



Teoria da Expansão em Série de Debye para o Guia de Onda de Pekeris

Luiz G. Guimarães⁽¹⁾, Rosana B. Santiago⁽²⁾, (1) IF-UFRJ, (2) IF-UERJ

Copyright 2005, SBGF - Sociedade Brasileira de Geofísica

This paper was prepared for presentation at the 9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society held in Salvador, Brazil, 11-14 September 2005.

Contents of this paper were reviewed by the Technical Committee of the 9th International Congress of the Brazilian Geophysical Society. Ideas and concepts of the text are authors' responsibility and do not necessarily represent any position of the SBGF, its officers or members. Electronic reproduction or storage of any part of this paper for commercial purposes without the written consent of the Brazilian Geophysical Society is prohibited.

Resumo:

Mostramos neste trabalho que a aplicação da teoria da expansão de Debye ao problema do guia de onda de Pekeris, nos permite analisar de forma simples o papel das reflexões múltiplas nos modos ressonantes e não ressonantes que se propagam ao longo do guia.

Introdução:

Vários modelos de acústica oceanográfica são baseados em perfis multicamadas caracterizados pela densidade do fluido ou meio elástico bem como pela velocidade do som neste meio. Nestes sistemas as reflexões múltiplas da onda desempenham um papel fundamental na propagação do sinal, pois efeitos de interferência entre essas ondas podem introduzir variações temporais significativas no tempo de trânsito entre a emissão do sinal até a sua recepção ou até mesmo sua supressão [1,2,3]. Dentre os possíveis perfis de estratificação do oceano, o modelo de Pekeris é um dos mais simples, pois descreve a propagação do som no oceano com um modelo de apenas duas camadas. A velocidade do som no oceano depende de vários fatores tais como pressão, temperatura e salinidade [4]. Porém como estes fatores variam com a profundidade, o modelo de Pekeris fornece resultados satisfatórios quando modela "águas rasas" ou oceanos nos quais as variações destes fatores não sejam grandes. Além disso o som é uma onda e dependendo de como o perfil da velocidade sonora c varia com a profundidade, alguns efeitos ondulatórios relacionados ao transporte de energia e momentum podem se manifestar. Por exemplo, pode haver o aparecimento de regiões de grandes gradientes de pressão (cáusticas sonoras), difração por obstáculos bem como o surgimento de regiões e direções de "fácil" propagação, nas quais a energia é preferencialmente transportada. Estes últimos são chamados de guias de onda. O estudo desses efeitos é de suma importância para uma boa compreensão e modelagem do sinal sonoro no oceano. Neste trabalho vamos dar uma atenção especial ao papel das reflexões múltiplas na propagação do sinal sonoro bem como na excitação de modos ressonantes nestes guias. Para tanto passamos a seguir a estudar esses efeitos no modelo de guia de Pekeris.

O Modelo de Guia de Ondas de Pekeris e a Expansão de Debye

É bem sabido que para fluidos com densidade constante ou constante por partes, os campos de pressão e de deslocamento que evoluem harmonicamente com o tempo ($\exp(i\omega t)$) satisfazem nestes meios à equação de Helmholtz [1,2,3]:

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{r})^2} \right) \Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (1).$$

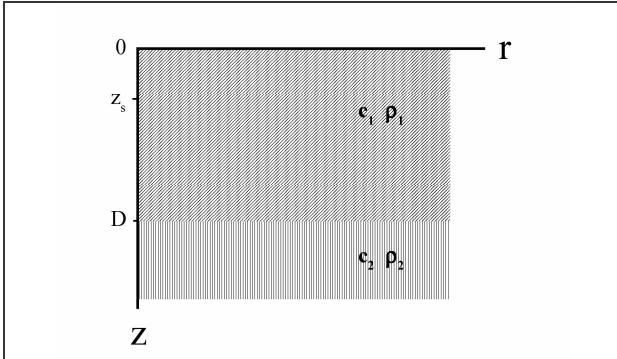
Vamos admitir aqui um sistema de coordenadas cilíndrico (r, ϕ, z) , onde superfície e profundidade do oceano são respectivamente caracterizadas pelo plano $z=0$ e direção positiva de z . Sendo assim, se c depende apenas da profundidade z e propondo que o campo Φ possua simetria azimutal, então as soluções finitas em $r=0$ da eq(1) possuem a forma da seguinte transformada de Hankel:

$$\Phi(\mathbf{r}) \equiv \int_0^\infty dk_r k_r J_0(k_r r) \Psi(z, k_z) \quad (2).$$

