



Modelagem acústica por divisão em domínios independentes usando transformada wavelet packet

Felipe Prado Loureiro*¹, Marco Antonio Cetale Santos¹, Paulo Léo Manassi Osório¹ e Djalma Manoel Soares Filho²
¹ LPS/DEE/PUC-Rio, ² PETROBRAS S/A Brasil

Copyright 2005, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, 11-14 September 2005.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society. Ideas and concepts of the text are authors' responsibility and do not necessarily represent any position of the SBGf, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

This work compares the wave equation solution in different domains: the spatial domain and the wavelet packet transform domain. Since there is a sparse representation of the wavefield in this domain, it is possible to explore this sparseness to increase the efficiency of the modeling algorithms. Comparing to our previous work (Loureiro et al. 2003), we improved the wavefield extrapolation in the wavelet domain, by expanding from a single level into a second wavelet decomposition level, while taking the more general wavelet packet approach, which is very appropriate to parallel implementation. The results were compared to the finite difference method.

Introdução

A modelagem sísmica tradicional (diferenças finitas) necessita de paralelização como forma de distribuição de recursos computacionais para modelos de grande escala. Entretanto, um dos problemas que reduzem a performance desta filosofia é a necessidade de comunicação entre os processos sendo computados. Este trabalho mostra uma forma de tornar os processos independentes utilizando métodos de análise em multiresolução, como é o caso da transformada wavelet, em particular a abordagem wavelet packet.

Os métodos de diferenças finitas, resolvidos no domínio espaço-tempo, prima pela boa resolução espacial, porém uniformemente distribuída por todos os números de onda. Os métodos que empregam Fourier, resolvidos no domínio frequência-número de onda, têm boa localização no domínio das frequências espaciais (números de onda), mas apresenta baixa resolução espacial.

No domínio wavelet, a tarefa de amostragem recai sobre um grupo de funções wavelet, que diferem no comprimento e na posição espacial, e são projetadas para serem localizadas em ambos os domínios expostos. Esta é uma de suas propriedades em comum com os sinais sísmicos, por serem estes de natureza oscilatória e transiente, o que permite sua representação eficiente em bases wavelet.

Transformada wavelet

O princípio da transformada wavelet (TW) está na decomposição de um sinal na base formada pelas funções escala $\varphi(x)$ e wavelet $\psi(x)$. Utilizando as notações

$$\varphi_k^j(x) = 2^{-j/2} \varphi(2^{-j}x - k) \quad ; \quad \psi_k^j(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k),$$

onde j especifica as diferentes escalas e k as diferentes translações.

Para transformadas ortogonais, as funções φ^j e ψ^j são bases ortonormais dos subespaços complementares V_j e W_j . Esta abordagem é conhecida como análise em multiresolução, cujos subespaços relacionam-se através das equações:

$$\begin{aligned} V_j &\subset V_{j-1}; \\ V_j &= V_{j+1} \oplus W_{j+1}; \\ V_0 &= W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_j \oplus V_j; \quad J > 0. \end{aligned}$$

A conexão entre as teorias wavelet, análise em multiresolução e bancos de filtros QMF (*Quadrature Mirror Filters*), é abordada em (Strang e Nguyen, 1996), onde a transformada wavelet discreta de um sinal é obtida via filtragem e posterior subamostragem. É usual implementá-la com um sistema de bancos de filtros de dois canais, de acordo com a figura 1, sendo a estrutura de decomposição do sinal em um número maior de níveis conhecida como árvore diádica. A transformada wavelet discreta inversa é equivalente à operação de síntese.

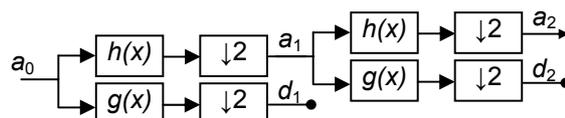


Figura 1: Decomposição wavelet 1D por filtros QMF

As relações das funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ com os coeficientes dos filtros QMF, h_k e g_k , cujas respostas impulsivas têm comprimento L , são

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} h_{k+1} \varphi(2x - k) \quad , \quad \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{L-1} g_{k+1} \varphi(2x - k). \quad (1)$$

Uma função $f(x)$ pode ser decomposta conforme (1), em subespaços wavelet de menor resolução

