



Amplitudes e padrões de polarização do espalhamento de pulsos em meios anisotrópicos

Rubervaldo Monteiro Pereira
CPGF/UFPa Bolsista CNPQ – Brasi

João dos Santos Protázio
PPGME/UFPa e ESMAC

Jessé Carvalho Costa
CPGF/UFPa

Copyright 2005, SBGF - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, 11-14 September 2005.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society. Ideas and concepts of the text are authors' responsibility and do not necessarily represent any position of the SBGF, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

To extract lithological information from subsurface by means of a survey of seismic data has become a great challenging in relation to a seismic research because of the lack of insufficient hypotheses of stratification made by isotropic layers, which should represent through surveys the behavior of elastic field with great offset between source and receiver, geophones multicomponent data, measures of three-dimensional vertical seismic profile (VSP) and so forth. For this reason, a pattern of subsurface has been demanded in order to be adequated to this new reality. As a result, the seismic prospecting starts considering the presence of anisotropy, so the anisotropic pattern of subsurface is the one which is closer in of supra named surveys. In special, for the seismic survey in relation to the reservoirs characterization, the anisotropy that is induced by fractures is the one that is more similar to the needs and it is widely referred in the literature.

This paper aims at showing formalism to modeling the scattered of pulses from incident plane waves occurred in horizontal plain interface which separates anisotropic layers. This scatter is obtained through clear formulation of traction deformation fields as function of propagator, polarization and impedance matrixes of media, this formalism will be later used to obtain the of transmission and reflection coefficients matrixes through a horizontal plain interface and, finally, it is generalized to a scattering through multiple layers. Doing that, it is possible to calculate the pulse scattering through layers after we insert the amplitude of analytical pulse to an incident wavefield.

Introdução

A formulação de um modelo analítico para o estudo da propagação de pulsos através de interfaces planas que separam meios elásticos anisotrópicos é o objetivo principal deste trabalho.

A necessidade de se estudar modelos anisotrópicos, no estudo da propagação de ondas através de meios elásticos, para a prospecção geofísica, advém do surgimento das técnicas de aquisição de dados, tais como: as medidas de Perfil Sísmico Vertical (PSV) tridimensional, os levantamentos com grandes afastamentos entre fonte e receptor; além do desenvolvimento de geofones com multicomponentes entre outras.

Por outro lado, este trabalho utiliza como modelos de subsuperfície, nos experimentos numéricos, meios anisotrópicos induzidos por fraturas segundo o modelo de Hudson (1981), pelo fato da presença de fraturas naturais em reservatórios, e mesmo nas rochas capeadoras destes ser fator importante na determinação do fluxo de fluidos durante a produção e também por estes meios comportarem-se efetivamente como meios anisotrópicos. Sismogramas sintéticos completos de ondas planas, construídos com as expressões analíticas das auto-soluções já foram estudados por Fryer & Frazer (1987) trabalho este posteriormente adaptado para experimentos em PSV por Mallick & Frazer (1988) porém, os mesmos consideravam meios anisotrópicos estratificados com pelo menos um plano de simetria especular (monoclínico). Já Crampin (1985) usou além de sismogramas sintéticos, hodogramas (PSV) 3D para analisar a anisotropia causada pela birrefringência das ondas cisalhantes para estimar a orientação das fraturas e a direção preferencial do fluxo de fluidos em reservatórios.

Um estudo detalhado da propagação de pulsos foi feito por Protázio (1994). Neste ele fez um estudo completo da reflexão e transmissão de pulsos para ondas P, S e T e múltiplas obtidas de uma onda incidente P em meios isotrópico e anisotrópico com pelo menos um plano de simetria especular objetivando principalmente marcar o comportamento pós-crítico do espalhamento destes pulsos.

Neste texto é feita uma extensão do trabalho elaborado por Protázio (1994) ao considerar um modelo matemático explícito para a propagação de pulsos em meios anisotrópicos gerais.

O modelo é robusto para estudar reflexão e transmissão de ondas P, S e T porém, os experimentos numéricos apresentados aqui tratam apenas do caso de ondas incidentes P, de suas refletidas e transmitida P. Os resultados obtidos ratificam resultados obtidos nos trabalhos de Protázio (1994) e Gomes (1999) e nos abre novas perspectivas de estudo.

Teoria

Em um meio perfeitamente elástico, linear e anisotrópico, com densidade ρ e parâmetros elásticos dados por c_{ijkl} , a equação de geral da onda nestes meios é dada por:

$$\rho \partial_{tt} w_i = \partial_j \left[c_{ijkl} \partial_l w_k \right] + f_i \quad (1.1)$$

sendo w_i , o campo de onda; ∂_{tt} , a segunda derivada no tempo; ∂_j , a j-ésima derivada espacial; τ_{ij} , o tensor de tração e f_i , uma fonte externa associada ao problema.