Onde número de onda radial k_r é a constante de separação, J_0 é a função cilíndrica de Bessel de ordem zero e Ψ satisfaz a seguinte equação de onda:

$$\frac{d^2 \Psi}{dz^2} + k_z^2(z) \Psi = 0 \quad (3).$$

Com $k_z^2 \equiv \omega^2/c(z)^2 - k_r^2$. Em sua forma mais simples o modelo de Pekeris [5] consiste em supor o oceano como dois fluidos embebidos em um semi-espaço infinito (veja Fig.(1)), onde a superfície do oceano em $z=0$ é uma fronteira acusticamente "rígida", pois despreza-se a propagação sonora no ar em detrimento a no fluido. Neste modelo, logo após a superfície e até uma profundidade D , se supõe um fluido de densidade ρ_1 no qual o som se propaga com velocidade c_1 . Na camada semi-infinita seguinte, admite-se um outro fluido com densidade ρ_2 e velocidade do som c_2 .



Fig(1): Mostra a geometria do modelo de guia de onda de pekeris. A fonte localiza-se em z_s , o plano $z=0$ representa a superfície do oceano enquanto que o plano $z=D$ delimita os meios 1 e 2.

Supondo-se uma fonte pontual de amplitude de referência A_0 localizada em $z=z_s$ ($0 < z_s < D$) e que em cada camada tanto a densidade como a velocidade do som no fluido sejam constantes, tem-se então que o campo Ψ deve possuir a seguinte forma:

$$\Psi(z) = \frac{A_0}{4i\pi k_{z1}} \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ e^{(ik_{z1}|z-z_s|)} & \\ + A_1^+ e^{(ik_{z1}z)} & 0 \leq z \leq D \\ + A_1^- e^{(-ik_{z1}z)} & \\ A_2^+ e^{(ik_{z2}(z-D))} & z \geq D \end{cases} \quad (4).$$

Onde os números de onda $k_{zi} \equiv \sqrt{\omega^2/c_i^2 - k_r^2}$ podem ser complexos ou até imaginários puros como no caso de excitação de ondas evanescentes. Além disso,

A_1^\pm são respectivamente as amplitudes da onda entrante e refletida no meio 1, enquanto que A_2^+ é a amplitude da onda transmitida para o meio 2. Estas amplitudes podem ser determinadas exigindo-se que além da pressão ser nula na superfície do oceano tenha-se que as propriedades elástico-acústicas dos meios sejam conservadas, isto é, exige-se também que os campos de pressão e deslocamento vertical sejam contínuos nas interfaces entre os fluidos em $z = D$. Feito isso, pode-se mostrar que estas amplitudes são dadas por [1]:

$$\begin{aligned} A_1^- &= -e^{(ik_{z1}z_s)} - A_1^+; \\ A_1^+ &= -\frac{1}{2\Delta} \left[\frac{k_{z2}}{k_{z1}} \sin(k_{z1}(D-z_s)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos(k_{z1}(D-z_s)) \right] \\ A_2^+ &= \frac{1}{\Delta} \sin(k_{z1}z_s) \end{aligned} \quad (5).$$

$$\text{Com } \Delta \equiv -\frac{1}{2} \left[\frac{k_{z2}}{k_{z1}} \sin(k_{z1}D) + i \frac{\rho_2}{\rho_1} \cos(k_{z1}D) \right].$$

