



Modelamento Sísmico Assintótico Utilizando Diferenças Finitas

Matheus Pila, Lúcio Tunes Santos and Amélia Novais, DMA – IMECC – UNICAMP, Brazil

Copyright 2005, SBGF - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 9th International Congress of The Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, 11 – 14 September 2005.

Contents of this paper was reviewed by The Technical Committee of The 9th International Congress of The Brazilian Geophysical Society and does not necessarily represents any position of the SBGF, its officers or members. Electronic reproduction, or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of The Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Resumo

O modelamento sísmico é uma técnica para simular a propagação de ondas no subsolo terrestre. Uma das maneiras de fazer isso é através dos métodos assintóticos, que computam o campo de onda por partes, decompondo a equação da onda em outras duas equações: *Iconal* e *Transporte*. Neste trabalho, apresentamos um método de diferenças finitas (DF) adaptativo que é aplicado na equação iconal, para calcularmos o tempo de trânsito. O método adaptativo é altamente eficiente, no entanto isso pode levar a um alto custo quando aplicado em regiões que contenham alto contraste.

Introdução

Os esquemas de DF usando malha fixa passaram a ser aplicados com sucesso no final da década de 80 (Vidale, 1988) para resolver a equação iconal. Desde então, vários trabalhos foram publicados sem uma relevante mudança na eficiência dos métodos. Um resultado importante foi apresentado em Belfi (1997), pois os métodos de malha fixa, agora implementados com os esquemas Essencialmente Não Oscilatório (ENO), são aplicados de forma que exista um limitante para a inclinação das frentes de onda, devido à condição CFL. Este resultado seria a base para os algoritmos adaptativos.

O maior problema dos métodos de malha fixa é o erro relativamente alto que aparece na região próxima à fonte, devido à alta curvatura da frente de onda nesta região. Os métodos adaptativos surgem como uma ótima opção para contornar este problema. Em Belfi & Symes (1998), os métodos de DF associados aos esquemas ENO e Runge-Kutta (RK) conseguem contornar este problema, pois os espaçamentos da malha se ajustam conforme o erro satisfaz ou não uma tolerância fornecida pelo usuário. Por fim, em Qian & Symes (2002), o método de DF adaptativo é exposto com alguma teoria para seu bom funcionamento.

Equação Iconal

Neste trabalho, queremos encontrar uma aproximação usando esquemas de DF em uma malha adaptativa para a

equação iconal no espaço bidimensional,

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{v(\mathbf{x})^2}, \quad (1)$$

onde τ é o tempo de trânsito, v é a velocidade e $\mathbf{x} = (x, z)$ com a fonte localizada na superfície.

Considerando que a onda se propaga para baixo, isto é, não existem ondas refletidas que voltam para a superfície, podemos evoluir esta equação apenas em uma variável, de onde passamos a ter uma equação diferencial nesta. Assim, considerando $\partial \tau / \partial z > 0$ temos

$$\frac{\partial \tau}{\partial z} = \sqrt{\frac{1}{v^2} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial x}\right)^2} = H\left(v, \frac{\partial \tau}{\partial x}\right). \quad (2)$$

Podemos então construir um método onde são aplicados esquemas RK na variável z e esquemas ENO na variável x . A vantagem de usar estes esquemas é que podemos extendê-los facilmente para o caso 3D e também aumentar suas ordens. A seguir, apresentamos como são construídos estes esquemas usando ordem dois e três (Belfi, 1997), que são usados na construção do método adaptativo.

Esquemas RK-ENO de Ordem Dois

Aplicando o esquema Runge-Kutta de ordem dois na variável z da equação (2) temos

$$\tilde{\tau}_{i,j+1} = \tau_{i,j} + \Delta z H(v_{i,j}, \hat{D}_{i,j}), \quad (3)$$

$$\tau_{i,j+1} = \frac{1}{2}(\tau_{i,j} + \tilde{\tau}_{i,j+1} + \Delta z H(v_{i,j+1}, \hat{D}_{i,j+1})), \quad (4)$$

onde os índices i e j correspondem a x_i e z_j , respectivamente.