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^0 \varphi_k^0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^J \varphi_k^J(x) + \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k^j \psi_k^j(x),$$

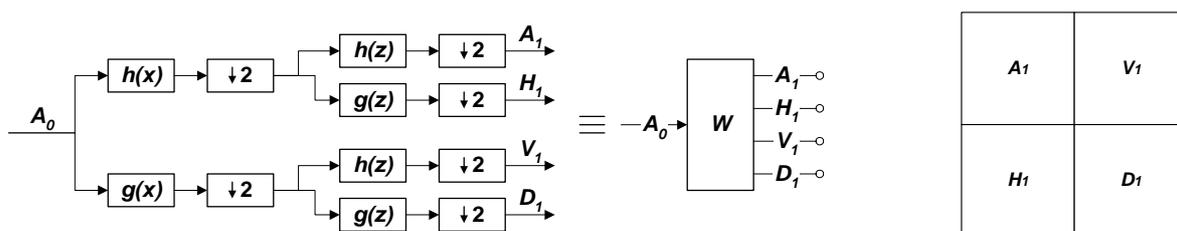


Figura 2: Decomposição wavelet 2D em um nível: (a) banco de filtros para um único nível; (b) subespaços da transformada wavelet.

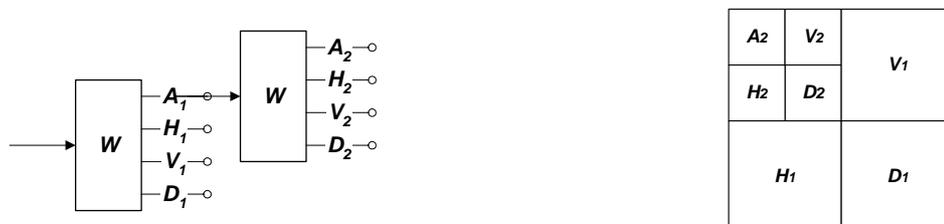


Figura 3: Decomposição wavelet 2D em dois níveis (segundo a seqüência não convencional): (a) banco de filtros; (b) subespaços obtidos.

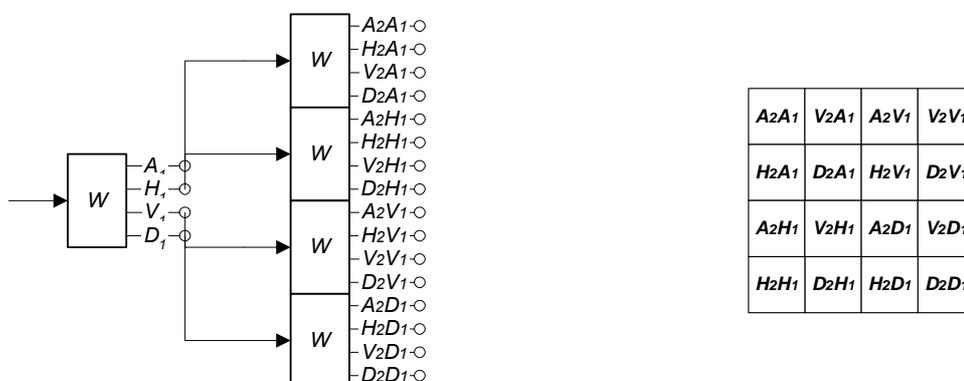


Figura 4: Decomposição wavelet packet 2D em dois níveis: (a) banco de filtros; (b) subespaços obtidos.

onde

a_k^j = coeficientes no subespaço V_j ,

d_k^j = coeficientes no subespaço W_j .

A precisão da reconstrução da função a partir destes coeficientes está ligada à base wavelet utilizada. Pelo fato do algoritmo implementado neste trabalho necessitar de uma reconstrução perfeita para a obtenção do sismograma, empregou-se as wavelets desenvolvidas por Daubechies em (Daubechies, 1992).

A decomposição de um sinal bidimensional em seus coeficientes wavelet, quando efetuada a uma escala (nível) é mostrada na figura 2. Quando a decomposição é efetuada a mais de um nível, pode ser obtida de formas diferentes. A forma chamada de convencional consiste na tomada da TW das linhas seguida pela TW das colunas. A maior desvantagem desta forma é a mistura entre as diferentes escalas. Outra forma, chamada de não-convencional, é obtida pela decomposição alternada de linhas e colunas a cada nível, conforme mostrado na figura 3.

