



Validação do algoritmo de construção de malhas irregulares para modelagem EM.

Rodrigo Erasmo da Conceição Silva¹ e Luiz Rijo¹
rodrigoerasmo@gmail.com, rijo@amazon.com.br
 (1) CPGf/IG/UFGA

Copyright 2008, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

Este texto foi preparado para a apresentação no III Simpósio Brasileiro de Geofísica, Belém, 26 a 28 de novembro de 2008. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do III SimBGf, mas não necessariamente representa a opinião da SBGf ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGf.

Resumo

Neste trabalho vamos apresentar os resultados que validam os programas desenvolvidos para serem usados, posteriormente, na modelagem de dados do método marine Controlled-Source Electromagnetic (mCSEM) 2-D, levando em conta o efeito da batimetria. Para calcular os campos gerados a partir de tais modelos, são necessários: um programa para criação de malhas de elementos finitos (EF) 2-D não-estruturadas; um programa para diminuir a semi-banda da matriz de elementos finitos proveniente desta malha; e uma sub-rotina que permita calcular satisfatoriamente as derivadas numéricas dos campos numa malha não-estruturada. Para validar nossos programas usamos o método Magnetotélorico (MT) modo TE, em modelos com e sem topografia. Os resultados mostram que os programas geram malhas confiáveis e de boa qualidade, matrizes de EF com semi-banda reduzida, e que podemos alcançar valores excelentes para os campos eletromagnéticos e suas derivadas.

Introdução

Na modelagem de dados geofísicos elétricos e eletromagnéticos é comum o uso de modelos 2-D com camadas horizontalmente estratificadas. No entanto, há casos em que se precisam usar modelos com topografia (ou batimetria) (Wannamaker et al., 1986; Key and Weiss, 2006; Li and Constable, 2007), com o intuito de torná-los mais perto da realidade geológica. A construção de tais modelos está diretamente relacionada à construção de malhas não-estruturadas de EF, as quais são mais adequadas para tal fim por serem mais flexíveis. Nosso trabalho tem como objetivo a construção de modelos com topografia, e, portanto, faz uso deste tipo de malha.

Na segunda fase dessa pesquisa o nosso objetivo principal é desenvolver estudos sobre os efeitos de batimetria no método mCSEM. Mas, para isso, é preciso ter certeza de que os programas usados na modelagem estão calibrados e funcionando perfeitamente. É neste contexto que apresentamos alguns resultados que mostram a validade dos métodos usados na criação e refinamento das malhas de EF não-estruturadas, na

redução da banda da matriz de EF (através da renumeração dos nós da malha), e na obtenção das derivadas numéricas em malhas não-estruturadas.

Neste trabalho apresentamos modelagens MT modo TE, pelo método EF com malhas não-estruturadas. A validação e calibração de nossos programas serão feitas usando-se três modelos: o primeiro com um corpo e camadas estratificadas horizontalmente; o segundo com dois meios contendo um vale; e o terceiro com dois meios contendo uma rampa.

Metodologia

Para se calcular numericamente, por elementos finitos, os campos nos métodos elétricos e eletromagnéticos é necessário passar por seis etapas: (1) construção de uma malha inicial de EF; (2) refinamento da malha inicial de EF; (3) renumeração dos nós da malha refinada; (4) montagem do sistema de equações lineares proveniente do algoritmo de EF; (5) resolução do sistema de equações lineares; e (6) cálculo das derivadas dos campos potenciais. Neste trabalho daremos enfoque às etapas (1), (2), (3) e (6).

Para construir nossas malhas precisamos de antemão de uma malha inicial. As malhas mais comuns são as obtidas pela triangulação de Delaunay (Borouchart and George, 1997), por serem malhas de boa qualidade. Malhas de boa qualidade são aquelas que apresentam um grande percentual de triângulos próximos de equiláteros. Malhas deste tipo podem ser obtidas por meio de diversos programas, dentre eles o MATLAB (Matlab, 1999). A Figura 1 mostra uma malha construída no MATLAB, por meio do *toolbox* pdetool. Infelizmente, as malhas construídas com o MATLAB não são suficientemente flexíveis para a modelagem EM. Por isso se faz necessário o desenvolvimento de técnicas de refinamento para tornar a malha inicial, gerada pelo MATLAB, em malhas apropriadas para modelagem EM. É isto que veremos a seguir.