Quanto a derivada em x , a aproximação ENO de segunda ordem é dada por

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} \approx D_2^\pm \tau = D_1^\pm \tau \mp \frac{\Delta x}{2} M(D_1^- D_1^+ \tau, D_1^\pm D_1^\pm \tau). \quad (5)$$

onde,

$$M(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{se } \xi \eta \leq 0 \\ \xi, & \text{se } |\xi| \leq |\eta| \text{ e } \xi \eta > 0 \\ \eta, & \text{se } |\xi| > |\eta| \text{ e } \xi \eta > 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Notemos que $D_1^- D_1^+ \tau$ e $D_1^\pm D_1^\pm \tau$ são os esquemas de DF centrados em (x, z) e $(x \pm \Delta x, z)$, respectivamente, e eles fornecem a curvatura nestes pontos. Logo, a função M escolhe a componente menos oscilatória para realizar a

aproximação. Para finalizar, vamos definir o esquema *upwind* ENO de segunda ordem que aproxima $\partial\tau/\partial x$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} \approx \hat{D}\tau = \max\{|\max\{D_2^-\tau, 0\}|, |\min\{D_2^+\tau, 0\}|\}, \quad (7)$$

e assim, $\hat{D}_{i,j} = \hat{D}\tau(x_i, z_j)$.

Esquemas RK-ENO de Ordem Três

Analogamente ao que foi feito no caso anterior, vamos aplicar o esquema Runge-Kutta de ordem três na variável z . Logo,

$$\tilde{\tau}_{i,j+1} = \tau_{i,j} + \Delta z H(v_{i,j}, \tilde{D}_{i,j}), \quad (8)$$

$$\hat{\tau}_{i,j+1/2} = \frac{1}{4}(3\tau_{i,j} + \tilde{\tau}_{i,j+1} + \Delta z H(v_{i,j+1}, \tilde{D}_{i,j+1})), \quad (9)$$

$$\tau_{i,j+1} = \frac{1}{6}(2\tau_{i,j} + 4\hat{\tau}_{i,j+1/2} + 4\Delta z H(v_{i,j+1/2}, \tilde{D}_{i,j+1/2})). \quad (10)$$

Quanto a derivada em x , a aproximação ENO de terceira ordem é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tau}{\partial x} &\approx D_3^\pm\tau = \\ &D_1^\pm\tau \mp \frac{\Delta x}{2} M(D_1^\pm D_1^\pm\tau - \Delta x D_1^\pm D_1^\pm D_1^\pm\tau, D_1^- D_1^+\tau) \\ &- \frac{\Delta x^2}{6} M(D_1^\pm D_1^\pm D_1^\pm\tau, M(D_1^+ D_1^+ D_1^- \tau, D_1^+ D_1^- D_1^- \tau)). \end{aligned} \quad (11)$$

Concluindo, vamos definir o esquema *upwind* ENO de terceira ordem que aproxima $\partial\tau/\partial x$

$$\frac{\partial\tau}{\partial x} \approx \check{D}\tau = \max\{|\max\{D_3^-\tau, 0\}|, |\min\{D_3^+\tau, 0\}|\}, \quad (12)$$

e assim, $\check{D}_{i,j} = \check{D}\tau(x_i, z_j)$.

