Propagação de ondas SH em meios monoclínicos

João dos Santos Protázio, PPGME/UFPa e ESMAC
Rubenvaldo Monteiro Pereira, CPGF/UFPA – Bolsista CNPQ
Irazel Gonçalves Soares, PPGME/UFPa
Jorge Ferreira, PPGME/UFPa

This paper was prepared for presentation at the 9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, 11-14 September 2005.

Abstract (Font: Arial Bold, 9)

A monoclinic media, inside of the limits of the linear elasticity, has a specular plan of symmetry. The propagation in this plan is the case most general of propagation of elastic wave in an anisotropic media for which, a purely cisalhante deformation and normal to the plane of propagation can occur in all the directions. When this plan is vertical, these purely cisalhantes waves are waves SH and so that its propagation is possible, the media must have a vertical plan of specular symmetry and the propagation must be given in this plan. This work investigates the effect of the anisotropy on scale SH waves and that information on the anisotropy can be extracted of these effect. The analysis made here, for more general anisotropic environment where these waves exist, is sufficiently simple and produces some results surprising.

1. Introdução

Um meio monoclínico, dentro dos limites da elasticidade linear, tem um plano especular de simetria. A propagação neste plano é o caso mais geral de propagação de onda elástica em um meio anisotrópico para o qual, uma deformação puramente cisalhante e normal ao plano de propagação pode ocorrer em todas as direções. Quando este plano é vertical, estas ondas puramente cisalhantes são ondas SH e para que a sua propagação seja possível, o meio deve ter um plano vertical de simetria especular e a propagação deve se dar neste plano. Este trabalho investiga os efeitos da anisotropia sobre ondas escalares SH e que informações sobre a anisotropia podem ser extraídas destes efeitos. A análise aqui efetuada, para o ambiente anisotrópico estratificado mais geral onde estas ondas existem, é bastante simples e produz alguns resultados surpreendentes.

2. Método

2.1. Ondas SH em um meio monoclínico

Seguindo Costa (1993) o meio monoclínico, elástico e homogêneo, tendo o plano $x_1 - x_2$ como seu único plano de simetria especular, é caracterizado por sua densidade ρ e por uma matriz de parâmetros elásticos 6x6 tal que a lei de tensão-deformação, em notação condensada, seguindo AULD (1973) é dada por

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{31}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & c_{15} & 0\\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & c_{25} & 0\\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & c_{35} & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & c_{46}\\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & 0 & c_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{46} & 0 & c_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

onde as componentes de deformação, em termos das componentes do deslocamento, são

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{1,1}\\ u_{2,2}\\ u_{3,3}\\ u_{3,2}+u_{2,3}\\ u_{1,3}+u_{3,1}\\ u_{2,1}+u_{1,2}\end{bmatrix}. \quad (2.1.2)$$

Supondo-se a hipótese de deformação perpendicular ao plano de propagação, isto é, que a velocidade da partícula só apresenta componente na direção x_2, esta pode ser escrita na forma $v(x_1, x_3)$. Isto, juntamente com a estrutura da matriz de módulos elásticos em (2,1,1), implica que as únicas componentes não nulas do tensor de tensão são, em notação condensada, σ_4 e σ_6. Tais componentes são dadas por

$$\dot{\sigma}_4 = c_{44}v_{,3} + c_{46}v_{,1} \quad \dot{\sigma}_6 = c_{46}v_{,3} + c_{66}v_{,1} \quad (2.1.3)$$

Segue-se, daí, que as componentes 1 e 3 das equações de movimento são trivialmente satisfeitas e que a segunda componente satisfaz

$$c_{66}v_{,11} + 2c_{46}v_{,13} + c_{44}v_{,33} = \rho\ddot{v}, \quad (2.1.4)$$

onde a vírgula denota derivação parcial. Como a matriz dos módulos elásticos é positiva definida, as seguintes relações são obedecidas

$$c_{44} > 0, \quad c_{66} > 0, \quad c^2 \equiv c_{44}c_{66} - c_{46}^2 > 0 \quad (2.1.5)$$

A velocidade associada a uma onda harmônica plana, de amplitude A, é escrita na forma

$$v = A\exp[i\omega(s_1x_1 + s_3x_3 - t)] \quad (2.1.6)$$

A substituição desta forma em (2.1.3), resulta na relação que define a superfície de vagarosidade para onda SH em um meio monoclínico e que é dada por

$$c_{66}s_1^2 + 2c_{46}s_1s_3 + c_{44}s_3^2 = \rho. \quad (2.1.7)$$

No espaço real $s_1 - s_3$, esta relação representa uma elipse, devido à condição (2.1.5).