Considere-se agora uma onda harmônica plana (Aki & Richard, 1980)

$$w_i = A n_j e^{-i\omega(t - x_k S_k)} \quad (1.2)$$

sendo A , a amplitude da onda; n_j , a sua polarização unitária; t , o tempo; ω , a frequência e s_k , o vetor de vagarosidade, que determina a direção normal da frente de onda. A substituição de (1.2) em (1.1), tomando-se $f_i = 0$, gera a conhecida equação de Christoffel:

$$(\Gamma_{ik} - \rho \delta_{ik}) n_k = 0 \text{ ou } (\tilde{\Gamma}_{ik} - v^2 \delta_{ik}) n_k = 0 \quad (1.3)$$

sendo $\Gamma_{ik} = c_{ijkl} s_j s_l$ ou $\tilde{\Gamma}_{ik} = a_{ijkl} m_j m_l$, a chamada matriz de Christoffel, a qual é simétrica e positiva definida. Aqui, $a_{ijkl} = c_{ijkl} / \rho$, e m_i é um vetor unitário na direção da vagarosidade $s_k = m_k / v$, sendo v a velocidade de fase..

Para meios sem atenuação, os coeficientes da matriz de Christoffel são reais e o sistema linear homogêneo (1.3) constitui um problema de autovalor real. Segue da condição de existência de soluções não-triviais, que o determinante da matriz de Christoffel é nulo. Destas condições obtém-se a chamada equação característica da matriz $\tilde{\Gamma}_{ik} = a_{ijkl} m_j m_l$, ou seja:

$$\det(a_{ijkl} m_j m_l - v^2 \delta_{ij}) = 0 \quad (1.4)$$

Para a qual existem raízes reais para o auto valor v^2 . Portanto, para uma dada direção unitária m_i , a equação (1.4) produz três velocidades de fase v , em geral distintas, que podem ser ordenadas como $v_T \leq v_S \leq v_P$, com os sub-índices T, S e P representando as ondas com menor, média e maior velocidades de fase, respectivamente. As velocidades dependem das mesmas variáveis a_{ijkl} e m_i . A dependência de m_i implica na dependência da velocidade de fase com relação à direção de propagação da onda. Assim para cada velocidade v_Q , $Q = P, S$ e T em (1.4) haverá um correspondente autovetor real unitário n_{iQ} , conhecido como a polarização associada. Se todas as três velocidades são diferentes, as polarizações correspondentes ficam determinadas ao longo de três direções mutuamente ortogonais. Assim as três diferentes propagações de onda em um meio anisotrópico não diferem apenas pelas suas velocidades de fase v_Q mas também pela orientação de suas polarizações n_{iQ} , chamada de polarização linear, que fisicamente especificam as direções de deslocamento da partícula w_i .

O espalhamento de ondas planas através de meios anisotrópicos gerais.

Considere-se, agora, um meio elástico anisotrópico arbitrário, com o campo de uma onda plana em um horizonte arbitrário x_3 descrito por (1.2) e orientado por um sistema de referência cartesiano tridimensional. Assim, para cada componente horizontal $s_H = (s_1, s_2)^t$ fixa (Lei de Snell), a equação (1.4) determina uma equação de sexto grau em s_3 , definindo uma superfície no espaço s que dá os possíveis valores da vagarosidade como função da direção de propagação cujas raízes podem ser reais ou complexas, no caso da ocorrência de eventos pré ou pós críticos,

respectivamente. No caso das raízes reais, estes eventos podem, ainda, ser classificados como descendentes (notado com um sobre-índice D) ou ascendentes (notado com um sobre-índice U) conforme a componente vertical da velocidade de grupo associada seja positiva ou negativa. No caso de eventos pós-críticos, e considerando-se o fato dos coeficientes da equação característica serem todos reais, as raízes complexas aparecem em pares conjugados; podendo-se escolher as componentes de s_3 como sendo descendente ou ascendente conforme estas atenuem a amplitude com a profundidade. Segue das condições de radiação que, para $\omega > 0$: $\text{Im}(s_3^D) > 0$ e $\text{Im}(s_3^U) < 0$, sendo s_3^D e s_3^U os eventos descendente e ascendente, respectivamente. Assim, as seis componentes s_3 são separadas em dois blocos de três componentes cada um: um ascendente $\{s_{3P}^U, s_{3S}^U, s_{3T}^U\}$ e outro descendente, $\{s_{3P}^D, s_{3S}^D, s_{3T}^D\}$. Por outro lado, as polarizações também vão ficar divididas em dois blocos: um ascendente, $\{n_p^U, n_s^U, n_t^U\}$ e outro, descendente, $\{n_p^D, n_s^D, n_t^D\}$. Uma representação esquemática destes efeitos pode ser observada nas Figuras 1a e 1b na qual podemos visualizar duas superfícies de vagarosidade no plano xy, uma com plano de simetria especular e outra sem esta simetria.