Condição CFL

Uma condição necessária para que qualquer método numérico seja estável é que o domínio de dependência numérico deve incluir o domínio de dependência físico, ao menos no limite $\Delta z, \Delta x \rightarrow 0$ (condição CFL (Thomas, 1995)). O domínio de dependência numérica do ponto (x_i, z_{j+1}) em relação aos pontos que estão no j -ésimo nível é

$$N_j = \{(x, z_j) : |x - x_i| \leq \Delta x\}. \quad (13)$$

Quanto ao domínio físico, usamos o resultado que diz que as curvas características da equação iconal são formadas pela a família de curvas ortogonais às frentes de onda, denominadas raios (Bleistein, 1984). Queremos então que o raio que passa pelo ponto (x_i, z_{j+1}) intercepte o domínio de dependência numérica (o segmento formado pelos três pontos escuros na Figura 1). Supondo que os raios nesta região discretizada são todos paralelos e aproximados por retas e sendo θ o ângulo que o vetor $\vec{p} = (\partial\tau/\partial x, \partial\tau/\partial z)$ faz com a vertical, devemos então impor que

$$\Delta z \tan \theta < \Delta x. \quad (14)$$

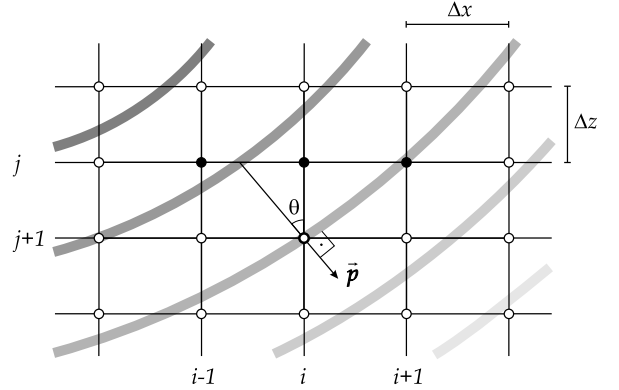


Figura 1: O raio que passa pelo ponto a ser calculado deve interceptar o domínio de dependência numérica.

O vetor \vec{p} é normal a frente de onda, e portanto, podemos escrever

$$\tan \theta = \frac{\partial\tau/\partial x}{\partial\tau/\partial z}. \quad (15)$$

Assim, a condição CFL torna-se

$$\Delta z_{\text{CFL}} < \frac{\Delta x \sqrt{(1/v)^2 - (\partial\tau/\partial x)^2}}{|\partial\tau/\partial x|} = \Delta x \frac{H(v, \partial\tau/\partial x)}{|\partial\tau/\partial x|}. \quad (16)$$

Como estamos expandindo na direção z apenas, pode ocorrer de termos raios fazendo ângulos muito próximos de 90° com a vertical e, assim, Δz tendendo a zero. A solução para este problema é fixar um ângulo θ_{max} , e calcular a aproximação apenas numa região onde os raios fazem um ângulo de no máximo θ_{max} com a vertical, com $0 \leq \theta_{\text{max}} \leq \pi/2$. Uma maneira de fazer isto é reescrever a equação (2) na forma

$$\frac{\partial\tau}{\partial z} = \sqrt{\max\left\{\frac{1}{v^2} - \left(\frac{\partial\tau}{\partial x}\right)^2, \frac{\cos^2 \theta_{\text{max}}}{v^2}\right\}}, \quad (17)$$

com a condição CFL escrita agora como

$$\Delta z < \frac{\Delta x}{\tan \theta_{\text{max}}}. \quad (18)$$

Método de DF Adaptativo

A essência deste método é usar dois esquemas de ordens diferentes para o cálculo de um passo (Belfi & Symes, 1998). Supondo que o esquema de ordem maior seja mais correto que o de menor ordem, o passo de ordem maior serve como solução exata naquele passo, e assim, conseguimos estimar o erro. Logo, os espaçamentos Δx e Δz podem aumentar ou diminuir, afim de que uma tolerância para o erro seja permitida. O algoritmo deste método é

entrada: $\varepsilon, x_s, \Delta x, \theta_{\text{MAX}}, z_{\text{MAX}}$

inicialização: $\Delta z, \tau, z = z_{\text{ini}}$

enquanto $z < z_{\text{MAX}}$

```

calcular E= max|[RKENO2](τ) - [RKENO3](τ)|
  se E ≤ σ1(ε)
    z = z + Δz
    τ = [RKENO3](τ)
    Δz = 2Δz e Δx = 2Δx
    diminui a amostra em τ
  senão se E ≥ σ2(ε)
    Δz = Δz/2 e Δx = Δx/2
    interpola τ
  senão
    z = z + Δz
    τ = [RKENO3](τ)
  fim
fim