Para identificar ondas que se propagam para cima e para baixo, a relação de vagarosidade (2.1.7) é resolvida para s_3, em função da vagarosidade horizontal

$$s_3^{\pm} = \pm\frac{c}{c_{44}}\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}\frac{c_{44}^2}{c^2} - s_1^2} - \frac{c46}{c44}s_1. \quad (2.1.8)$$

Portanto, existem duas ondas planas em qualquer freqüência ω e vagarosidade horizontal s_1, dadas por

$$v = A^{+}\exp(i\omega s_3^{+}x_3) + A^{-}\exp(i\omega s_3^{-}x_3), \qquad (2.1.9)$$

onde, nesta equação e nas expressões subseqüentes, o fator $\exp[i\omega(s_1 x_1 - t)]$ é omitido. O sobrescrito + denota ondas que se propagam para baixo, na direção $+x_3$, enquanto o sobrescrito – denota ondas que se propagam para cima, na direção $-x_3$. Para uma elipse de vagarosidade inclinada, é possível que s_3^{+} e s_3^{-} possuam o mesmo sinal, mas sempre com $s_3^{+} > s_3^{-}$. Quando $s_3^{\pm}$ são complexos, o sinal de mais implica em atenuação na direção $+x_3$ e o sinal de menos, atenuação na direção $-x_3$.

A tração que atua no plano horizontal (x_3 constante), tem uma componente σ_4 dada por (2.1.3). Nas expressões seguintes σ_4 será simplesmente denotada por σ. Assim,

$$\begin{aligned}-\sigma = {} & A^{+}(c_{44}s_3^{+} + c_{46}s_1)\exp(i\omega s_3^{+}x_3) + \\ & A^{-}(c_{44}s_3^{-} + c_{46}s_1)\exp(i\omega s_3^{-}x_3)\end{aligned}. \qquad (2.1.10)$$

Mas, por (2.1.7), os fatores $(c_{44}s_3^{\pm} + c_{46}s_1)$ que aparecem em (2.1.10), são dados por

$$\pm c\sqrt{\frac{\rho}{c_{44}}\frac{c_{44}^2}{c^2} - s_1^2} = \pm Z_M, \qquad (2.1.11)$$

que representa a impedância de um meio monoclínico quando a vagarosidade horizontal é s_1. Portanto, (2.1.10) pode ser reescrita na forma,

$$-\sigma = Z_M[A^{+}\exp(i\omega s_3^{+}x_3) - A^{-}\exp(i\omega s_3^{-}x_3)]. \qquad (2.1.12)$$

A impedância Z_M se anula para valores de vagarosidade horizontal crítica.

2.2. A propagação de ondas SH em meios monoclínicos homogêneos, devido a uma fonte linha pontual.

Em meios monoclínicos com plano vertical de simetria especular a onda SH apresenta cisalhamento puro com polarização ortogonal ao plano de simetria $x_1 - x_2$. Neste caso, as componentes u_1 e u_3 do campo de deformação são nulas e $\frac{\partial}{\partial x_2} \equiv 0$ (Costa, 1993). Supondo a fonte localizada no ponto $(0, -h)$, $h > 0$, a equação do movimento para a componente $u_2 = u_2(t; x_1, x_3)$, e que iremos denotar por $u = u(t; x_1, x_3)$, é dada por:

$$\partial_{tt}u = a_{66}\partial_{11}u + 2a_{46}\partial_{13}u + a_{44}\partial_{33}u + \frac{\phi(t)}{\rho}\delta(x_1)\delta(x_3 + h), \qquad (2.2.1)$$

sendo ∂_{tt} a derivada segunda no tempo; ∂_{ij}, a derivada cruzada com relação às i-ésima e j-ésima variáveis; δ, a função delta de Dirac; ϕ, a função assinatura no tempo, e $a_{ij} = \frac{c_{ij}}{\rho}$, os parâmetros elásticos do meio normalizados pela densidade. Observa-se que cada a_{ij} tem a dimensão do quadrado da velocidade. As condições iniciais do problema são dadas por:

$$\begin{cases} u(0; x_1, x_3) = 0 \\ \partial_t u(0; x_1, x_3) = 0. \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