No caso em que $c_1 < c_2$ e $\rho_1 < \rho_2$, mostra-se [1,2,5] que para alguns valores discretos de k_r (soluções de $\Delta = 0$) a energia se propaga eficientemente entre a superfície até basicamente à profundidade D , e que a partir daí tem-se uma quase "penumbra" acústica. Neste sentido, diz-se que esse sistema se comporta como um guia de ondas acústicas. Apesar de sua forma simples, a eq(5) acima carece de uma interpretação física mais clara. Para tentar superar isto vamos utilizar o formalismo da *expansão de Debye* [6,7,8,9]. Tal formalismo consiste em tentar formular as soluções da equação de onda, para uma dada geometria e condições de contorno, em termos de coeficientes de reflexão e transmissão característicos dos casamentos de impedância entre meios distintos. Por exemplo, utilizando esta técnica podemos re-escrever o sistema(5) da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_1^- \\ A_1^+ \\ A_2^+ \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2i\mathbf{R}e^{(2ik_{z1}D)} \sin(k_{z1}z_s) \\ e^{(ik_{z1}z_s)} + \mathbf{R}e^{(2ik_{z1}(D-z_s))} \\ 2i\mathbf{T}e^{(ik_{z1}D)} \sin(k_{z1}z_s) \end{bmatrix} \times S_D \quad (6).$$

Sendo \mathbf{R} e \mathbf{T} respectivamente os coeficientes de reflexão e transmissão associados à interface entre os meios em $z=D$ e dados por [1]:

$$\mathbf{R} = \frac{\rho_2 k_{z1} - \rho_1 k_{z2}}{\rho_2 k_{z1} + \rho_1 k_{z2}}; \mathbf{T} = 2 \frac{\rho_1 k_{z1}}{\rho_2 k_{z1} + \rho_1 k_{z2}} \quad (7).$$

Além disso, na equação(6) S_D é a expansão de Debye para amplitudes, e esta se escreve como:

$$S_D(M) \equiv \sum_{p=1}^M [-\exp(2ik_{z1}D)\mathbf{R}]^{p-1} + \frac{[-\exp(2ik_{z1}D)\mathbf{R}]^M}{1 + \exp(2ik_{z1}D)\mathbf{R}} \quad (8).$$

Análise e Resultados

Da mesma forma como no método da matriz de transferência em problema de multi-camadas[1], na expansão(8) acima, cada parcela do somatório em potências de \mathbf{R} está associada à contribuição da (p-1)-ésima reflexão múltipla na interface em $z=d$, enquanto que o último termo ("resto" da série) leva em conta as contribuições dos possíveis modos ressonantes do guia [6,7,8,9]. Por exemplo, observe que se o meio 2 tende a ser "rígido" (acusticamente impenetrável) então $\mathbf{R} \rightarrow -1$, de modo que as singularidades de (8) (polos de seu último termo), como era de se esperar, ocorrem para os valores discretos do número de onda $k_{z1} \rightarrow n\pi/D$, sendo n um inteiro positivo. De um modo geral, tais pólos ocorrem para valores complexos de k_{z1} tais que $\exp(2ik_{z1}D)\mathbf{R} = -1$, que também são os zeros de $\Delta = 0$. Por outro lado, se $|\exp(2ik_{z1}D)\mathbf{R}| < 1$ podemos tomar o limite $M \rightarrow \infty$

e transformar (8) em uma série geométrica infinita que pode ser interpretada dentro uma teoria de "raios" da óptica geométrica bem como de "raios" (contribuições) de ondas evanescentes. A seguir, bem como ao longo de todo esse trabalho, vamos analisar essa teoria supondo que os meios (1) e (2) sejam caracterizados por relações constitutivas $c_1=1500\text{m/s}$, $c_2=1800\text{m/s}$, $\rho_1=1000\text{kg/m}^3$, $\rho_2=1800\text{kg/m}^3$, profundidade $D=100\text{m}$ e que a fonte pontual localizada em $z_s=30\text{m}$ emita numa frequência de $f=50\text{Hz}$. Com estes parâmetros a excitação de ressonâncias e ondas evanescentes podem ocorrer para ângulos de incidência, relativos à normal da interface $z=D$, superiores a um ângulo crítico de $\theta_c = \arcsin(c_1/c_2) \approx 56.44^\circ$. Mostramos na Tab.(1) a seguir estes dados.