```

onde usamos $\sigma_1 = 0.1\varepsilon$ e $\sigma_2 = \varepsilon$. As notações $[RKENO2](\tau)$ e $[RKENO3](\tau)$ representam as aplicações dos esquemas de ordem dois e três, respectivamente, em todos os valores de τ na profundidade daquele passo.

Estas mudanças nos espaçamentos devem ser feitas usando o mesmo fator em ambas as direções. Assim, a condição CFL para o problema continua sendo satisfeita. O ajuste usual para problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias depende do erro de truncamento. Isto é impraticável em nosso caso, pois passaríamos a ter uma malha arbitrária em x , e assim seria necessária muita interpolação. Assim, este fator dois apresenta muita vantagem, pois mesmo quando for necessária a interpolação (quando devemos diminuir o espaçamento), apenas alguns nós são interpolados.

A seguir, apresentamos como é feito o cálculo da profundidade inicial z_{ini} , onde podemos começar o algoritmo respeitando a tolerância ε , e discutimos como deve ser feita a interpolação no processo de refinamento dos espaçamentos.

Inicialização no Método Adaptativo

Vamos considerar que o meio é homogêneo em uma região ao redor da fonte. Logo, o tempo de trânsito é aproximado pelas frentes de onda circulares nesta região. Precisamos de uma profundidade máxima z_{ini} para dar partida no método onde o erro cometido ao calcular τ nesta profundidade seja menor que a tolerância ε fornecida ao algoritmo.

Investigando a expansão de Taylor da equação da onda ao redor da fonte, podemos encontrar a seguinte condição para essa profundidade inicial (Pila, 2005)

$$z_{ini} \leq z_T = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{S}} \cos \theta_{max}, \quad (19)$$

onde

$$S = \leq \sup\{\|\nabla s(\xi, \eta)\| \mid |\xi| \leq z_L \tan \theta_{max}, 0 \leq \eta \leq z_L\}$$

com z_L sendo a profundidade máxima onde queremos investigar o gradiente da vagarosidade s . Logo, tomamos

$$z_{ini} = \min(z_T, z_L). \quad (20)$$

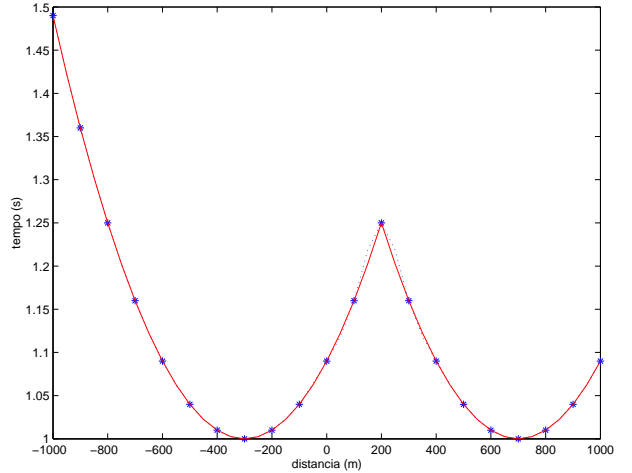


Figura 2: As curvas pontilhada e sólida representam os resultados da interpolação em todos os pontos e por partes, respectivamente.

Interpolação no Refinamento

Em Qian & Symes (2002), e nos outros textos que o antecedem, não foi discutida de que maneira a interpolação deve ser feita. Até este momento uma de nossas maiores preocupações foi apresentar um método que respeite a propagação da onda. Logo, a interpolação também deve ter esta propriedade, para que erros não sejam produzidos quando ocorrer o refinamento.