Aplicando-se a transformada de Laplace no tempo e de Fourier nas variáveis x_1 e x_3, obtém-se a solução $\bar{u}(s; k_1, k_3)$ no espaço transformado:

$$\bar{u}(s; k_1, k_3) = \frac{\bar{\phi}(s)\exp(-ik_3h)}{\rho a_{44}\left[k_3^2 + \frac{2a_{46}k_1}{a_{44}}k_3 + \frac{a_{66}k_1^2 + s^2}{a_{44}}\right]}. \qquad (2.2.3)$$

sendo $\bar{\phi}(s)$ a transformada de Laplace da assinatura $\phi(t)$. A aplicação da transformada inversa de Fourier com relação à variável espacial x_3 dá:

$$\tilde{u}(s; k_1, x_3) = \frac{\bar{\phi}(s)}{2\pi\rho a_{44}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[-ik_3(x_3 + h)]\,dk_3}{k_3^2 + \frac{2a_{46}k_1}{a_{44}}k_3 + \frac{a_{66}k_1^2 + s^2}{a_{44}}}. \qquad (2.2.4)$$

Estendendo k_3 para o plano complexo, a integral acima pode ser calculada através do método dos resíduos. Os pólos do integrando são dados por:

$$k_3^{\pm} = -\frac{a_{46}k_1}{a_{44}} \pm i\frac{\sqrt{a_{44}s^2 + (a_{44}a_{66} - a_{46}^2)k_1^2}}{a_{44}} \equiv \kappa_R \pm i\kappa_I. \qquad (2.2.5)$$

Observemos que $a_{44}a_{66} - a_{46}^2 > 0$, o que garante a realidade de κ_I. Usando-se o método dos resíduos, a solução (2.2.4) fica sendo:

$$\tilde{u}(s; k_1, x_3) = \frac{\bar{\phi}(s)}{2\pi\rho a_{44}}\frac{\exp[-i\kappa_R(x_3 + h)]\exp(-\kappa_I|x_3 + h|)}{\kappa_I}. \qquad (2.2.6)$$

Para a obtenção do campo transiente será usado o método de Cagniard-de Hoop (Aki & Richards, 1980). Inicialmente, o campo (2.2.6) é invertido com relação à variável espacial x_1, determinando o campo $\hat{u}(s; x_1, x_3)$, no domínio de *s*:

$$\hat{u}(s; x_1, x_3) = \frac{\bar{\phi}(s)}{4\pi\rho a_{44}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\exp[-i\kappa_R(x_3 + h)]\exp(-\kappa_I|x_3 + h|)\exp(-ik_1x_1)\,dk_1}{\kappa_I} \qquad (2.2.7)$$

e que pode ser rescrita como

$$\hat{u}(s; x_1, x_3) = \frac{\bar{\phi}(s)}{2\pi\rho a_{44}}\mathrm{Re}\left[\int_0^{\infty}\frac{\exp[-i\kappa_R(x_3 + h)]\exp(-\kappa_I|x_3 + h|)\exp(-ik_1x_1)\,dk_1}{\kappa_I}\right], \qquad (2.2.8)$$

em que Re corresponde à parte real do argumento. Introduzindo o parâmetro de vagarosidade p através da substituição $k_1 = -isp$ na equação (2.2.7), o campo de onda é dado por:

$$\hat{u}(s; x_1, x_3) = \frac{\bar{\phi}(s)}{2\pi\bar{\rho}\bar{\beta}^2}\mathrm{Im}\left[\int_0^{i\infty}\frac{\exp[-s(\bar{x}_1p + \bar{\eta}|\bar{x}_3|)]\,dp}{\bar{\eta}}\right], \qquad (2.2.9)$$

em que Im corresponde à parte imaginária do argumento e valem as seguintes parametrizações:

$$\bar{x}_1 = x_1 - \frac{a_{46}}{a_{44}}(x_3 + h)$$

$$\bar{x}_3 = \frac{\sqrt{a_{66} - a_{46}^2/a_{44}}}{\sqrt{a_{44}}}(x_3 + h)$$

$$\bar{\beta} = \sqrt{a_{66} - a_{46}^2/a_{44}} \qquad (2.2.10)$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho\sqrt{a_{44}}}{\bar{\beta}}$$

$$\bar{\eta} = \sqrt{1/\bar{\beta}^2 - p^2}, \quad \mathrm{Re}\,\bar{\eta} > 0.$$

