



Modelagem acústica e implementação da superposição das condições de Dirichlet e Neumann nas fronteiras do modelo

Cíntia Matsumura, Viatcheslav I. Priimenko LENEPU/UFEN, Brasil, Djalma M. Soares Filho, PETROBRAS S/A, Brasil

Copyright 2005, SBGF - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, 11-14 September 2005.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society. Ideas and concepts of the text are authors' responsibility and do not necessarily represent any position of the SBGF, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Abstract

In numerical modeling of wave propagation, the size of the model is limited by the available computer memory. This restriction, introduces artificial boundaries, which produces unwanted reflections that contaminate the solution. Then it is highly desirable to be able to eliminate these reflections.

In this paper we make a comparative analysis using different artificial boundaries for the acoustic wave propagation case. The results show that reflections from the boundaries of a model may be completely eliminated by adding together the solution of the Dirichlet and Neumann problems. The results obtained are compared with ones, calculated using another types of artificial boundary conditions.

Introdução

Em muitos problemas físicos que envolvem o movimento de ondas, o domínio espacial é tão grande que torna inviável a simulação computacional. Uma restrição, então, quanto à solução numérica, é a redução do modelo físico, de tal forma que o domínio espacial permita uma simulação numérica boa associada a um menor custo computacional. Uma aproximação típica é simplesmente truncar o domínio físico original. Entretanto, os métodos de solução numérica da equação da onda enfrentam restrições quanto às bordas do modelo. Para tanto, faz-se necessário encontrar condições de contorno apropriadas que tornem essas fronteiras as mais transparentes possíveis.

Na aproximação por diferenças finitas, a delimitação do modelo faz com que os operadores simétricos possuam pontos em posições que estariam fora das dimensões consideradas (Kelly and Marfurt, 1990). A solução adotada nesses problemas busca impor condições de contorno apropriadas nas bordas do modelo buscando anular essas reflexões.

Várias são as aproximações que procuram diminuir ou anular as reflexões das fronteiras introduzidas na descrição de um modelo. Entre elas estão as condições de bordas não reflexivas que são baseadas na substituição da equação da onda nas regiões da fronteira por equações unidirecionais que não permitem que a

energia que se propaga das bordas retorne para a malha numérica (Clayton and Enquist, 1977); as condições de bordas transparentes (Reynolds, 1978) que se baseiam também nas condições anteriores, além de considerar a fatorização da equação da onda; e as condições de bordas de absorção (Cerjan et al., 1985), que se fundamentam em um método de aproximação baseado no aumento do domínio espacial em virtude de um mecanismo de amortecimento definido em pontos que são acrescidos ao redor do modelo. Uma restrição para os dois primeiros métodos é que as condições são válidas apenas para ondas planas com incidência normal. Para o segundo método, o custo computacional aumenta consideravelmente.

Nesse trabalho, foi implementada na modelagem sísmica acústica, utilizando o método de diferenças finitas, uma condição de fronteira que utiliza uma superposição das condições de contorno de Dirichlet e Neumann. A soma das duas soluções cancela as reflexões das fronteiras uma vez que essas condições são opostas em sinais (Smith, 1974). Os sismogramas obtidos com essa superposição são comparados com os sismogramas obtidos com as condições transparentes, com as de bordas de absorção e com as condições não reflexivas de Clayton e Enquist (1977). O resultado mostra que a implementação proposta elimina completamente as reflexões de bordas, sendo equivalente aos outros métodos em termos de tempo computacional.

Meio Acústico

A equação da onda para o caso acústico assume um meio fluido o qual suporta a propagação da onda de pressão. A equação que descreve a propagação de uma onda nesse tipo de meio é deduzida usando a equação de Euler e a equação da continuidade, apresentadas, respectivamente, nas expressões abaixo (Berkhout, 1987):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho c^2 \nabla \cdot u = 0 \quad (2)$$

onde u é a velocidade da partícula, $\rho = \rho(x, z)$ é a densidade, p é a pressão acústica e $c = c(x, z)$ é a velocidade da onda acústica no meio considerando o caso bidimensional.

Substituindo a equação (1) em (2):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \rho c^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \right\} = \delta(x, z) f(t) \quad (3)$$

onde $\delta(x,z)$ é a função de Dirac que caracteriza a posição espacial da fonte e $f(t)$ é a função fonte.