Em nosso algoritmo (Pila, 2005), usamos as splines cúbicas interpolantes. O que motivou esta escolha foram os fatos da ordem deste método ser compatível com nosso algoritmo e de interpolarmos os dados por partes. Este último fato é um diferencial em nosso algoritmo. Dada uma profundidade, se existir um máximo local no tempo de trânsito, não podemos simplesmente interpolar os dados, pois a curva do tempo de trânsito é suavizada. Logo, precisamos interpolar os dados de um máximo local ao outro. Para vermos isso, na Figura 2 temos um tempo de trânsito fictício em uma profundidade qualquer. Os pontos representados por asterisco são os locais onde o tempo de trânsito está dado. Após um refinamento, a curva pontilhada representa o resultado de uma interpolação envolvendo todos os pontos, já a curva sólida representa o resultado de uma interpolação por partes. Comparando ambas as curvas, fica claro que a curva pontilhada superestimou o tempo de trânsito, pois o polinômio interpolador tentou suavizar uma região que não deve ser suavizada. Assim, ao interpolarmos separadamente nas duas regiões entre os máximos locais, o resultado produzido fica de acordo com toda a teoria desenvolvida.

Experimentos Numéricos

A intenção destes experimentos numéricos é ver quanto tempo é gasto computacionalmente para que os dois métodos (malha fixa e malha adaptativa) obtenham uma

aproximação com o erro da mesma ordem. Estes testes foram realizados utilizando o software MATLAB.

As aproximações foram obtidas no domínio $-1000 \text{ m} \leq x \leq 1000 \text{ m}$ e $0 \leq z \leq 1500 \text{ m}$, com $\theta_{\max} = 63^\circ$ e a fonte localizada na origem. No método de malha fixa, o espaçamento foi de $\Delta x = 2000/2^7 \simeq 15.6 \text{ m}$, com Δz obtido pela condição CFL. No método adaptativo, iniciamos com o mesmo espaçamento e usamos como tolerância $\varepsilon = 10^{-4}$. O passo inicial z_{ini} foi obtido pela condição (20), onde usamos como limitante $z_L = 450 \text{ m}$.

Para o caso do meio homogêneo, o algoritmo comporta-se muito bem. Na Figura 3, temos as frentes de onda encontradas ao longo do domínio. Na Figura 4, temos o erro percentual de ambos os métodos na profundidade final de 1500 m. O tempo computacional gasto foi de 22.7s 2.7s para os métodos de malha fixa e adaptativo, respectivamente. Na mesma figura, temos como mudou o espaçamento ao decorrer das iterações. Em todos os testes onde o meio varia de forma contínua, sem interfaces, o método adaptativo tem um custo computacional menor que o método de malha fixa, atingindo o mesmo erro na profundidade final.

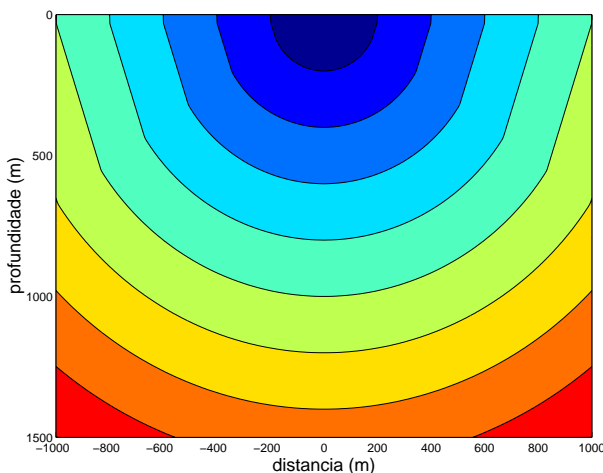


Figura 3: Aproximação encontrada usando o método de malha fixa expandindo apenas em z em um meio homogêneo.

