)$	Aceitar H_a $L(H_a, \hat{H}_a) = 0$

A função erro L será nula se a ação estiver de acordo com a situação real. Entretanto, se H_o for aceita quando H_a for verdadeira, a função $L(H_a, \hat{H}_o)$ será positiva e analogamente se H_a for aceita quando H_o for verdadeira.

Neste trabalho as funções de erro foram obtidas a partir da seguinte expressão:

$$L(H_a, \hat{H}_o) = \frac{1}{\|(Y - Y_o)\|_2}, \quad Y_o = (V_{po}, V_{so}) \quad (23)$$

$$L(H_o, \hat{H}_a) = \frac{1}{\|(Y - Y_a)\|_2}, \quad Y_a = (V_{pa}, V_{sa}) \quad (24)$$

Desta forma, é possível avaliar as conseqüências das ações tomadas, dado que a probabilidade *a posteriori* para a H_o e H_a são conhecidas. O erro esperado ε associado com H_o ser aceito é

$$\begin{aligned} \varepsilon(L | \hat{H}_o) &= p(H_o | Y)L(H_o | \hat{H}_o) + p(H_a | Y)L(H_a | \hat{H}_o) \\ &= p(H_a | Y)L(H_a | \hat{H}_o) \end{aligned} \quad (25)$$

analogamente

$$\begin{aligned} \varepsilon(L | \hat{H}_a) &= p(H_o | Y)L(H_o | \hat{H}_a) + p(H_a | Y)L(H_a | \hat{H}_a) \\ &= p(H_o | Y)L(H_o | \hat{H}_a) \end{aligned} \quad (26)$$

Teste com dados de perfis

A metodologia descrita anteriormente foi aplicada em dados de poços de um reservatório siliciclástico, constituído de areia e folhelho. As distribuições *a priori* foram obtidas a partir de dados de três poços, saturados em óleo, onde primeiramente foi feita a substituição de fluido segundo as equações de Gassmann (equações 1, 2 e 3) para obtenção dos dados de velocidades para a situação de saturação em água.

De posse das novas velocidades, obteve-se as distribuições bivariadas de V_p e V_s para os dois cenários de saturação, como mostra a Figura 1. Estas distribuições fornecem as primeiras informações sobre a relação entre os pares de velocidades e a saturação.

Um poço foi selecionado para teste. As observações de suas velocidades estão plotadas sobre as distribuições *a priori* da Figura 1, onde a escala de cores corresponde a saturação original do poço. Para este poço, foram calculadas as funções de verossimilhança e as probabilidades de saturação *a posteriori*.

Na Figura 2, a primeira coluna representa a saturação original do poço, onde em vermelho é saturação em óleo e azul, em água. A segunda coluna representa o resultado da decisão tomado a partir da função de distribuição *a priori*, a terceira segundo a função de verossimilhança e a quarta a distribuição *a posteriori*. A quinta coluna representa o erro associado à decisão da saturação pela probabilidade *a posteriori*.

De acordo com os gráficos, pode-se concluir que a distribuição *a priori* apresenta mais estabilidade na determinação da saturação, enquanto a função de verossimilhança aparentemente requer mais alguns ajustes.

Conclusões

De acordo com os primeiros testes, pode-se dizer que a metodologia desenvolvida neste trabalho apresenta resultados satisfatórios na discriminação da saturação através de atributos sísmicos, principalmente devido a robustez apresentada pela distribuição *a priori*. A instabilidade da função de verossimilhança obtida pelas equações de Gassmann pode ser associada a incertezas nas informações utilizadas, tal como porosidade, argilosidade e etc.

Novos pares de atributos serão testados, na medida que existe um grau de incerteza associado a alta correlação existente entre o par de atributos V_p e V_s e a sua pouca sensibilidade a saturação. O par que apresentar baixa correlação e que melhor responder à saturação será o utilizado na aplicação da metodologia nos dados sísmicos inter-poços.

Agradecimentos

Agradecemos a CAPES pela bolsa de estudos concedida durante a realização deste trabalho e a Landmark Software Grant Program.

Referências

- Gassmann, F. (1951) *Über die elastizität poröser medien*. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zurich, 96:1-23.
- Han, D.H., Batzle, M.L. (2004) *Gassmann's equation and fluid-saturation effects on seismic velocities*. Geophysics, 69, No. 2: 398-405.
- Royle, A.J (2004) *The differentiation mapping of oil gravity using amplitude variation with offset, Hebron Ben Nevis Field, Offshore Newfoundland, Canada*. Msc. Thesis, University of Calgary, Alberta, CA.

Russel, B.H. (2004) *The application of multivariate statistic and neural networks to the prediction of reservoir parameters using seismic attributes*. Ph.D Thesis, University of Calgary, Alberta, CA.

Takahashi, Isao (2000) *Quantifying information and uncertainty of rock property estimation from seismic data*. Ph.D Thesis, Stanford University.

Zellner, A. (1996) *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, INC.