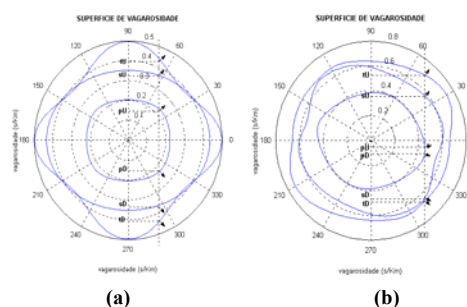


Figura 1 - Superfície de vagarosidade no plano xy para meios anisotrópicos. Cada vagarosidade horizontal s_H determinando três componentes verticais ascendentes $\{s_{3P}^U, s_{3S}^U, s_{3T}^U\}$ e três descendentes $\{s_{3P}^D, s_{3S}^D, s_{3T}^D\}$ observando-se a simetria vertical na figura (a) e a ausência na figura (b).

Agora, superpondo-se os efeitos de todos os eventos ascendentes e descentes em cada horizonte x_3 , o campo de onda total é dado por:

$$w = e^{-i\omega(t - (s_H, x_H))} N^D e^{i\omega x_3 s_3^D} d + e^{-i\omega(t - (s_H, x_H))} N^U e^{i\omega x_3 s_3^U} u, \quad (1.5)$$

sendo d e u vetores em que as componentes são as amplitudes das ondas descendentes e ascendentes, respectivamente e \langle, \rangle , o usual produto interno de vetores. As matrizes de polarização N^D e N^U guardam em suas colunas as informações das polarizações das ondas ascendentes e descendentes, respectivamente e apresentam as formas:

$$N^D = [n_p^D \ n_s^D \ n_t^D] \dots e \dots N^U = [n_p^U \ n_s^U \ n_t^U]. \quad (1.6)$$

enquanto as matrizes diagonais \mathbf{S}_3^D e \mathbf{S}_3^U guardam as informações das componentes verticais das vagarosidades das ondas ascendentes e descendentes, respectivamente e apresentam as formas:

$$\mathbf{S}_3^D = \text{diag}[s_{3P}^D, s_{3S}^D, s_{3T}^D] \quad \text{e} \quad \mathbf{S}_3^U = \text{diag}[s_{3P}^U, s_{3S}^U, s_{3T}^U]. \quad (1.7)$$

Por outro lado, o campo vertical de tração apresenta a forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_3 = & e^{-i\omega(t-(s_H, \mathbf{x}_H))} \mathbf{Z}^D \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_3^D} \mathbf{d} + \\ & + e^{-i\omega(t-(s_H, \mathbf{x}_H))} \mathbf{Z}^U \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_3^U} \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

sendo \mathbf{Z}^D e \mathbf{Z}^U as matrizes de impedância descendente e ascendente, respectivamente, do meio (Gomes 1999). Como em cada horizonte x_3 os campos \mathbf{w} e $\boldsymbol{\tau}_3$ são considerados, por hipótese, contínuos pode-se definir o campo como:

$$\mathbf{b}(x_3) = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\tau}_3 \end{bmatrix} = e^{-i\omega(t-(s_H, \mathbf{x}_H))} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^D & \mathbf{N}^U \\ \mathbf{Z}^D & \mathbf{Z}^U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_3^D} & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_3^U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

ou reescrito compactamente como:

$$\mathbf{b}(x_3) = e^{-i\omega(t-(s_H, \mathbf{x}_H))} \mathbf{N} \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_3} \mathbf{v}, \quad (1.10)$$

sendo $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}^D & \mathbf{N}^U \\ \mathbf{Z}^D & \mathbf{Z}^U \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$.

O espalhamento através de interface plana horizontal

A representação obtida no tópico anterior é adequada para a obtenção do espalhamento de ondas através de uma interface plana horizontal, separando dois meios anisotrópicos arbitrários. Para isto, faz-se $x_3 = 0$ e considera-se a onda incidente no semi-espaço superior ($x_3 < 0$) e a onda transmitida no semi-espaço inferior ($x_3 > 0$), conforme mostrado na Figura 2. No semi-espaço superior ocorrem a incidência e a reflexão de amplitudes \mathbf{i} e \mathbf{r} , respectivamente. As matrizes de polarização incidente e refletida são representadas por \mathbf{N}_i e \mathbf{N}_r , e as matrizes de impedância incidente e refletida por \mathbf{Z}_i e \mathbf{Z}_r , respectivamente. No meio inferior, ocorre a transmissão das ondas com amplitude \mathbf{t} e matrizes de polarização e de impedância \mathbf{N}_t e \mathbf{Z}_t , respectivamente

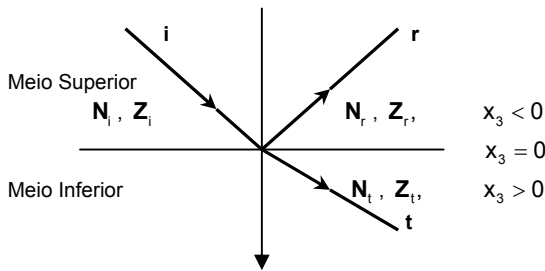


Figura 2 - Modelo esquemático do espalhamento de ondas em interface plana horizontal.