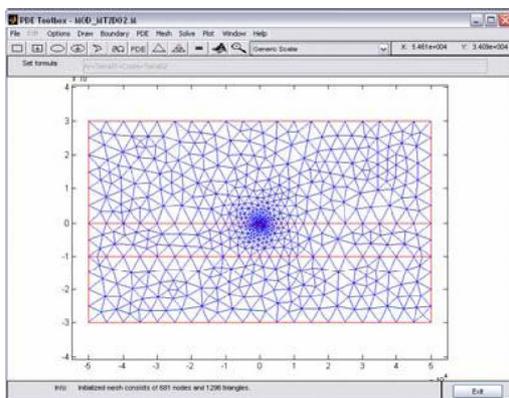
Depois de construir a malha inicial, deve-se aplicar um algoritmo para refinar esta. O método que usamos para refinar a malha inicial consiste em criar nós no interior de alguns elementos, dividindo estes em três elementos. Para aumentar a qualidade da malha após o refinamento, aplicamos a *troca de diagonais de Delaunay* e a *suavização laplaciana* (Baude, 2000; Filho, 2002). Para se obter uma solução confiável pelo método dos EF sem precisar refinar a malha inteira (o que levaria a um grande número de nós e, conseqüentemente, a necessidade de muita memória e tempo computacional

elevado para rodar os modelos), refina-se preferencialmente as regiões próximas das interfaces entre os meios (regiões onde os campos sofrem maior variação), e nas regiões onde são feitas as medidas. A Figura 2 mostra o refinamento da malha apresentada na Figura 1. Nesta figura cada cor representa um meio de propriedade física diferente.

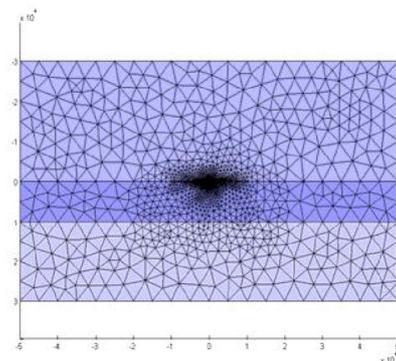
Após a criação da malha, já se pode aplicar o método dos EF. Porém, um modelo 2D usado em geofísica normalmente está associado a uma malha de EF com muitos nós (entre 2000 e 20000 nós, ou até mais, dependendo de fatores como o modelo, o método geofísico ou a frequência utilizada). Para se fazer uma modelagem pelo método dos EF, é preciso resolver um sistema de equações lineares cujo número de variáveis é de pelo menos uma ou duas vezes o número de nós da malha (número de graus de liberdade). Assim, torna-se necessário diminuir a banda da matriz de EF, com o objetivo de consumir menos memória e tempo

computacional para solucionar o sistema de equações lineares eficientemente. Logo, para diminuir a banda da matriz, aplicamos algoritmo Cuthill-McKee (Cuthill and McKee, 1969), o qual proporciona uma significativa redução na banda da matriz. Nos testes que fizemos para malhas usadas em modelos geofísicos, constatamos que a banda da matriz foi reduzida para valores entre 2% e 12% do valor original.