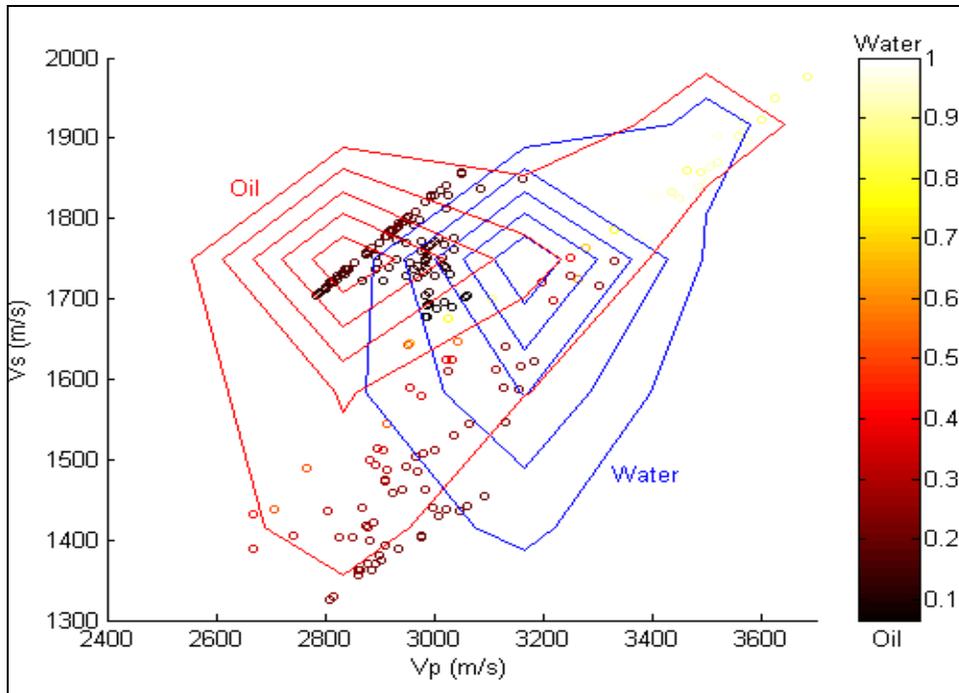


Figura 1 – Função de distribuição bivariada (V_p , V_s) de probabilidade a priori de saturação em água e óleo. Os pontos plotados são referentes às observações de um poço, onde a escala de cores indica a saturação original de cada observação.

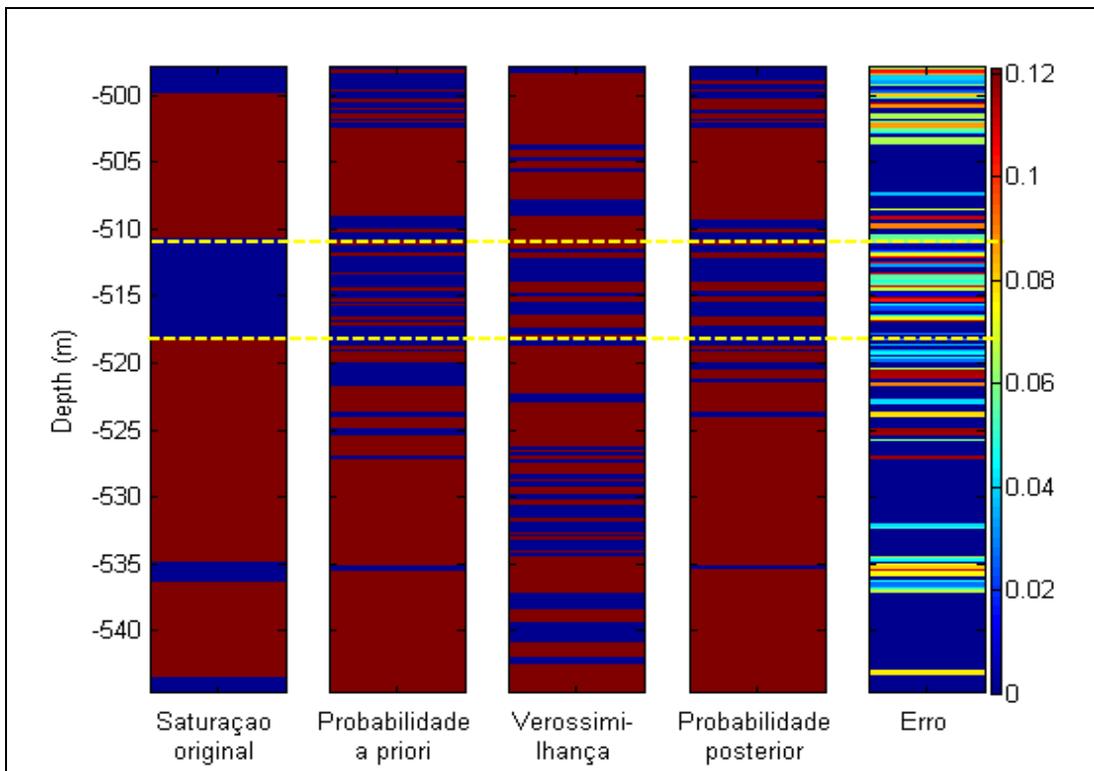


Figura 2 – Discriminação da saturação original, segundo a probabilidade a priori, função de verossimilhança, probabilidade posterior e erro associado, respectivamente. Azul indica saturação em água e vermelho em óleo.