Modos Ressonantes			
n	$\theta_{\text{inc}}(^{\circ})$	$k_{z1} (\text{m}^{-1})$	$k_r (\text{m}^{-1})$
1	79.86559723	0.03627753800	0.2061717733
2	69.75090243	0.06800753207	0.1964954757
3	59.01711590	0.09243266639	0.1795569154

Tab(1): Mostra para os três primeiros modos ressonantes do presente guia de Pekeris os respectivos valores de ângulo de incidência e números de onda azimutal (k_{z1}) e radial (k_r). Note que a medida que n cresce a excitação do modo ocorre para ângulos de incidência cada vez mais próximos do ângulo crítico $\theta_c \approx 56.44^\circ$.

Além disso, na fig(2) mostra-se em que condições a série de Debye converge. Nesta figura, as regiões (1), (2) e (3) são delimitadas respectivamente por valores do número de onda radial nas faixas $0 \leq k_r < \omega/c_2$, $\omega/c_2 \leq k_r < \omega/c_1$ e $k_r > \omega/c_1$. Observa-se também na fig(2) que na região de ressonâncias (a região(2) hachurada) a série de Debye não converge, a interpretação física para este fato é que quando um modo ressonante (guiado) é excitado, este se propaga eficientemente refletindo e interferindo construtivamente infinitas vezes entre as interfaces ($z=0$ e $z=D$) que delimitam o guia. Por outro lado, na região(3) associada a ondas evanescentes não ressonantes a série de Debye(8) converge rapidamente, isto se deve ao fato que não há quase transmissividade da onda evanescente para profundidades superiores a D , de modo que, as contribuições devido aos primeiros termos da série(8) já devem ser suficientes para descreverem a onda refletida. Na região(1), a série(8) converge, mas lentamente. Pois na região de "óptica geométrica" boa parte da onda é transmitida (na fig(2), aproximadamente 60% da energia é transmitida) mas boa parte também é refletida, dando origem assim novamente a um processo de multi-reflexões que se traduz matematicamente na necessidade de se levar em conta muitos termos na expansão de Debye. Para vermos isto com um pouco mais de detalhe mostraremos nas figuras(3 e 4) o papel das reflexões múltiplas no comportamento da amplitude da onda refletida bem como da pressão. Na figura(3) analisamos o comportamento da amplitude da onda refletida (normalizada a unidade) quando o número de onda radial k_r (em unidades de ω/c_1) varia. Em (a), isto é no painel superior desta figura, supomos na teoria de Debye que haja apenas uma única reflexão ($p=2$ e símbolo .) na interface em $z=D$. Observe que neste caso,

como era de se esperar, a teoria apresenta bons resultados para a regiões(1 e 3), entretanto ela falha completamente em tentar descrever os picos ressonantes na região(2), para superar isto é necessário supor um número maior de reflexões. Fato este observado no painel (b) da figura(3), no qual admite-se que haja seis reflexões ($p=7$ e símbolo 9) na interface em $z=D$. Note que neste caso há uma melhora significativa nos resultados na região(2), pois apesar de não se estimar corretamente a altura dos picos ressonantes (principalmente aqueles mais afastados de θ_c), já se consegue estimar satisfatoriamente suas posições. Passemos agora a ver os efeitos das múltiplas reflexões nos campos de pressão. Para um valor do número de onda radial $k_r=0.1964954757\text{m}^{-1}$ (segundo modo ressonante do guia), a figura(4) mostra o comportamento do campo de pressão (normalizado a $\rho_1\omega^2A_0$) à medida que a profundidade z varia. Para termos alguma idéia quantitativa do papel dos dois primeiros termos na expansão de Debye(8), confrontamos na figura(4a) o cálculo exato para a pressão fornecido pela eq(5) (representado pela linha cheia no gráfico) com duas possíveis estimativas relacionadas à expansão de Debye(8). Na primeira estimativa (representada no gráfico pelo símbolo .) considera-se apenas o termo de transmissão direta (TD, $p=1$ em (8)). Enquanto que na outra estimativa para a pressão (representada pelo símbolo 9) leva-se em conta os dois primeiros termos ($p=1$ e $p=2$). Esta figura sugere que em todas as regiões onde o campo não evanesce, as duas estimativas acima refletem apenas qualitativamente o campo ressonante, uma vez que seus resultados apenas oscilam entre os valores do cálculo exato. Fato este que pode ser corroborado pelo que mostra a figura(4b), pois a contribuição isolada do termo de TD em nada reflete o comportamento verdadeiro da pressão na região de penumbra acústica ($z \approx D + O(D)^{1/3}$).