O resultado de cada nível de decomposição j é um novo grupo de quatro subespaços denominados aproximação,

detalhe horizontal, detalhe vertical e detalhe diagonal, ou simplesmente, A_j , H_j , V_j e D_j .

Pode-se representar a transformada wavelet matricialmente por W , e sua inversa por W^{-1} . Defina os vetores concatenados de coeficientes wavelet

$$1D: \tilde{f} \equiv \{a_j, d_j\} | j = 1, \dots, J,$$

$$2D: \tilde{U} \equiv \{A_j^i, H_j^i, V_j^i, D_j^i\} | j = 1, \dots, J.$$

As transformadas wavelet das funções discretas f^0 e $U^{0,0}$ são

$$\tilde{f} = Wf^0 \Leftrightarrow f^0 = W^{-1}\tilde{f},$$

$$\tilde{U} = WU^{0,0}W^T \Leftrightarrow U^{0,0} = W^{-1}\tilde{U}W^{-T}.$$

Devido a utilização de bases wavelet ortonormais, a transformação W^{-1} equivale à W^T , fato que será levado em consideração daqui em diante.

Transformada wavelet packet

Uma outra abordagem para a decomposição wavelet em mais de um nível é a chamada de wavelet packet, que não se limita ao subespaço de aproximação nas sucessivas decomposições. Em duas dimensões, a transformada continua sendo aplicada nos subespaços H , V , e D , gerando assim uma quantidade de 4^j

subespaços contra os $1+3J$ alcançados pela transformada wavelet. Esta abordagem é válida também para o caso 1D, porém isto não é do escopo deste trabalho.

Esta vertente é explorada devido ao particionamento mais homogêneo obtido (figura 4), ideal para distribuição uniforme de tarefas em paralelo.

Operadores diferenciais para bases wavelet

Estudos (Beylkin, 1992; Jameson, 1993) demonstram a estreita relação entre operadores diferenciais wavelet e os de diferenças finitas.

As derivações parciais de uma função $U=U(z,x)$ podem ser representadas por

$$U' = D_z U \text{ e } U' = U D_x$$

onde D_z e D_x são matrizes multi-digonais e cada uma de suas diagonais portadora de um dos coeficientes do operador diferencial. Por exemplo, a partir do operador causal de primeira ordem para a primeira derivada $[-1 \ 1]$, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & & & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & & -1 & 1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

como operador D_z de um sinal com 4 linhas.

Os operadores em domínio wavelet podem ser obtidos da TW 2D dos operadores D em domínio espacial.

$$\tilde{D} = W D W^T \Leftrightarrow D = W^{-1} \tilde{D} W^{-T};$$

$$\text{onde } \tilde{D} = \begin{bmatrix} A_D & H_D \\ V_D & D_D \end{bmatrix}$$

segue que

$$f' = W^{-1} \tilde{D} W^{-T} W^T \tilde{f} \therefore f' = W^{-1} \tilde{D} \tilde{f} \therefore W f' = \tilde{D} \tilde{f} \therefore \tilde{f}' = \tilde{D} \tilde{f}$$

onde o operador mapeia os coeficientes originais nos coeficientes da derivada no domínio wavelet.

Propagação no domínio wavelet

A propagação da onda acústica é o conceito fundamental na dedução de um processo de modelagem ou migração sísmica, sendo regida pela equação da onda escalar, que em 2D assume a forma

$$\frac{\partial^2 U(z,x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(z,x,t)}{\partial z^2} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 U(z,x,t)}{\partial t^2}$$

onde estão representados x (deslocamento horizontal), z (profundidade), t (tempo), U (pressão) e C (velocidade da onda de pressão no meio).