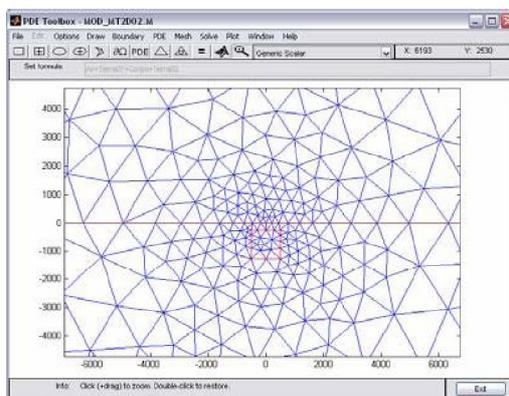
Após o cálculo dos campos potenciais pelo método dos EF, é necessário calcular as derivadas numéricas destes campos, para que, posteriormente, alcancemos os parâmetros desejados (no caso do método MT, os parâmetros são a Resistividade aparente e a Fase). Para malhas não-estruturadas, o cálculo das derivadas numéricas não é tão simples como no caso das malhas estruturadas, pois os nós vizinhos dificilmente estão alinhados na horizontal ou na vertical (condição necessária para o cálculo das derivadas parciais). Além do mais, a grande variação dos campos na interface



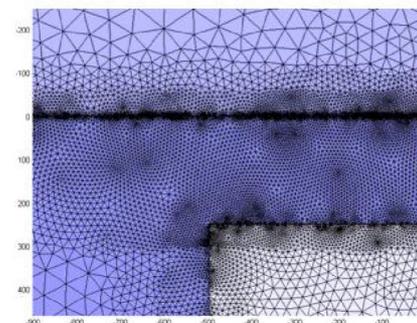
(a)



(a)



(b)



(b)

Figura 1 – Malha inicial gerada pelo *toolbox* *pdedtol* do MATLAB. A figura (a) mostra a malha por completo, e a figura (b) mostra um zoom na região do corpo. As linhas vermelhas separam os meios de propriedade física diferente.

Figura 2 – Refinamento da malha apresentada na Figura 1. A figura (a) mostra a malha por completo, e a figura (b) mostra um zoom na região do corpo. Cada cor representa um meio com uma determinada propriedade física.

entre os meios torna mais instável o cálculo das derivadas numéricas. Assim, para determinar estas derivadas, precisamos interpolar os campos nas proximidades do ponto de derivação. Para isso, identificamos os elementos vizinhos aos nós onde desejamos calcular as derivadas (normalmente os nós da interface entre dois meios), e interpolamos os valores dos campos nos elementos que contêm os pontos escolhidos para calcular as derivadas.

Resultados

A validação de nossos programas será feita através do método magnetotelúrico modo TE. Para tanto, vamos usar as respostas de três modelos. O modelo 1 foi retirado de Rijo (2008), e contém um corpo e camadas estratificadas horizontalmente. O modelo 2 e o modelo 3 apresentam topografia e foram retirados de Wannamaker et al. (1986), sendo que o modelo 2 contém dois meios e um vale, e o modelo 3 contém dois meios e uma rampa.

O modelo 1, apesar de não apresentar topografia, serve para validar os programas de geração e refinamento de malhas de EF, além de ajudar a calibrar a rotina que calcula as derivadas numéricas. A Figura 3 mostra o modelo 1, cuja malha correspondente está ilustrada na Figura 2. A malha não-estruturada de EF usada para este modelo contém 25596 nós, aproximadamente o mesmo número de nós da malha estruturada usada para o mesmo modelo (24511 nós). O valor da semi-banda da matriz de EF gerada pela malha não-estruturada antes da re-numeração dos nós seria de 25569, e após a re-numeração cai para 584 (cerca de 2,28% da semi-banda original), mas que ainda é alta em relação à semi-banda da matriz gerada pela malha estruturada, cujo valor é 129 (quase cinco vezes menor). Este é um dos preços a se pagar para se usar uma malha mais flexível, pois há um aumento significativo na memória e no tempo computacional requeridos para se fazer a modelagem.