Conclusões e Perspectivas Futuras

Mostramos aqui que o uso da teoria de Debye no modelo de Pekeris nos permite analisar, bem como se dar uma interpretação física clara às diversas contribuições para a propagação dos modos ressonantes e não ressonantes deste guia. Entretanto, o nosso interesse maior, reside em levar essas idéias à análise sísmica em "águas profundas". Por outro lado, sabemos que a viabilidade do modelo de Pekeris usual se restringe à "águas rasas" e este em nada contempla sobre as propriedades e características elástico-dinâmicas do fundo do oceano. Além disso, os algoritmos mais robustos de obtenção de imagens sísmicas assim como os processos de inversão de seus dados (tipo TA MZO), são baseados no cálculo da amplitude de reflexão da onda sísmica excitada, segundo o modelo de Knott-Zoeppritz (KZ) [10]. Também é fato que hoje em dia a acurácia das medidas sísmicas é tão boa, que em "águas profundas" tem-se que levar em conta a dependência da velocidade do som com a profundidade oceânica. Resumindo, o estado da arte atual é compatível com um modelo que generalize a teoria KZ levando-se em conta a dependência funcional da velocidade do som no oceano com a profundidade. Portanto, os nossos maiores esforços atuais caminham

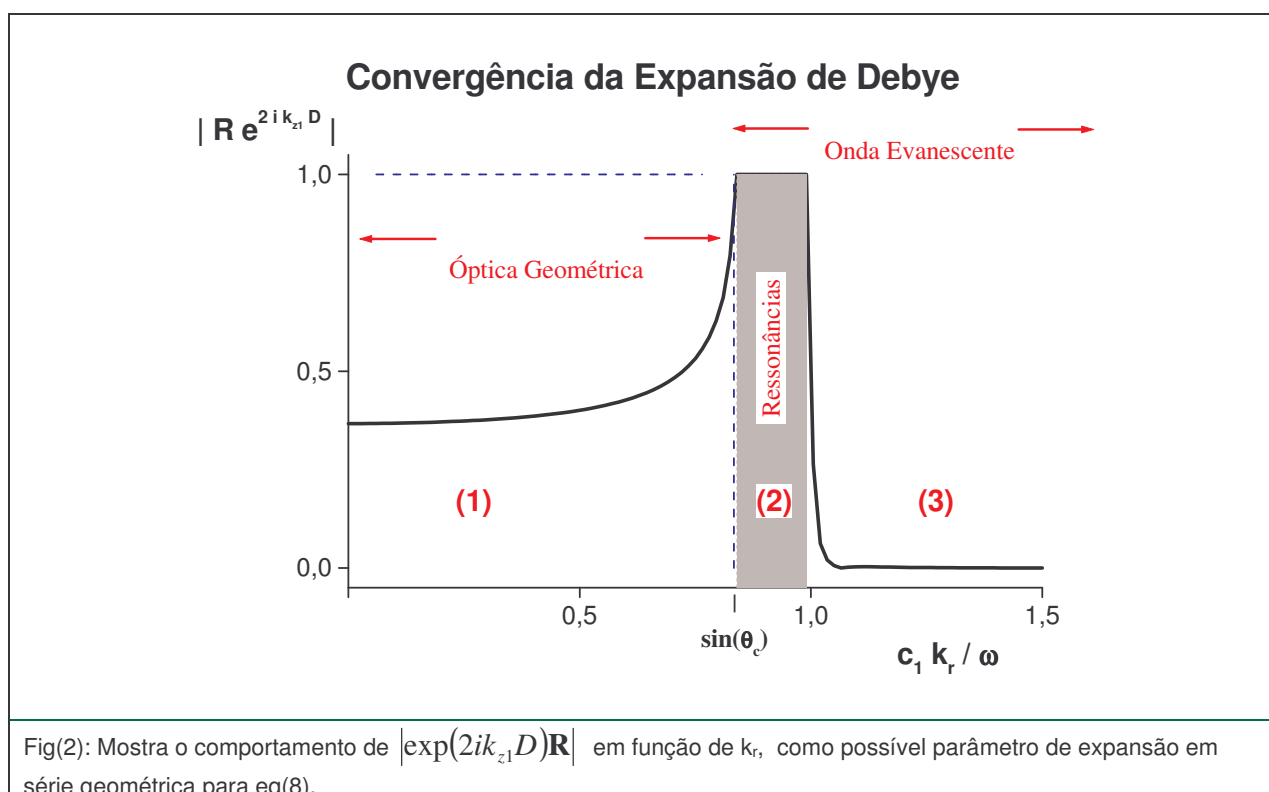
neste sentido, que é de aplicar a teoria de Debye ao cálculo da amplitude de reflexão em um modelo de Pekeris-Knott-Zoeppritz generalizado que permita descrever o acoplamento entre as ondas S e P em um fundo de oceano estratificado em termos de seus coeficientes de reflexão e transmissão. Fato este que nos permitirá entender um pouco melhor a natureza dos modos de propagação ressonantes ou não de tão complexo sistema.