Após tornar discreta a função contínua U , suas transformadas wavelet 2D, direta e inversa, são

$$\tilde{U} = W_z U W_x^T \Leftrightarrow U = W_z^T \tilde{U} W_x;$$

$$W_x = TWD \text{ com respeito a } x,$$

$$W_z = TWD \text{ com respeito a } z.$$

Substituindo as derivadas pelos operadores, considerando C constante e aplicando a transformada wavelet, temos

$$\tilde{U} \tilde{D}_x^2 + \tilde{D}_z^2 \tilde{U} = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}$$

Explicitando a estrutura da operação matricial do primeiro membro para o caso da decomposição em um nível, e descartando os subespaços dos operadores fora da diagonal (H_{DX} , H_{DZ} , V_{DX} e V_{DZ}), conforme visto em (Dessing e Wapenaar, 1995), chega-se à aproximação

$$\begin{bmatrix} A_U A_{DX} + A_{DZ} A_U & H_U D_{DX} + A_{DZ} H_U \\ V_U A_{DX} + D_{DZ} V_U & D_U D_{DX} + D_{DZ} D_U \end{bmatrix}$$

chegando à desejada independência entre os subespaços da TW função U . O mesmo conceito, quando aplicado à decomposição wavelet em dois níveis resulta em

$$\begin{bmatrix} A_{2U} A_{2DX} + A_{2DZ} A_{2U} & H_{2U} D_{2DX} + A_{2DZ} H_{2U} & H_{1U} D_{1DX} + A_{1DZ} H_{1U} \\ V_{2U} A_{2DX} + D_{2DZ} V_{2U} & D_{2U} D_{2DX} + D_{2DZ} D_{2U} & D_{1U} D_{1DX} + D_{1DZ} D_{1U} \\ \hline V_{1U} A_{1DX} + D_{1DZ} V_{1U} & & \end{bmatrix}$$

Na abordagem wavelet packet com dois níveis de decomposição, temos

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} A_2 A_{1U} & V_2 A_{1U} & A_2 V_{1U} & V_2 V_{1U} \\ H_2 A_{1U} & D_2 A_{1U} & H_2 V_{1U} & D_2 V_{1U} \\ A_2 H_{1U} & V_2 H_{1U} & A_2 D_{1U} & V_2 D_{1U} \\ H_2 H_{1U} & D_2 H_{1U} & H_2 D_{1U} & D_2 D_{1U} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}_x = \begin{bmatrix} A_2 A_{1DX} & V_2 A_{1DX} & A_2 V_{1DX} & V_2 V_{1DX} \\ H_2 A_{1DX} & D_2 A_{1DX} & H_2 V_{1DX} & D_2 V_{1DX} \\ A_2 H_{1DX} & V_2 H_{1DX} & A_2 D_{1DX} & V_2 D_{1DX} \\ H_2 H_{1DX} & D_2 H_{1DX} & H_2 D_{1DX} & D_2 D_{1DX} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{D}_z = \begin{bmatrix} A_2 A_{1DZ} & V_2 A_{1DZ} & A_2 V_{1DZ} & V_2 V_{1DZ} \\ H_2 A_{1DZ} & D_2 A_{1DZ} & H_2 V_{1DZ} & D_2 V_{1DZ} \\ A_2 H_{1DZ} & V_2 H_{1DZ} & A_2 D_{1DZ} & V_2 D_{1DZ} \\ H_2 H_{1DZ} & D_2 H_{1DZ} & H_2 D_{1DZ} & D_2 D_{1DZ} \end{bmatrix}$$

E o resultado, considerando relevantes somente os subespaços da diagonal principal é

$$\begin{bmatrix} A_2 A_{1U} A_2 A_{1DX} & V_2 A_{1U} D_2 A_{1DX} & A_2 V_{1U} A_2 D_{1DX} & V_2 V_{1U} D_2 D_{1DX} \\ H_2 A_{1U} A_2 A_{1DX} & D_2 A_{1U} D_2 A_{1DX} & H_2 V_{1U} A_2 D_{1DX} & D_2 V_{1U} D_2 D_{1DX} \\ A_2 H_{1U} A_2 A_{1DX} & V_2 H_{1U} D_2 A_{1DX} & A_2 D_{1U} A_2 D_{1DX} & V_2 D_{1U} D_2 D_{1DX} \\ H_2 H_{1U} A_2 A_{1DX} & D_2 H_{1U} D_2 A_{1DX} & H_2 D_{1U} A_2 D_{1DX} & D_2 D_{1U} D_2 D_{1DX} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} A_2 A_{1DZ} A_2 A_{1U} & A_2 A_{1DZ} V_2 A_{1U} & A_2 A_{1DZ} A_2 V_{1U} & A_2 A_{1DZ} V_2 V_{1U} \\ A_2 A_{1DZ} H_2 A_{1U} & A_2 A_{1DZ} D_2 A_{1U} & A_2 A_{1DZ} H_2 V_{1U} & A_2 A_{1DZ} D_2 V_{1U} \\ A_2 D_{1DZ} A_2 H_{1U} & A_2 D_{1DZ} V_2 H_{1U} & A_2 D_{1DZ} A_2 D_{1U} & A_2 D_{1DZ} V_2 D_{1U} \\ D_2 D_{1DZ} H_2 H_{1U} & D_2 D_{1DZ} D_2 H_{1U} & D_2 D_{1DZ} H_2 D_{1U} & D_2 D_{1DZ} D_2 D_{1U} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}$$