Considerando-se a continuidade do campo $\mathbf{b}(x_3)$ em $x_3 = 0$, obtêm-se a identidade:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_i & \mathbf{N}_r \\ \mathbf{Z}_i & \mathbf{Z}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_t & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_t & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (1.11)$$

que é a equação matricial relativa ao sistema matricial:

$$\begin{cases} \mathbf{N}_i \mathbf{i} + \mathbf{N}_r \mathbf{r} = \mathbf{N}_t \mathbf{t} \\ \mathbf{Z}_i \mathbf{i} + \mathbf{Z}_r \mathbf{r} = \mathbf{Z}_t \mathbf{t}. \end{cases} \quad (1.12)$$

Considerando-se, agora, a inversibilidade das matrizes envolvidas, uma possível solução explícita do sistema acima é dada por (Gomes, 1999):

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = & (\mathbf{Z}_t - \mathbf{Z}_r \mathbf{N}_r^{-1} \mathbf{N}_t)^{-1} (\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_r \mathbf{N}_r^{-1} \mathbf{N}_i) \mathbf{i} \\ \mathbf{r} = & \mathbf{N}_r^{-1} (\mathbf{N}_t \mathbf{t} - \mathbf{N}_i \mathbf{i}). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Caso não seja possível inverter as matrizes envolvidas tem-se a presença de ondas de Stonley.

O espalhamento de ondas através de multicamadas

Seguindo Fryer & Frazer (1987) que apresentam um método matricial para análise de ondas planas em meios homogêneos considerando a equação do movimento (1.1) e as relações constitutivas $\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$, de tal forma que, só as derivadas de primeira ordem com relação à profundidade da tensão e deslocamento são necessárias, o estudo do espalhamento é reduzido ao sistema de equações diferenciais,

$$\frac{d\mathbf{b}}{dx_3} = \mathbf{Q} \mathbf{b}, \quad (1.14)$$

sendo \mathbf{Q} uma matriz constante, com entradas dependendo das propriedades elásticas do meio, da vagarosidade horizontal e da frequência. Considerando-se isto e derivando-se a equação do campo (1.10) em relação ao horizonte x_3 , obtêm-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{b}}{dx_3} = & i\omega e^{-i\omega(t-(s_H, \mathbf{x}_H))} \mathbf{N} \mathbf{S}_3 \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_3} \mathbf{v} \\ = & i\omega \mathbf{N} \mathbf{S}_3 \mathbf{N}^{-1} \left[e^{-i\omega(t-(s_H, \mathbf{x}_H))} \mathbf{N} \mathbf{e}^{i\omega x_3 \mathbf{S}_3} \mathbf{v} \right]. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Observando-se portanto, que o campo $\mathbf{b}(x_3)$ satisfaz:

$$\frac{d\mathbf{b}}{dx_3} = i\omega (\mathbf{N} \mathbf{S}_3 \mathbf{N}^{-1}) \mathbf{b}, \quad (1.16)$$

que é uma equação diferencial com solução formal:

$$\mathbf{b}(x_3) = \mathbf{e}^{i\omega (\mathbf{N} \mathbf{S}_3 \mathbf{N}^{-1}) (x_3 - x_{30})} \mathbf{b}(x_{30}), \quad (1.17)$$

sendo x_{30} e x_3 as coordenadas na base e no topo de uma camada de espessura $h = x_3 - x_{30}$. A representação obtida acima pode ser reescrita como:

$$\mathbf{b}(x_3) = \mathbf{N} \mathbf{e}^{i\omega h \mathbf{S}_3} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{b}(x_{30}), \quad (1.18)$$

mostrando que $\mathbf{Q}(h) = \mathbf{N} \mathbf{e}^{i\omega h \mathbf{S}_3} \mathbf{N}^{-1}$ corresponde exatamente á matriz de propagação através da camada, estudada por Woodhouse (1974); uma vez que ela permite a determinação do campo de onda na base a partir do campo de onda no topo.

No caso particular de propagação em regime quase estático, ou seja, em que $\|\omega h \mathbf{S}_3\| \ll 1$, a matriz de propagação pode ser aproximada por:

$$\mathbf{Q}(h) = \mathbf{N} \mathbf{e}^{i\omega h \mathbf{S}_3} \mathbf{N}^{-1} \approx \mathbf{I} + i\omega h \mathbf{N} \mathbf{S}_3 \mathbf{N}^{-1}. \quad (1.19)$$

O espalhamento de pulsos através de meios anisotrópicos gerais.