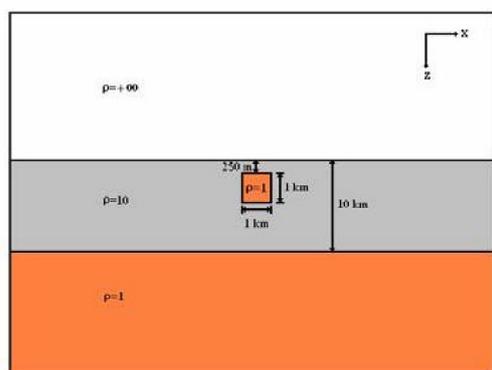


Figura 3 – Ilustração do Modelo 1. O modelo é composto por três camadas e um corpo. A primeira (ar), segunda e terceira camadas apresentam resistividades iguais à infinito, 10 $\Omega \cdot m$ e 1 $\Omega \cdot m$, respectivamente. O corpo apresenta resistividade igual a 1 $\Omega \cdot m$. A segunda camada tem 10 km de espessura. O corpo tem 1 km tanto de

espessura quanto de largura, e está a 250 m de profundidade.

A Figura 4 mostra um perfil do campo E_y calculado por EF, comparando os resultados obtidos usando-se uma malha estruturada com os obtidos usando-se uma malha não-estruturada (a frequência usada é de 10 Hz.). Nela, podemos verificar a validade dos programas usados para refinar a malha e re-numerar os nós da mesma (com o objetivo de reduzir a banda da matriz de EF), já que os campos calculados com os dois tipos de malha coincidem.

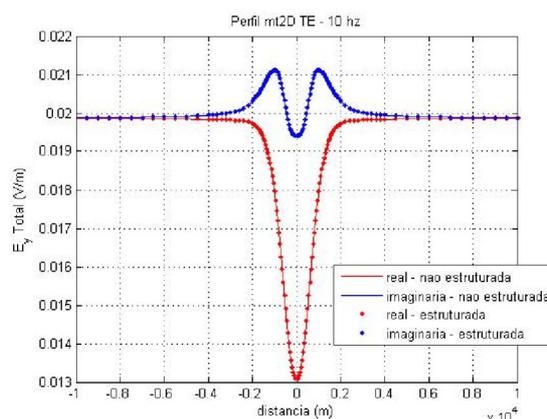


Figura 4 – Comparação entre os campos E_y calculados com a malha estruturada (pontos) e com a malha não-estruturada (linhas). A cor vermelha representa a parte real do campo, enquanto que a cor azul representa a parte imaginária. A frequência usada é de 10 Hz.

A Figura 5 e a Figura 6 representam, respectivamente, perfis dos campos H_x e H_z secundários. Os campos são calculados a partir das derivadas do campo E_y (Volakis et al., 1998). Nestas figuras podemos verificar a validade da rotina usada para calcular derivadas numa malha não-estruturada, já que os valores obtidos com os dois tipos de malha coincidem. Vale a pena ressaltar que em malhas estruturadas o cálculo de derivadas numéricas é bem mais simples, já que os nós vizinhos estão alinhados e o valor do campo utilizado para isso não é interpolado.

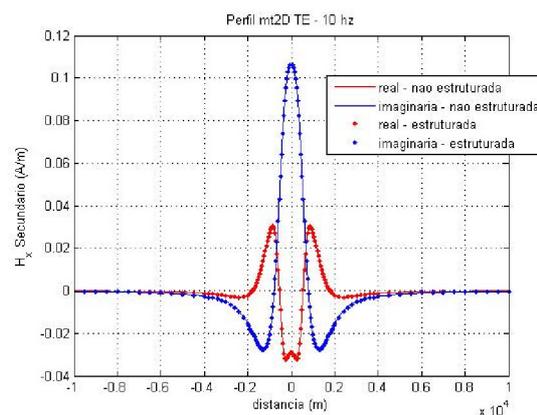


Figura 5 – Comparação entre os campos H_x secundários calculados com a malha estruturada (pontos) e com a malha não-estruturada (linhas). A cor vermelha representa a parte real do campo, enquanto que a cor azul representa a parte imaginária. A frequência usada é de 10 Hz.

Já nas malhas não-estruturadas a precisão no cálculo dos campos próximo das interfaces entre os meios torna-se mais difícil, pois nesta região o campo sofre maior variação, e ainda é preciso interpolar o campo nos pontos usados para calcular as derivadas. malha não-estruturada (linhas).