O campo definido em (2.2.10) apresenta forma análoga à equação (6.47) de Aky & Richards (1980), para o caso isotrópico. Com isto, podemos definir o parâmetro do tempo t por:

$$t = \bar{x}_1 p + \bar{\eta}|\bar{x}_3|. \qquad (2.2.11)$$

Definindo-se

$$\bar{r}^2 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_3^2 = x_1^2 - \frac{2A_{46}}{A_{44}}x_1(x_3+h) + \frac{A_{66}}{A_{44}}(x_3+h)^2, \quad (2.2.12)$$

o contorno de Cagniard $p(t)$ pode ser explicitado por:

$$p(t) = \begin{cases} \dfrac{\bar{x}_1 t - |\bar{x}_3|\sqrt{\bar{r}^2/\bar{\beta}^2 - t^2}}{\bar{r}^2}, & \text{para } t < \bar{r}/\bar{\beta} \\ \\ \dfrac{\bar{x}_1 t + i|\bar{x}_3|\sqrt{t^2 - \bar{r}^2/\bar{\beta}^2}}{\bar{r}^2}, & \text{para } t > \bar{r}/\bar{\beta}. \end{cases} \qquad (2.2.13)$$

Como $\dfrac{dp}{dt}$ é real para $t < \bar{r}/\bar{\beta}$, e $\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{i\bar{\eta}}{\sqrt{t^2 - \bar{r}^2/\bar{\beta}^2}}$ para $t > \bar{r}/\bar{\beta}$, a expressão (2.2.9) fica sendo:

$$\hat{u}(s;x_1,x_3) = \frac{\bar{\phi}(s)}{2\pi\bar{\rho}\bar{\beta}^2}\int_0^\infty \frac{H(t - \bar{r}/\bar{\beta})\exp(-st)\,dt}{\sqrt{t^2 - \bar{r}^2/\bar{\beta}^2}}, \quad (2.2.14)$$

sendo H a conhecida função de Heaviside, definida por:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{para } t > 0 \\ \\ 0, & \text{para } t < 0. \end{cases} \qquad (2.2.15)$$

Lembrando que a definição da transformada de Laplace $\hat{f}(s)$ de uma função causal f(t) é dada por:

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t)\exp(-st)\,dt, \qquad (2.2.16)$$

inspeção direta da expressão (2.2.14) determina o campo transiente como sendo:

$$u(t;x_1,x_3) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad 0 < t < \bar{r}/\bar{\beta} \\ \\ \dfrac{1}{2\pi\bar{\rho}\bar{\beta}^2}\displaystyle\int_{\bar{r}/\bar{\beta}}^{t} \frac{\phi(t-\tau)\,d\tau}{\sqrt{t^2 - \bar{r}^2/\bar{\beta}^2}} & \text{para} \quad t > \bar{r}/\bar{\beta}. \end{cases}$$

(2.2.17)

2.3 A reflexão de ondas SH em um semi-espaço livre anisotrópico.

Para estudar a reflexão de uma onda SH em um semi-espaço livre no plano de simetria de um meio monoclínico, a localização da fonte será tomada no ponto $(0,-h), h > 0$, como no caso da propagação e a interface será localizada em $x_3 = 0$. A equação do movimento para a componente $u_2 = u_2(t;x_1,x_3)$, e que iremos denotar por $u = u(t;x_1,x_3)$, é dada por:

$$\partial_{tt}u = a_{66}\partial_{11}u + 2a_{46}\partial_{13}u + a_{44}\partial_{33}u + \frac{\phi(t)}{\rho}\delta(x_1)\delta(x_3+h), \quad (2.3.1)$$

para $x_3 < 0$.