Segundo Protázio (1994), para cada frequência ω , o campo de onda incidente apresenta a forma:

$$\bar{\mathbf{w}}_i(\omega) = e^{-i\omega\tau} \mathbf{N}_i \mathbf{e}^{i\omega \mathbf{x}_3 \mathbf{S}_{3i}} \mathbf{i}(\omega), \quad (1.20)$$

sendo $\tau = t - \langle \mathbf{s}_H, \mathbf{x}_H \rangle$, \mathbf{S}_{3i} a matriz das componentes verticais das vagarosidades incidentes e $\mathbf{i}(\omega) = [F_p(\omega) \ F_p(\omega) \ F_p(\omega)]^T$, o vetor das amplitudes das ondas incidentes no domínio das frequências. Aplicando-se a transformada de Fourier, o campo incidente pode ser expresso, no domínio do tempo, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \mathbf{N}_i \mathbf{e}^{i\omega \mathbf{x}_3 \mathbf{S}_{3i}} \mathbf{i}(\omega) d\omega, \\ &= \begin{bmatrix} n_{1PI} & n_{1SI} & n_{1TI} \\ n_{2PI} & n_{2SI} & n_{2TI} \\ n_{3PI} & n_{3SI} & n_{3TI} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_P(\tau - \mathbf{s}_{3PI} \mathbf{x}_3) \\ f_S(\tau - \mathbf{s}_{3SI} \mathbf{x}_3) \\ f_T(\tau - \mathbf{s}_{3TI} \mathbf{x}_3) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

sendo $f_Q(t)$ a assinatura da fonte no tempo.

De forma análoga, o campo refletido, no domínio do tempo, é dado por:

$$\mathbf{w}_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \mathbf{N}_i \mathbf{e}^{i\omega \mathbf{x}_3 \mathbf{S}_{3r}} \mathbf{R}(\omega) \mathbf{i}(\omega) d\omega, \quad (1.22)$$

e o transmitido por:

$$\mathbf{w}_t(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \mathbf{N}_i \mathbf{e}^{i\omega \mathbf{x}_3 \mathbf{S}_{3t}} \mathbf{T}(\omega) \mathbf{i}(\omega) d\omega. \quad (1.23)$$

O sinal analítico dos pulsos espalhados

Seguindo, novamente, Protázio (1994) dado um sinal temporal $f(\tau)$, o sinal analítico a ele associado tem a forma $f^{(A)}(\tau) = f(\tau) + if_H(\tau)$, sendo $f_H(\tau)$ a transformada de Hilbert do sinal, definida por:

$$f_H(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t - \tau} dt. \quad (1.24)$$

Para a obtenção do sinal analítico do pulso refletido, considera-se aqui apenas o caso pós-crítico, pois todo o processo de espalhamento das ondas no caso pré-crítico é real. Assim o sinal analítico refletido através de uma interface, na sua forma mais geral é dado por:

$$\mathbf{w}_r(t) = \frac{1}{\pi} \mathbf{N}^U \mathbf{R} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \mathbf{e}^{i\omega \mathbf{x}_3 \text{Re}(\mathbf{S}_3^U)} \mathbf{e}^{-\omega \mathbf{x}_3 \text{Im}(\mathbf{S}_3^U)} \mathbf{i}(\omega) d\omega, \quad (1.25)$$

sendo $\mathbf{e}^{-\omega \mathbf{x}_3 \text{Im}(\mathbf{S}_3^U)}$ o termo de decaimento com a profundidade.

Já o pulso analítico transmitido na sua forma mais geral é dado por:

$$\mathbf{w}_t(t) = \frac{1}{\pi} \mathbf{N}^D \mathbf{T} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \mathbf{e}^{i\omega \mathbf{x}_3 \text{Re}(\mathbf{S}_3^D)} \mathbf{e}^{-\omega \mathbf{x}_3 \text{Im}(\mathbf{S}_3^D)} \mathbf{i}(\omega) d\omega, \quad (1.26)$$

sendo $\mathbf{e}^{-\omega \mathbf{x}_3 \text{Im}(\mathbf{S}_3^D)}$ o termo de decaimento com a profundidade.

O espalhamento de pulsos através de estratificações

Considerando-se, agora, uma estratificação com N camadas, limitada por um semi-espaco superior e por um semi-espaco inferior e seguindo o método iterativo, a matriz de propagação relacionando às interfaces superior

e inferior é dada pelo produto das matrizes de propagação de cada camada Protázio (1994). Assim o campo na base é dado por:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}_{3b}) = \prod_{k=N}^1 \mathbf{Q}_k(\mathbf{h}_k) \mathbf{b}(\mathbf{x}_{3t}) \equiv \mathbf{Q} \mathbf{b}(\mathbf{x}_{3t}) \quad (1.27)$$

sendo $\mathbf{Q}_k(\mathbf{h}_k)$ a matriz de propagação calculada em uma k -ésima camada de uma estratificação com espessura h_k . Protázio (1994) mostrou que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} &= \mathbf{E}_{N+1,N} \mathbf{P}_N \mathbf{E}_{N,N-1} \cdots \mathbf{E}_{2,1} \mathbf{P}_1 \mathbf{E}_{1,0} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \mathbf{E}^D \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11}^D & \mathbf{E}_{12}^D \\ \mathbf{E}_{21}^D & \mathbf{E}_{22}^D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.28)$$