Já em meios que contém interface, as frentes de onda passam a ter alta curvatura e, assim, vários refinamentos são realizados para satisfazer a tolerância ε . Para ilustrar isso, vejamos o que ocorre ao inserirmos uma interface anticlinal no meio, onde a velocidade vale 1500m/s acima e 2000m/s abaixo desta. Na Figura 5, temos as frentes de onda encontradas ao longo do domínio. Na Figura 6, temos o erro percentual de ambos os métodos na profundidade final de 1500 m. O tempo computacional gasto foi de 22.7s 500s para os métodos de malha fixa e adaptativo, respectivamente. Na mesma figura, observamos que ocorrem vários refinamentos quando a interface é alcançada, e depois que as altas curvaturas somem, os espaçamentos voltam a aumentar.

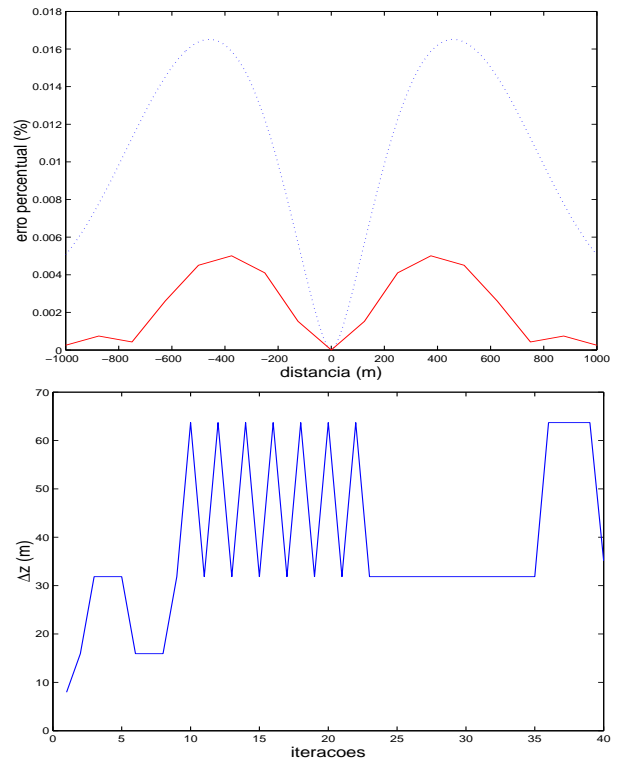


Figura 4: O primeiro gráfico trata do erro percentual usando o método de malha fixa (curva pontilhada) e o método adaptativo (curva sólida), na profundidade de 1500 m. O segundo gráfico, apresenta a variação do espaçamento Δz no decorrer das iterações do método adaptativo.

Conclusão

O método adaptativo surge com a proposta de obter uma aproximação em uma certa profundidade, e não no domínio todo, o que já é um resultado menos rico em informações. A grande vantagem é que o erro pode ser controlado por uma tolerância ε . Para isso, o problema da inicialização é superado, já que a profundidade inicial pode ser tão pequena quanto necessária (obtida pela condição (20)), e podem ocorrer refinamentos ao longo do processo de expansão em z . Mas como o método usa expansão apenas na direção z , pode ocorrer de o tempo de trânsito sofrer superestimação (ou subestimação), devido estarmos aproximando a solução apenas na região $\theta \leq \theta_{\max}$. Outro fator importante é o tempo computacional, onde o método adaptativo é caro quando o aplicamos em um meio onde a velocidade varia bruscamente.

Portanto, o método adaptativo é muito vantajoso quando aplicado em meios onde a velocidade varia de forma suave, pois assim seu tempo computacional não é tão alto e podemos prever de forma segura o quão boa é a aproximação. Mas para meios mais complexos, métodos de malha fixa mostram-se como uma opção bastante