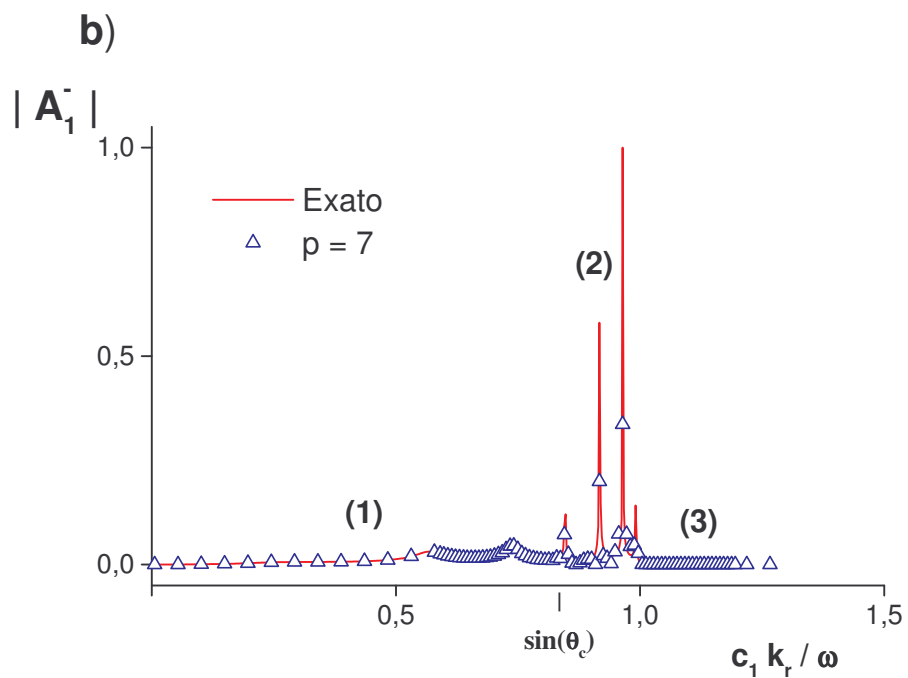
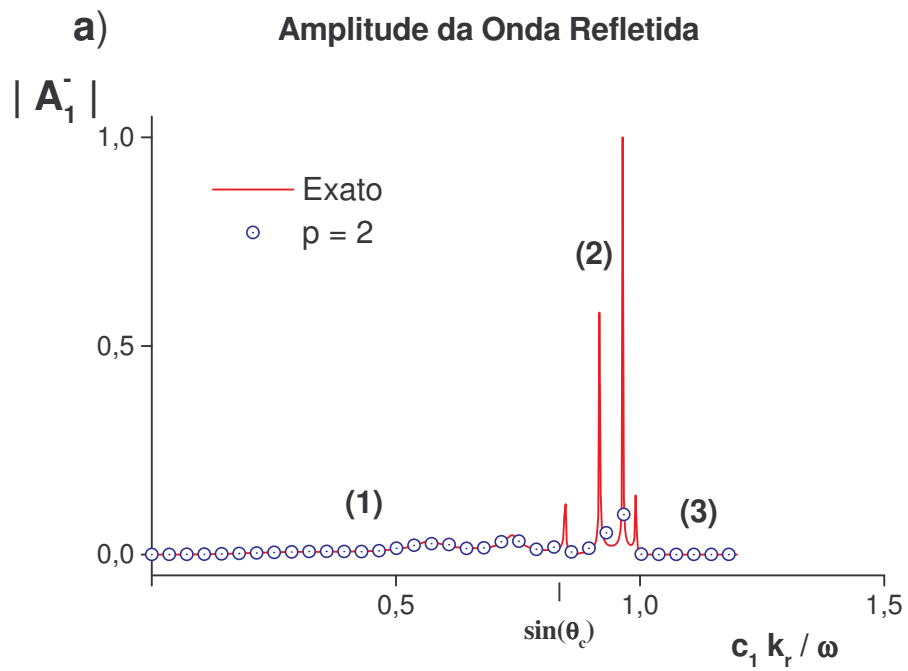
Agradecimentos

Os autores agradecem ao Profs. Webe João Mansur (Coppe-UFRJ) e Carlos Eduardo Parente (Coppe-UFRJ) pelas proveitosas discussões. Este trabalho é parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico–CNPq.

Referências

- [1] F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter, H. Schmidt, *Computational Ocean Acoustics*, (AIP Press, New York, 2000).
- [2] I. Tolstoy, C. S. Clay, *Ocean Acoustics: Theory and Experiments in Underwater Sound*, (Mc G. Hill, New York, 1966).
- [3] C. S. Clay, H. Medwin, *Acoustical Oceanography: Principles and Applications*, (Willey, N. York, 1977).
- [4] W. D. Wilson, *J. Acoust. Soc. Am.* 23, 1357 (1960).
- [5] C. L. Pekeris, *Geol. Soc. Am. Mem.* 27, (1948).
- [6] L. G. Guimarães, H. M. Nussenzveig, "Theory of Mie Resonances and Ripple Fluctuations", *Optics Communications*, **89**, 363 (1992).
- [7] L. G. Guimarães, "Theory of Mie Caustics", *Optics Communications*, **103**, 339 (1993).
- [8] H. M. Nussenzveig, *Diffraction Effects In Semiclassical Scattering*, (Camb. Univ. Press, 1992).
- [9] T. M. Bambino, A. M. S. Breitschaft, V. C. Barbosa, L. G. Guimarães, "Application of semiclassical and geometrical optics theories to resonant modes of a coated sphere", *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 317 (2003).
- [10] K. Aki, P. Richards, *Quantitative Seismology – Theory and Methods*, (W.H. Freeman, San Francisco, 1980).





Fig(3): Compara via teoria de Debye as contribuições das reflexões múltiplas para a onda refletida quando k_r varia nas regiões (1), (2) e (3).