sendo que cada $\mathbf{E}_{k,k-1}$, $k = 1, 2, 3, \dots, N+1$ corresponde à uma matriz que controla o espalhamento na interface que separa as camadas k e $k-1$ e cada \mathbf{P}_k , $k = 1, 2, 3, \dots, N$ corresponde à matriz de propagação através da k -ésima camada. A matriz \mathbf{E}^D é denominada *matriz descendente de espalhamento* associada à estratificação pois, determina o espalhamento das ondas na interface inferior a partir do espalhamento na interface superior. A equação (1.28) pode ser reescrita gerando:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11}^U & \mathbf{E}_{12}^U \\ \mathbf{E}_{21}^U & \mathbf{E}_{22}^U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

onde $\mathbf{E}^U = (\mathbf{E}^D)^{-1}$ corresponde à *matriz ascendente de espalhamento* associada à estratificação pois, determina o espalhamento das ondas na interface superior a partir do espalhamento na interface inferior. Assim, as soluções para os coeficientes \mathbf{r} e \mathbf{t} são obtidos e dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{E}_{21}^U (\mathbf{E}_{11}^U)^{-1} \mathbf{i} \\ \mathbf{t} &= (\mathbf{E}_{11}^U)^{-1} \mathbf{i}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Para o caso de uma camada simples, a matriz ascendente de espalhamento é dada por $\mathbf{E}^U = \mathbf{E}_{0,1} \mathbf{P}_1^{-1} \mathbf{E}_{1,2}$, obtendo assim o coeficiente de transmissão como:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{T}_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{\Lambda}_1^D \mathbf{R}_{10} \mathbf{\Lambda}_1^U \mathbf{R}_{12})^{-1} \mathbf{\Lambda}_1^D \mathbf{T}_{01} \mathbf{i} \\ &\equiv \mathbf{T}_{12} (\mathbf{I} - \mathbf{\Pi})^{-1} \mathbf{\Lambda}_1^D \mathbf{T}_{01} \mathbf{i}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

sendo que os símbolos \mathbf{R}_{jk} e \mathbf{T}_{jk} representam as matrizes de reflexão e a transmissão da onda através da interface que separa os meios j e k , no meio k . Em geral estas matrizes são 3×3 e tem a forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{PP} & r_{SP} & r_{TP} \\ r_{PS} & r_{SS} & r_{TS} \\ r_{PT} & r_{ST} & r_{TT} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{PP} & t_{SP} & t_{TP} \\ t_{PS} & t_{SS} & t_{TS} \\ t_{PT} & t_{ST} & t_{TT} \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Aqui, por exemplo, r_{SP} é o coeficiente de reflexão de uma onda S convertida de uma onda descendente incidente P . Cada matriz $\mathbf{\Lambda}_j^D = \mathbf{e}^{i\omega h_j \mathbf{S}_j^D}$ e $\mathbf{\Lambda}_j^U = \mathbf{e}^{i\omega h_j \mathbf{S}_j^U}$ representa a matriz propagadora descendente e ascendente, respectivamente, na j -ésima camada.

A expressão acima traduz todo o processo de propagação da onda transmitida através da camada e o operador

$$(I - \Pi)^{-1} = I + \Pi + \Pi^2 + \Pi^3 + \dots \quad (1.38)$$

constitui o chamado *operador de reverberação* (Protázio 1994) e cada um de seus termos é responsável pela descrição de cada múltipla envolvida na propagação através da camada.

Seguindo o raciocínio anterior, o coeficiente *r* pode ser calculado como:

$$r = \{R_{01} + T_{10} \Lambda_1^U R_{12} (I - \Pi)^{-1} \Lambda_1^D T_{01}\} i. \quad (1.39)$$

Experimentos numéricos

Para mostrar a robustez do modelo apresentado experimentos numéricos na forma de sismogramas sintéticos de ondas planas e hodogramas são apresentados.

Os sismogramas são apresentados no domínio (t,s),

sendo $s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$, com $s_1 = \sin \theta \cos \phi / \alpha$,

$s_2 = \sin \theta \sin \phi / \alpha$ e α , a velocidade longitudinal do meio incidente projetada no plano sagital. A assinatura no tempo t do pulso incidente é dada pela função $f(t) = \sin(\omega_c t)$, sendo $\omega_c = 25$ a frequência do pulso.

No primeiro experimento os sismogramas foram calculados para um modelo litológico de uma camada intercalada por dois semi-espacos usando-se uma camada isotrópica (arenito) intercalada por um semi-espaco isotrópico (argila) (Tabela 1). Os ângulos de incidência θ foram calculados no intervalo $[0,90^\circ]$, o ângulo na variação azimutal foi de $\phi = 15^\circ$.

Com relação aos sismogramas sintéticos (Figura 3) o que se observa é uma inversão na escala do tempo pelo fato do cálculo do tempo ser dependente da vagarosidade. Todos os sismogramas foram projetados no plano de incidência o que explica a ausência de evento refletido e transmitido na componente y no experimento isotrópico. Quanto à reflexão observa-se nos sismogramas da Figura 3a um primeiro evento que corresponde à reflexão P no topo da camada. Verifica-se, também, a partir do ângulo crítico de propagação, a ocorrência do aumento da amplitude do pulso refletido. A segunda chegada que se estende até o valor crítico de s possui energia menor e representa a primeira reflexão PP na base da camada. Observa-se também o registro de reflexões múltiplas, com menor energia. O outro evento pós-crítico que é observado corresponde a uma convertida P da onda S na base da camada.