Se o meio possuir uma densidade constante, a equação da onda acústica é definida pela seguinte expressão:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \left\{ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right\} = \delta(x,z)f(t) \quad (4)$$

Discretização por Diferenças Finitas

Uma aproximação precisa pode ser obtida, utilizando o método de diferenças finitas para a equação da onda acústica no caso 2D com densidade constante, substituindo aproximações de segunda ordem para as derivadas temporais e de quarta ordem para as derivadas espaciais (Alford et al., 1974). Assim, a forma discretizada da equação (4) pode ser aproximada pela seguinte expressão:

$$p^{k+1}(i,j) = \left(2 - \frac{5(c(i,j))^2 \Delta t^2}{h^2} \right) p^k(i,j) - p^{k-1}(i,j) + \frac{4}{3} \frac{(c(i,j))^2 \Delta t^2}{h^2} \left\{ p^k(i+1,j) + p^k(i-1,j) + p^k(i,j+1) + p^k(i,j-1) \right\} - \frac{1}{12} \frac{(c(i,j))^2 \Delta t^2}{h^2} \left\{ p^k(i+2,j) + p^k(i-2,j) + p^k(i,j+2) + p^k(i,j-2) \right\}$$

O termo $p^{k+1}(i,j)$ representa o valor numérico do campo calculado no ponto $(i\Delta x, j\Delta z)$ e no tempo $k\Delta t$. Em geral, a maioria dos problemas de modelagem utiliza intervalos de discretização espaciais iguais, de forma que $\Delta x = \Delta z = h$, como considerado na expressão acima. Nesse tipo de aproximação, o campo no ponto i,j,k no instante $n+1$, é calculado em função de pontos no instante n e no instante $n-1$.

A equação (5) obedece ao critério de estabilidade se $\frac{c\Delta t}{\Delta h} \leq \sqrt{\frac{3}{8}}$ (Alford et al., 1974).

Bordas de Reflexão

As condições de contorno propostas nesse trabalho foram definidas como uma composição das condições de Dirichlet e Neumann (Smith, 1974). Para o caso 1D da equação (4), essas duas condições são definidas, respectivamente, por:

$$p(\pm a, t) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(\pm a, t) = 0 \quad (7)$$

que resultam na reflexão da onda incidente em $x = \pm a$. Particularmente, supõe-se que a solução do problema em uma dimensão seja uma onda plana propagando-se para a direita, com a seguinte expressão:

$$p = e^{i(\omega t - \kappa x)} \quad (8)$$

onde ω é a frequência angular, κ é o número de onda. Essas duas quantidades estão associadas pela seguinte expressão:

$$\omega = \kappa c \quad (9)$$

Então, a solução da equação da onda para o caso 1D para $x \leq a$ é dada por:

$$p = e^{i(\omega t - \kappa x)} + R e^{i(\omega t + \kappa x)} \quad (10)$$

onde R é o coeficiente de reflexão.

Substituindo as condições de contorno (6) e (7) na equação (10), e resolvendo para R , obtém-se:

$$|R| = 1 \quad (11)$$

ou seja, a amplitude da onda refletida é igual a amplitude da onda incidente em $x = a$. De forma análoga, para a onda viajando para a esquerda, a onda refletirá em $x = -a$ e o módulo do coeficiente de reflexão será igual a 1. Mais especificamente, ocorre que as amplitudes das ondas refletidas nas fronteiras possuem valores iguais quando se aplicam as condições de contorno de Dirichlet e Neumann, porém com sinais opostos. Esse fato permite então, que as reflexões provenientes de um modelo sejam eliminadas por completo quando os sinais provenientes de um modelo com condições de Dirichlet são somados e divididos por 2 aos sinais do mesmo modelo com condições de contorno de Neumann.

As fronteiras do modelo aproximadas pelo método de diferenças finitas, descritas utilizando as condições de Dirichlet, possuem as seguintes expressões:

$$\text{Borda inferior: } p^k(i, N_z) = 0$$

$$\text{Borda lateral esquerda: } p^k(1, j) = 0$$

$$\text{Borda lateral direita: } p^k(N_x, j) = 0$$

Para as condições de Neumann, uma vez que $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, fez-se uso das seguintes condições:

$$\text{Borda inferior: } p^k(i, N_z - 1) = p^k(i, N_z + 1)$$

$$\text{Borda lateral esquerda: } p^k(-1, j) = p^k(1, j)$$

$$\text{Borda lateral direita: } p^k(N_x - 1, j) = p^k(N_x + 1, j)$$

Essas condições de Neumann foram substituídas na equação (5), atualizando o campo de pressão nos pontos da fronteira. Na borda superior, em ambos os casos, foram utilizadas condições de superfície livre.

Modelo de Reservatório

O modelo de reservatório proposto nesse trabalho é apresentado na Figura 1. As respectivas velocidades de cada camada são representadas na escala de cores. Realizou-se a suavização da velocidade em cada uma das interfaces aplicando-se uma função do Seismic Unix / CWP (Stockwell and Cohen, 1998). O modelo tem 600 m x 600 m.