As condições iniciais do problema são dadas por:

$$\begin{cases} u(0;x_1,x_3) = 0 \\ \\ \partial_t u(0;x_1,x_3) = 0, \end{cases} \qquad (2.3.2)$$

e a condição de fronteira por:

$$a_{44}\partial_3 u + a_{46}\partial_1 u = 0, \text{ em } x_3 = 0. \qquad (2.3.3)$$

Aplicando-se as transformadas de Laplace no tempo t e Fourier na variável espacial x_1, o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias em x_3 é obtido:

$$\begin{cases} \partial_{33}\bar{u} - \dfrac{2ia_{46}k_1}{a_{44}}\partial_3\bar{u} - \dfrac{s^2 + a_{66}k_1^2}{a_{44}}\bar{u} = -\dfrac{\bar{\phi}(s)}{\rho a_{44}}\delta(x_3+h), & \text{para } x_3 < 0 \\ \\ a_{44}\partial_3\bar{u} - ik_1 a_{46}\bar{u} = 0, & \text{para } x_3 = 0. \end{cases}$$

(2.3.4)

A solução geral do problema apresenta a forma:

$$\bar{u}(s;k_1,x_3) = \bar{u}_S(s;k_1,x_3) + \bar{u}_R(s;k_1,x_3), \qquad (2.3.5)$$

sendo $\bar{u}_S(s;k_1,x_3)$ o campo de onda direto devido à fonte linha-pontual e definida em (2.2.4) e $\bar{u}_R(s;k_1,x_3)$, o campo de onda refletido e definido por:

$$\bar{u}(s;k_1,x_3) = B\exp[-i(\kappa_R + i\kappa_I)x_3], \qquad (2.3.6)$$

sendo B uma constante a ser determinada. A condição de contorno apresentada em (2.3.4) determina que:

$$B = -\frac{\bar{\phi}(s)}{2\rho a_{44}}\frac{\exp[-i(\kappa_R - i\kappa_I)h]}{\kappa_I}. \qquad (2.3.7)$$

Portanto, no espaço $s - k_1$ o campo total espalhado fica sendo:

$$\bar{u}(s;k_1,x_3) = \frac{\bar{\phi}(s)\exp[-i\kappa_R(x_3+h)]}{2\rho a_{44}\kappa_I}\left[\exp(-\kappa_I|x_3+h|)+\exp[-\kappa_I(h-x_3)]\right]. \quad (2.3.8)$$

A aplicação do método de Cagniard-de Hoop será dividida em duas partes: uma, para inverter

$$\bar{u}(s;k_1,x_3) = \frac{\bar{\phi}(s)\exp[-i\kappa_R(x_3+h)]\exp(-\kappa_I|x_3+h|)}{2\rho a_{44}\kappa_I}, \quad (2.3.9)$$

e outra para inverter

$$\bar{u}(s;k_1,x_3) = \frac{\bar{\phi}(s)\exp[-i\kappa_R(x_3+h)]\exp[-\kappa_I(h-x_3)]}{2\rho a_{44}\kappa_I}. \quad (2.3.10)$$

A inversão de (2.3.9) apresenta a solução descrita em (2.2.17), valendo as parametrizações em (2.2.10). Quanto à inversão de (2.3.10), manipulações algébricas análogas ao caso anterior nos determinam o campo refletido $\hat{u}_R(s;x_1,x_3)$ cuja forma é dada por:

$$\hat{u}(s;x_1,x_3) = \frac{\bar{\phi}(s)}{2\pi\bar{\rho}\bar{\beta}^2}\mathrm{Im}\left[\int_0^{i\infty}\frac{\exp[-s(\bar{x}_1p+\bar{\eta}\tilde{x}_3)]\,dp}{\bar{\eta}}\right], \quad (2.3.11)$$

sendo os parâmetros $\bar{x}_I$ e $\bar{\eta}$ como definidos em (2.2.10) e

$$\tilde{x}_3 = \frac{\sqrt{a_{66}-a_{46}^2/a_{44}}}{a_{44}}(h-x_3) \geq 0. \quad (2.3.12)$$

repetindo todo o procedimento aplicado no caso anterior para a obtenção do campo direto, o campo de onda refletido fica sendo:

$$u(t;x_1,x_3) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad 0 < t < \tilde{r}/\bar{\beta} \\ \dfrac{1}{2\pi\bar{\rho}\bar{\beta}^2}\displaystyle\int_{\tilde{r}/\bar{\beta}}^{t}\frac{\phi(t-\tau)\,d\tau}{\sqrt{t^2-\tilde{r}^2/\bar{\beta}^2}} & \text{para} \quad t > \tilde{r}/\bar{\beta}, \end{cases} \quad (2.3.13)$$

sendo $\tilde{r}^2 = \bar{x}_1^2 + \tilde{x}_3^2$. Como $\bar{r} \leq \tilde{r}$, o campo de onda total refletido na interface é dado por:

$$u(t;x_1,x_3) = \begin{cases} 0, & \text{para } 0 < t < \bar{r}/\bar{\beta} \\ \dfrac{1}{2\pi\bar{\rho}\bar{\beta}^2}\displaystyle\int_{\bar{r}/\bar{\beta}}^{t}\frac{\phi(t-\tau)\,d\tau}{\sqrt{t^2-\bar{r}^2/\bar{\beta}^2}}, & \text{para } \bar{r}/\bar{\beta} < t < \tilde{r}/\bar{\beta} \\ \dfrac{1}{2\pi\bar{\rho}\bar{\beta}^2}\left\{\displaystyle\int_{\bar{r}/\bar{\beta}}^{\tilde{r}/\bar{\beta}}\frac{\phi(t-\tau)\,d\tau}{\sqrt{t^2-\bar{r}^2/\bar{\beta}^2}} + \int_{\tilde{r}/\bar{\beta}}^{t}\frac{\phi(t-\tau)\,d\tau}{\sqrt{t^2-\tilde{r}^2/\bar{\beta}^2}}\right\}, & \text{para } t > \tilde{r}/\bar{\beta}. \end{cases} \quad (2.3.14)$$

2.4 Equação Eikonal e Transporte para um meio monoclínico equivalente a um Isotrópico

Vamos derivar as equações eikonal e do transporte. Agora $c = c(x_1,x_3)$ e nós procuramos a solução na forma

$$\hat{u}_s = A(x_1,x_3)e^{i\omega(t-\tau(x_1,x_3))}. \quad (2.4.1)$$

onde τ é chamado de eikonal, A é a amplitude e ω a freqüência circular suposto ser um parâmetro grande. Fazendo a derivada de $\hat{u}_s$ em relação a x_1 e x_3 e em relação ao tempo e inserindo $\hat{u}_s = A(x_1,x_3)e^{i\omega(t-\tau(x_1,x_3))}$. na equação do movimento para um meio monoclínico e desprezando a fonte nós obtemos

$$\begin{aligned}\left(-\omega^2A\right)e^{i\omega(t-\tau)} = &= e^{i\omega(t-\tau)}\left\{a_{66}\left(-\omega^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\right)^2A - i\omega\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\frac{\partial A}{\partial x_1}+\frac{\partial^2\tau}{\partial x_1^2}A\right)+\frac{\partial^2A}{\partial x_1^2}\right)+\right.\\ &+2a_{46}\left(-\omega^2\frac{\partial\tau}{\partial x_3}\frac{\partial\tau}{\partial x_1}A - i\omega\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\frac{\partial A}{\partial x_3}+\frac{\partial\tau}{\partial x_3}\frac{\partial A}{\partial x_1}+\frac{\partial^2\tau}{\partial x_1\partial x_3}A\right)+\frac{\partial^2A}{\partial x_1\partial x_3}\right)+\\ &\left.+a_{44}\left(-\omega^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_3}\right)^2A - i\omega\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_3}\frac{\partial A}{\partial x_3}+\frac{\partial^2\tau}{\partial x_3^2}A\right)+\frac{\partial^2A}{\partial x_3^2}\right)\right\}.\end{aligned} \quad (2.4.2)$$

de onde tiramos a equação eikonal

$$a_{66}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\right)^2 + 2a_{46}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\frac{\partial\tau}{\partial x_3}\right) + a_{44}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_3}\right)^2 = 1 \quad (2.4.3)$$