Quanto à transmissão na Figura 3b, há um primeiro evento que se estende até o valor crítico de s e que corresponde á primeira transmissão P na base da camada. Os demais eventos correspondem a transmissões convertidas e múltiplas como observados na reflexão.

Para o segundo experimento considerou-se somente uma interface plana separando um semi-espaco isotrópico (semi-espaco da tabela 1) e uma camada anisotrópica (conforme parâmetros elásticos da Tabela 2). Além dos sismogramas foram também calculados os hodogramas para 10 ângulos de incidência entre 0 e 90°. Quanto à reflexão na Figura 4a o sismograma apresenta a onda P refletida na interface com características como descritas no experimento anterior.

Já nos hodogramas da figura 5a observa-se que: são lineares; a variação da direção de propagação acompanha a direção de fase; e que a energia aumenta significativamente a partir do ângulo crítico.

Quanto à transmissão na Figura 4b o sismograma apresenta a onda transmitida P na interface com as características como descritas no experimento anterior. Já os hodogramas (Figura 5b) apresentam polarização linear até o ponto crítico de incidência e a partir deste, polarização elíptica. Esta é uma característica marcante neste tipo de experimento e é ser fundamental na caracterização de reservatórios.

Tabela 1. Velocidades e densidades do modelo litológico de referência argila - arenito - argila. Sendo que α é a velocidade da onda P e β é a velocidade da onda S.

Litologia	Profundidade (Km)	Densidade (g/cm ³)	α (Km/s)	β (Km/s)
Argila	0,5	2,35	3,3	1,7
Arenito	1,0	2,49	4,2	2,7
Argila	1,2	2,35	3,3	1,7

Tabela 2 Parâmetros elásticos do meio fraturado (monoclínico).

$$C = \begin{pmatrix} 27.1180 & 4.7122 & 4.7584 & 0,0000 & -1.7758 & 0,0000 \\ & 43,3897 & 6.9151 & 0,0000 & -0.6359 & 0,0000 \\ & & 42.0204 & 0,0000 & -2.5262 & 0,0000 \\ & & & 17.8911 & 0,0000 & -0.9741 \\ & & & & 14.4721 & 0,0000 \\ & & & & & 14.5165 \end{pmatrix} \times 10^9 \text{ N m}^{-2}$$

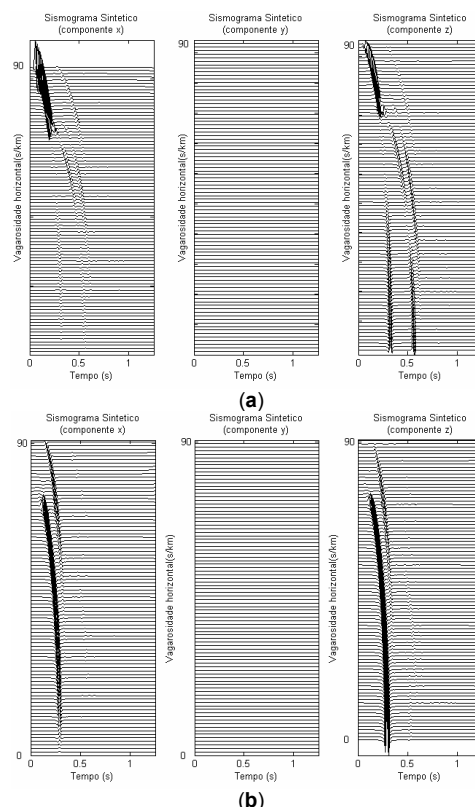


Figura 3- Experimento 1. sismogramas para reflexão (a) e transmissão (b) para modelo litológico isotrópico-isotrópico da

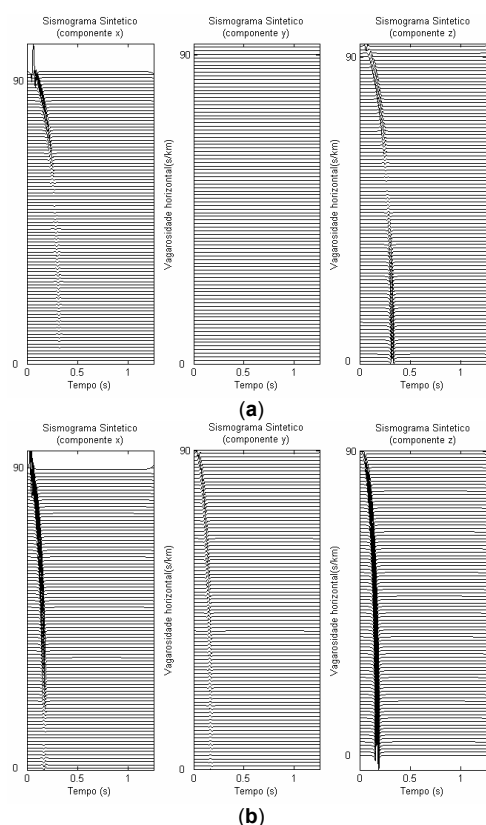


Figura 4- Experimento 2. Sismogramas para reflexão (a) e transmissão (b) para modelo litológico isotrópico-monoclínico.