Na modelagem sísmica, utilizou-se o passo de discretização $h = 5\text{ m}$ para ambos os espaçamentos verticais e horizontais, resultando em um total de 120 x 120 pontos. O intervalo de tempo considerado foi $\Delta t = 0.0004\text{ s}$. O pulso sísmico utilizado constitui-se da derivada segunda da função Gaussiana com uma frequência de pico de 40 Hz. A fonte está localizada a 300 m do início do modelo e a 3 pontos da malha abaixo da superfície. Os receptores encontram-se nessa mesma profundidade.

A modelagem sísmica foi submetida a quatro diferentes condições de fronteiras. Na Figura 2 é apresentado o sismograma obtido pela superposição das condições de contorno de Dirichlet e Neumann. As Figuras 3, 4 e 5 apresentam, respectivamente, as condições de contorno transparente, de bordas de absorção e não reflexivas de Clayton e Enquist (1977).

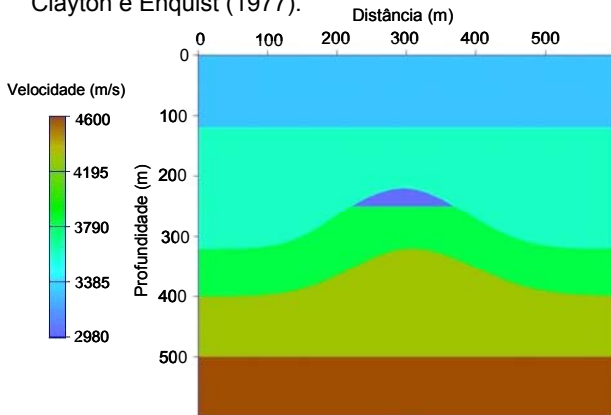


Figura 1 – Modelo de Velocidade

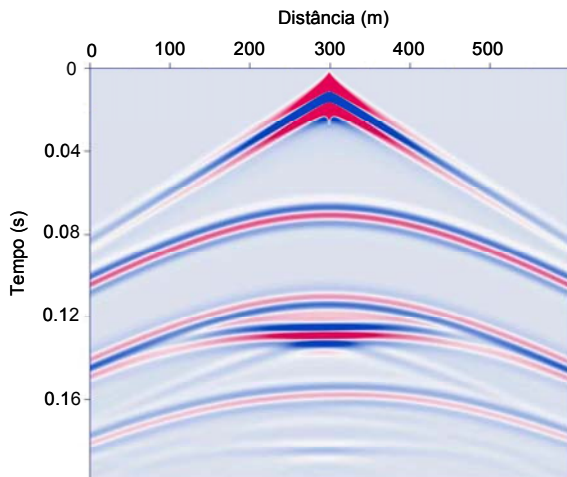


Figura 2 – Superposição das condições de contorno de Dirichlet e Neumann

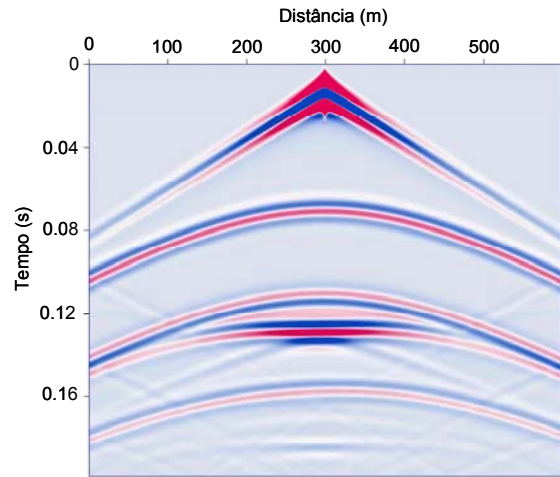


Figura 3 – Condições de contorno transparentes

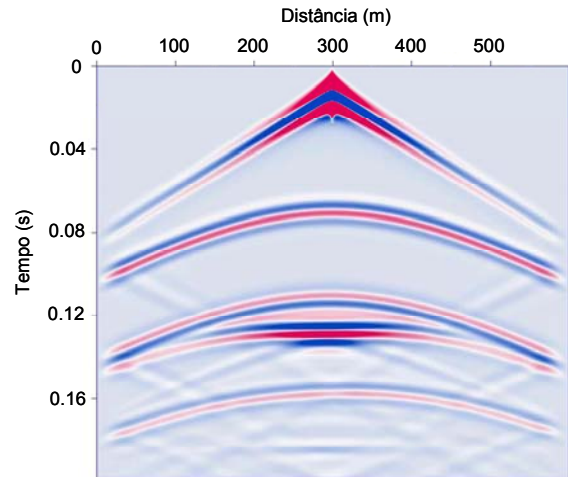


Figura 4 – Condições de contorno utilizando bordas de absorção

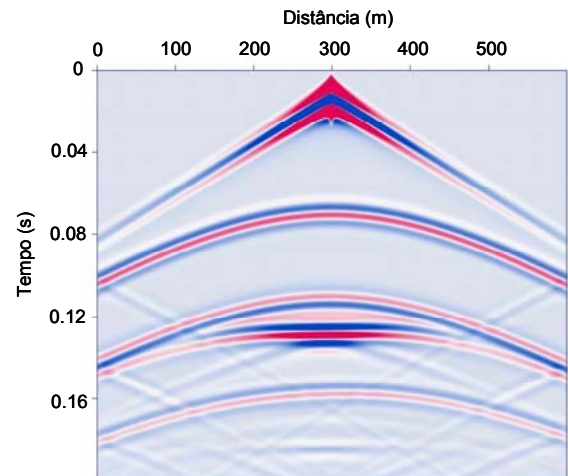


Figura 5 – Condições de contorno não reflexivas (Clayton and Enquist, 1977)

Resultados

A Figura 2 mostra que o sismograma obtido com as condições de Superposição de Dirichlet e Neumann não apresenta nenhuma reflexão das bordas do modelo. O sismograma da Figura 3, referente às condições Transparente, apresenta reflexões sutis das fronteiras, enquanto que os sismogramas obtidos com as condições de bordas de absorção e condições não reflexivas, apresentados na Figura 4 e Figura 5, respectivamente, mostram fortes contribuições das bordas. Obviamente, que nas condições transparentes, de bordas de absorção e não reflexivas, o ideal seria aumentar o modelo, mas a proposta do trabalho foi justamente comparar o método de superposição com os outros três métodos utilizados, mostrando que esse último tem como principal vantagem a modelagem da área de interesse sem nenhum acréscimo de pontos nas fronteiras.

Além da análise dos sismogramas referente às reflexões das fronteiras, comparou-se o tempo de simulação para cada tipo de problema de fronteira proposto. Esses tempos, apresentados na Tabela 1, são relativos a um computador com processador de 500 Mb de RAM e foram obtidos utilizando um compilador Fortran 77.

Tipo de Fronteira	Tempo (s)
Superposição Dirichlet+Neumann	777
Transparente	808
Bordas de Absorção	349
Condições de Clayton e Engquist	360