Para campos com velocidade variável, Wu e McMechan (1998) demonstram o resultado

$$\begin{aligned} \tilde{U} \tilde{D}_x^2 + \tilde{D}_z^2 \tilde{U} &\approx \tilde{S} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial t^2}; \\ \tilde{S} &= \{ \tilde{S}_{k,l}^{j,j}, \tilde{S}_{k,l}^{j,i}, \tilde{S}_{k,l}^{i,j}, \tilde{S}_{k,l}^{i,i} \}; \\ S(z, x) &= \frac{1}{C^2(z, x)}, \end{aligned}$$

cuja solução numérica é idêntica à solução para meios homogêneos. A validade deste resultado depende da suavidade na variação das velocidades no campo.

Em (Loureiro et al. 2003), é mostrada a forma

$$\tilde{S} = \{ \tilde{S}_{k,l}^{j,j}, \tilde{S}_{k,l}^{j,i}, \tilde{S}_{k,l}^{i,j}, \tilde{S}_{k,l}^{i,i} \};$$

que difere da forma anterior por somente considerar o subespaço de aproximação resultante da transformada wavelet.

Exemplo

O processo de modelagem acústica foi aplicado sobre o perfil de velocidades encontrado em (Cetale Santos, 2003) após a suavização das transições de velocidades, conforme mostrado na figura 5 (a). Com 3200m de afastamento e 1600m de profundidade, o campo foi amostrado a cada 4 metros, resultando em uma malha computacional de 400x800 amostras. Foram realizadas simulações com os algoritmos de diferenças finitas, wavelet packet com 1 nível de decomposição e wavelet packet com 2 níveis de decomposição, sendo utilizada a wavelet Daubechies-6. O tempo simulado foi de 1,2s com passo de 0,2ms e os resultados são mostrados nas

figuras 5 (b),(c) e (d), respectivamente.

A figura 6 mostra em detalhe a região marcada nas figuras 5 (b), (c) e (d). Os eventos mostrados são as reflexões nas três primeiras interfaces do modelo. Os resultados utilizando transformada wavelet sofrem um pequeno deslocamento na fase quando comparados ao resultado obtido por diferenças finitas.

Conclusões

No método diferenças finitas, a distribuição dos recursos computacionais, geralmente utilizadas em modelos de grande escala, sofre com uma desgastante comunicação entre os processos. Por sua vez, os métodos wavelet, além da distribuição dos recursos, oferecem, através das aproximações discutidas, a independência total dos processos até o último passo, quando então seus resultados são combinados.

Os métodos expostos em (Dessing e Wapenaar, 1995; Wu e McMechan, 1998) sugerem uma partição não homogênea dos domínios. Seguindo estes métodos, uma distribuição de tarefas em um cluster homogêneo têm custos computacionais diferentes e os nós responsáveis pelas tarefas mais pesadas determinam o tempo total de processamento, enquanto os demais permanecem ociosos.

Neste trabalho, o processo de modelagem no domínio da transformada wavelet foi estendido não só para a decomposição em mais de um nível, como para a utilização da abordagem wavelet packet, que tem a vantagem de fazer uma partição homogênea dos