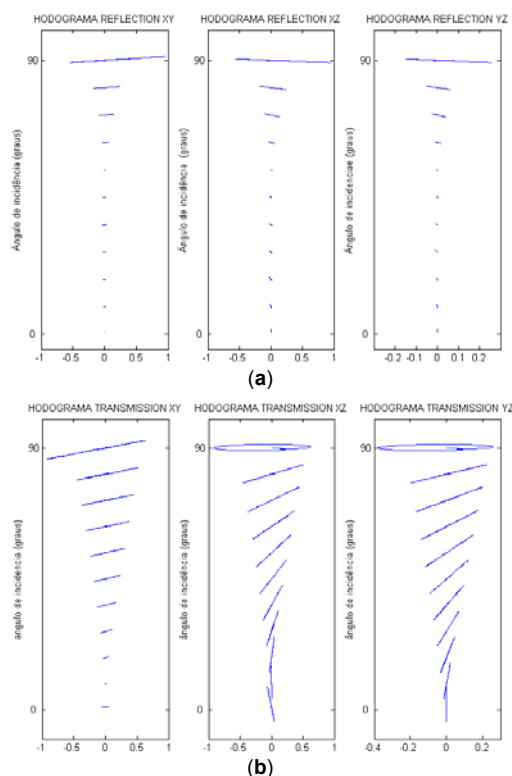


Figura 3- Experimento 2. Hodogramas para reflexão (a) e transmissão (b) para modelo litológico isotrópico-monoclínico.

Conclusão

As conclusões e potencialidades deste trabalho para a exploração sísmica são as seguintes:

1. Foi apresentado um formalismo consistente para se modelar o espalhamento de ondas em meios anisotrópicos gerais através da obtenção explícita dos campos de deformação e tração como função das matrizes propagadoras, de polarização e impedância. Para com isto obter os coeficientes de reflexão e transmissão do espalhamento através de uma interface plana horizontal separando meios anisotrópicos e posteriormente generalizar para várias camadas. Ao formalismo acima descrito introduziu-se um sinal analítico para se estudar o espalhamento de pulsos em meios anisotrópicos gerais.
2. Para verificar a consistência do formalismo acima descrito foram apresentados experimentos numéricos na forma de sismogramas sintéticos de ondas planas e hodogramas para se estudar a reflexão e a transmissão de ondas P e convertidas S e T no topo e na base de uma camada anisotrópica (isotrópica fraturada) separada por dois semi-espaços isotrópicos. Esses experimentos confirmam a consistência da metodologia se comparado a estudos consagrados na literatura.
3. Assim, pretende-se usar este formalismo na caracterização de reservatórios.

Referências

- AKI, K. & RICHARD, P.G. 1980. *Quantitative seismology*. New York, W. H. Freeman & Co. v.2, 557p.
- CRAMPIN, S. 1985. Evaluation of anisotropy by shear-wave splitting. *Geophysics*, **50**(1): 142-152.
- FRYER, G.J. & FRAZER, L.N. 1987. Seismic waves in stratified anisotropic media – II: elastodynamic eigensolutions for some anisotropic systems. *Geophysical J. R. astr. Soc.*, **91**: 73-101.
- GOMES, E.N.S., 1999. *Refletividade de ondas P em meios anisotrópicos*. Belém, Universidade Federal do Pará, Centro de Ciências Exatas e Naturais, Departamento de Matemática, 102p. (Dissertação de Mestrado)
- HUDSON, J.A. 1981. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. *Geophysical J. R. astr. Soc.*, **64**: 133-150.
- MALLICK, S. & FRAZER, L.N. 1988. Rapid computation of multioffset vertical seismic profile synthetic seismograms for layered media. *Geophysics*, **53**(4): 479-491.
- MALLICK, S. & FRAZER, L.N. 1988. Rapid computation of multioffset vertical seismic profile synthetic seismograms for layered media. *Geophysics*, **53**(4): 479-491.
- PROTÁZIO, J.S. 1994. *Espalhamento elástico em meios anisotrópicos estratificados*. Belém, Universidade Federal do Pará, Centro de Geociências, Pós-Graduação em Geofísica, 262p. (Tese de Doutorado)
- RUTHERFORD, S.R. & WILLIAMS, R.H. 1989. Amplitude-versus-offset variations in gas sands. *Geophysics*, **54**: 680-688.
- WOODHOUSE, J.H. 1974. Surface waves in a laterally varying layered structure. *Geophysical J. R. astr. Soc.*, **37**: 461-490.