Tabela 1- Tempos de simulação

Observa-se que há uma semelhança entre os tempos de simulação referentes às condições de fronteira entre a Superposição de Dirichlet e Neumann e transparente, assim como, entre bordas de absorção e condições não reflexivas de Clayton e Engquist.

Deve-se enfatizar que para os três últimos problemas de condições de bordas, o que se faz na prática é aumentar o domínio espacial do modelo, fazendo com que haja um acréscimo no tempo de aquisição de um sismograma, o que não é necessário quando é realizada a modelagem sísmica com o primeiro tipo de fronteira. Portanto, verifica-se a efetividade das condições de fronteiras tratadas como superposição das condições de Dirichlet e Neumann.

Conclusões

Nesse trabalho, foi implementada para a modelagem sísmica acústica 2D condições de contorno que consideram a superposição das condições de Dirichlet e Neumann. Verificou-se que utilizando essa condição de superposição, há um resultado sem nenhuma contribuição das reflexões das fronteiras. Além disso, o sismograma foi obtido sem custos adicionais de tempo de computação quando comparado com as condições

transparentes. Fazendo uma comparação com os outros métodos, que necessitam de um acréscimo de pontos nas bordas do modelo, o custo computacional torna-se equivalente, mostrando mais uma vantagem do método.

Agradecimentos

Os autores agradecem a Marcos Vitor Barbosa pela colaboração na implementação numérica das equações, ao LENEP e à UENF pelo apoio financeiro dessa pesquisa.

Referências

- Alford, R. M., Kelly, K. R. and Boore, D. M.**, 1974, Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation: *Geophysics*, Vol. 39, No. 6, p834-842.
- Berkhout, A. J.**, 1987, *Applied Seismic Wave Theory*, Elsevier, New York.
- Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R. and Reshef.**, 1985, A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations: *Geophysics*, Vol. 50, No. 4, p705-708.
- Clayton, R. and Engquist, B.**, 1977, Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations: *Bulletin Seismology Society American*, Vol. 67, p1529-1540.
- Kelly, K. R. and Marfurt, K. J. (eds.)**, 1990, *Numerical modeling of Seismic waves propagation: Society of Exploration Geophysicists*, Tulsa.
- Reynolds, A. C.**, 1978, Boundary conditions for the numerical solution of wave propagation problems: *Geophysics*, Vol. 43, No. 6, p1099-1110.
- Smith, W. D.**, 1974, A nonreflecting plane boundary for wave propagation problems: *Journal Computational Physics*, Vol. 15, p492-503.
- Stockwell, J. W., Cohen, J. K.**, 1998, *The New SU User's Manual*, Colorado School of Mines.