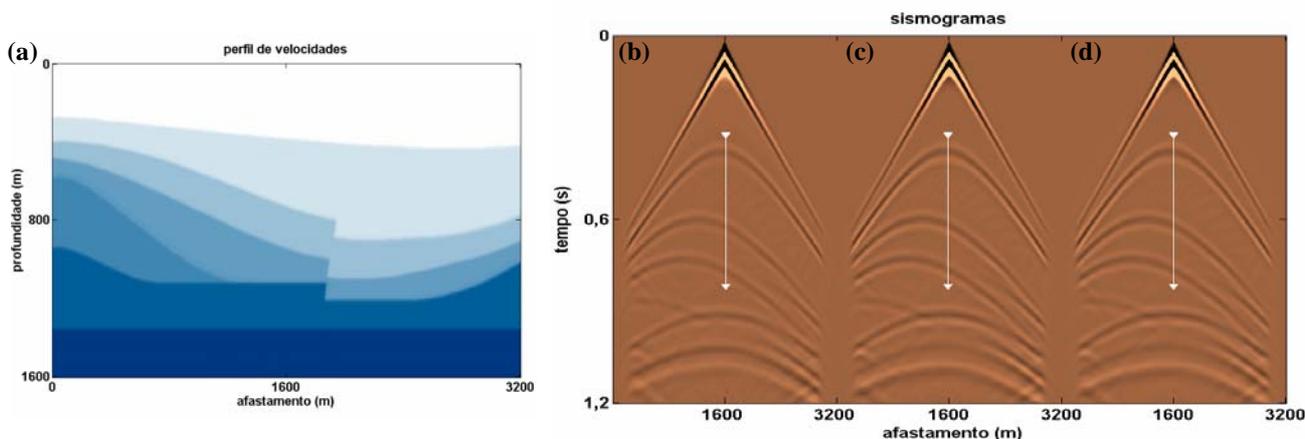


Figura 5: Modelagem acústica: (a) perfil de velocidades; sismogramas obtidos por (b) diferenças finitas, (c) um nível de decomposição wavelet e (d) dois níveis de decomposição wavelet packet.

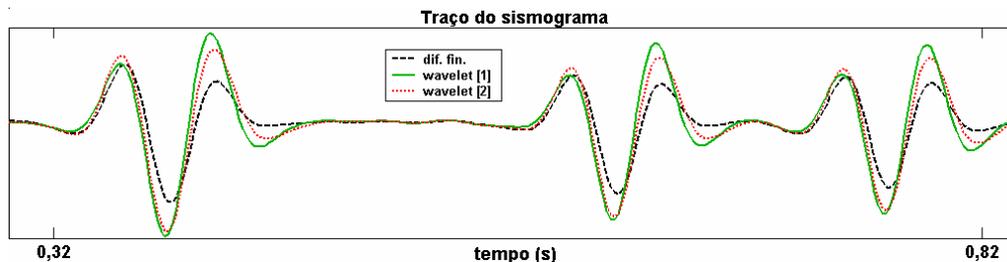


Figura 6: Modelagem acústica: Traços extraídos dos sismogramas da figura 5 (b), (c) e (d)

domínios. Esta forma aumenta a eficiência da implementação paralela em um cluster de computadores, pois diminui o tempo ocioso.

Agradecimentos

Os autores gostariam de agradecer a PETROBRAS pelo suporte financeiro através do programa de pesquisa PRAVAP 19. Gostaríamos também de agradecer a Marcílio Castro de Matos pelos seus comentários e sugestões.

Referências

Beylkin, G., 1992, On the representation of operators in bases of compactly supported wavelets: SIAM J. Numer. Anal., 6, 1716-1740.

Cetale Santos, M. A., 2003, Migração em profundidade por rotação de fase dos campos de onda qP e qSV em meios com simetria polar local, Tese de Doutorado, DEE/PUC-Rio.

Daubechies, I., 1992, Ten Lectures on Wavelets: Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia,

EUA. CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics.

Dessing, F. J., e Wapenaar, C. P. A., 1995, Efficient migration with one-way operators in the wavelet transform domain: 64th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1240-1243.

Jameson, L., 1993, On the Daubechies-based wavelet differentiation matrix: Inst. Comput. Appl. Sci. Eng., Rpt. No. 93-95.

Loureiro, F. P., Osório, P. L. M., Cetale Santos, M. A. e Soares Filho, D. M., 2003, Modelagem acústica no domínio da transformada Wavelet: 8th International Congress of the Brazilian Geophysical Society.

Strang G. e Nguyen T. Q., 1996, Wavelet and Filter Banks: Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, E. U. A.

Wu, Y., e McMechan, G. A., 1998, Wave extrapolation in the spatial wavelet domain with application to poststack reverse-time migration: Geophysics, 63, 589-600.