e a equação do transporte

$$\begin{aligned}&\left\{2\left[a_{66}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\frac{\partial A}{\partial x_1}\right)+a_{46}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_1}\frac{\partial A}{\partial x_3}+\frac{\partial\tau}{\partial x_3}\frac{\partial A}{\partial x_1}\right)+a_{44}\left(\frac{\partial\tau}{\partial x_3}\frac{\partial A}{\partial x_3}\right)\right]+\right.\\ &\left.+\left(a_{66}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_1^2}+a_{46}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_1\partial x_3}+a_{44}\frac{\partial^2\tau}{\partial x_3^2}\right)\right\}A = 0\end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Agora considerando as seguintes parametrizações

$$\bar{x}_1 = x_1 - \frac{a_{46}}{a_{44}}x_3; \quad \text{e} \quad \bar{x}_3 = \frac{\sqrt{a_{66}-a_{46}^2/a_{44}}}{\sqrt{a_{44}}}x_3;$$

$$\bar{\beta} = \sqrt{a_{66}-a_{46}^2/a_{44}} \quad \text{e} \quad \bar{\rho} = \frac{\rho\sqrt{a_{44}}}{\bar{\beta}} \quad \text{e} \quad \bar{\eta} = \sqrt{1/\bar{\beta}^2-\rho^2}, \Re\bar{\eta} > 0 \quad (2.4.5)$$

como,

$$\frac{\partial\tau}{\partial x_1} = \frac{\partial\tau}{\partial\bar{x}_1} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\tau}{\partial x_3} = \left(-\frac{a_{46}}{a_{44}}\right)\frac{\partial\tau}{\partial\bar{x}_1} + \left(\frac{\sqrt{a_{66}-\dfrac{a_{46}^2}{a_{44}}}}{\sqrt{a_{44}}}\right)\frac{\partial\tau}{\partial\bar{x}_3} \quad (2.4.6)$$

substituindo na equação (2.4.1) e simplificando obtemos

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial\bar{x}_3}\right)^2 = \left(\frac{1}{a_{66}-\dfrac{a_{46}^2}{a_{44}}}\right) \quad (2.4.7)$$

que pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial\bar{x}_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial\bar{x}_3}\right)^2 = \frac{1}{\bar{\beta}^2} \quad (2.4.8)$$

que é a equação eikonal em um meio isotrópico.

Agora considerando os análogos para o caso da amplitude pois, $A(x_1,x_3)$ como no caso da eikonal τ, obtemos

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = \frac{\partial A}{\partial \bar{x}_1} \quad e \quad \frac{\partial A}{\partial x_3} = (-\frac{a_{46}}{a_{44}})\frac{\partial A}{\partial \bar{x}_1} + \left(\frac{\sqrt{a_{66} - \frac{a_{46}^2}{a_{44}}}}{\sqrt{a_{44}}} \right) \frac{\partial A}{\partial \bar{x}_3} \quad (2.4.9)$$

Substituindo estes valores na equação do transporte e simplificando nós obtemos

$$\left(a_{66} - \frac{a_{46}^2}{a_{44}} \right) \left\{ 2\left[\left(\frac{\partial A}{\partial \bar{x}_1} \frac{\partial \tau}{\partial \bar{x}_1} \right) + \left(\frac{\partial A}{\partial \bar{x}_3} \frac{\partial \tau}{\partial \bar{x}_3} \right) \right] + \left[\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \bar{x}_1^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \bar{x}_1^2} \right) \right] \right\} A = 0 \quad (2.4.10)$$

que é a equação do transporte para um meio isotrópico

Conclusões

Ondas SH refletidas em um meio anisotrópico monoclínico estratificado subjacente não possui qualquer informação sobre a anisotropia em seu plano de simetria especular, isto é, nenhum experimento na superfície utilizando apenas registros de ondas SH em um meio monoclínico pode detectar a presença de anisotropia. Este resultado também se aplica à interpretação sísmica utilizando modelos acústicos com anisotropia elíptica, quando é considerado somente o tempo de trânsito.

Referências

AKI, K. & RICHARD, P.G. 1980. *Quantitative seismology*. New York, W. H. Freeman & Co. v.2, 557p.

AULD, B.A. 1973. *Acoustic fields and waves in solids*. New York, John Wiley & Sons, Inc. v.2, 423p.

COSTA, J.C. 1993, *Modelagem Sísmica e Inversão na Presença de Anisotropia*, Tese de Doutorado, CPGF – UFPa.