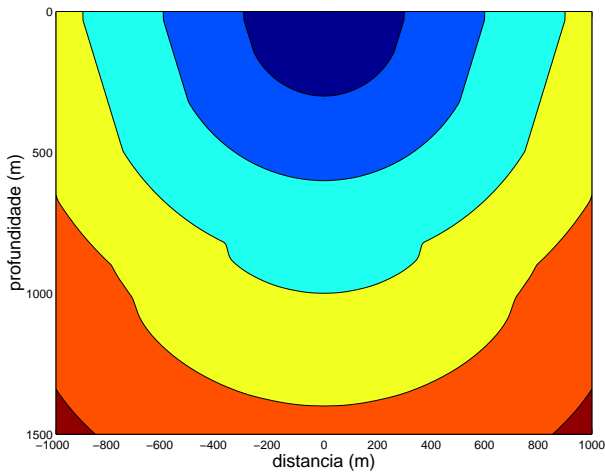


Figura 5: Aproximação encontrada usando o método de malha fixa expandindo apenas em z em um meio com interface anticlinal.

atraente, pois seu tempo computacional é relativamente bem menor obtendo uma aproximação com o mesmo erro.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq (Processo 307165/2003-5) e a FAPESP (Processos 01/01068-0 & 02/12337-5), Brasil, e aos patrocinadores do WIT – Wave Inversion Technology Consortium, Alemanha.

Referências

- C. Belfi** 1997, *Second and third order ENO methods for the eikonal equation*, Annual Report, The Rice Inversion Project.
- C. Belfi & W. Symes** 1998, *An adaptive ENO algorithm for the eikonal equation*, Annual Report, The Rice Inversion Project.
- N. Bleistein** 1984, *Mathematical methods for wave phenomena*, Academic Press Inc., New York.
- M. Pila** 2005, *Modelamento sísmico assintótico utilizando diferenças finitas*, Dissertação de Mestrado, IMECC/UNICAMP.
- J. Qian & W. Symes** 2002, *An adaptive finite-difference method for traveltimes and amplitudes*, *Geophysics*, **67**, 167–176.
- J. W. Thomas** , 1995, *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Springer.
- J. Vidale** , 1988, *Finite-difference calculation of traveltimes*, *Bull. Seis. Soc. Am.*, **78**, no. 6, 2062–2076.

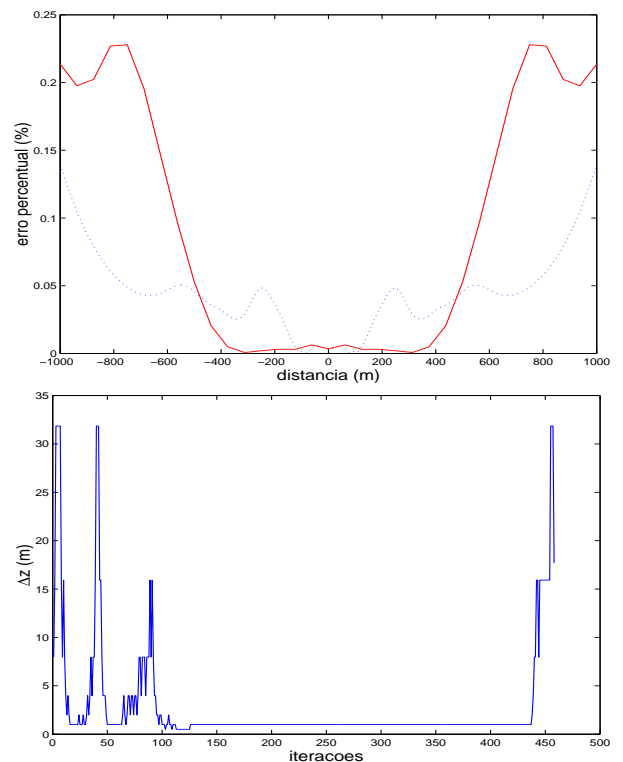


Figura 6: O primeiro gráfico trata do erro percentual usando o método de malha fixa (curva pontilhada) e o método adaptativo (curva sólida), na profundidade de 1500 m. O segundo gráfico, apresenta a variação do espaçamento Δz no decorrer das iterações do método adaptativo.