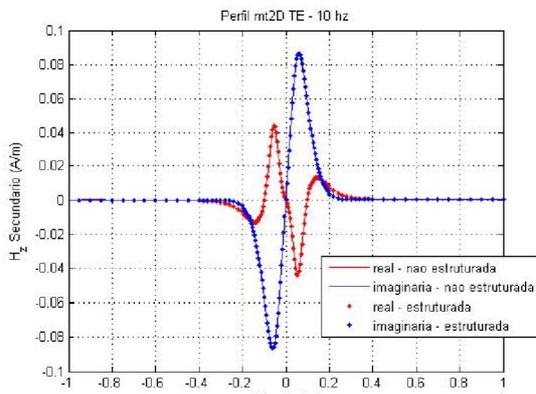


Figura 6 – Comparação entre os campos H_z secundários calculados com a malha estruturada (pontos) e com a malha não-estruturada (linhas). A cor vermelha representa a parte real do campo, enquanto que a cor azul representa a parte imaginária. A frequência usada é de 10 Hz.

A Figura 7 mostra o modelo 2, o qual é composto por dois meios, e apresenta uma topografia em forma de vale, com 4.5 km de comprimento e 1 km de profundidade.

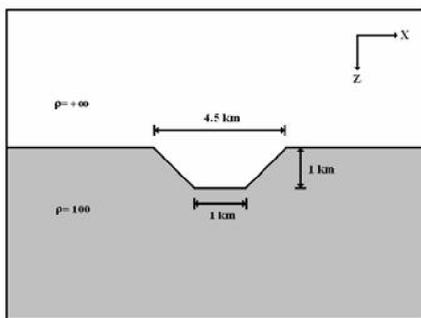
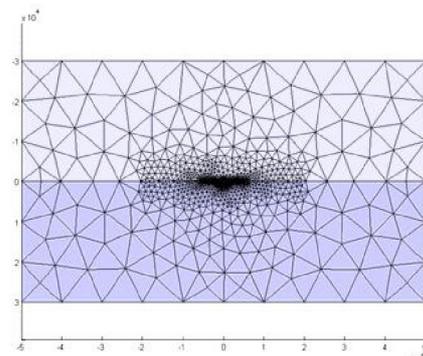
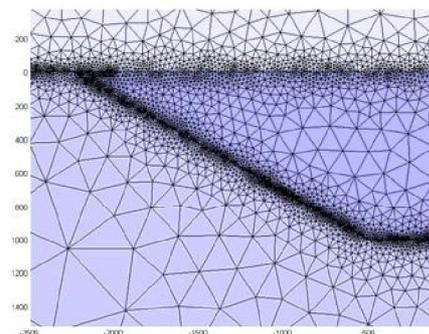


Figura 7 – Ilustração do modelo 2. O modelo é composto por dois meios e apresenta uma topografia em forma de vale. O vale tem 4.5 km de comprimento e 1 km de profundidade. As resistividades dos meios são infinito (ar) e 100 $\Omega \cdot m$.

A Figura 8 mostra a malha usada na modelagem. Na Figura 8 (a) temos uma visão da malha inteira, e na Figura 8 (b) temos uma visão ampliada do lado esquerdo do vale. Nesta figura identificamos três meios diferentes, mas dois deles (no ar e na região do vale) têm a mesma resistividade. Nota-se que a malha é mais refinada na região onde há maior variação do campo E_y (região da interface entre os meios com contraste de resistividade), e que também é a região onde são feitas as medidas dos campos e, conseqüentemente, é a região onde serão calculadas as derivadas. A Figura 11 mostra os perfis de resistividade aparente do modelo 2 (Figura 7), para as frequências 2 e 50 Hz. Os perfis podem ser comparados com os resultados de Wannamaker et al. (1986), de onde pode-se verificar o grau de confiança de nossos programas.



(a)



(b)

Figura 8 – Malha de EF usada para o modelo 2. A figura (a) mostra a malha por completo, e a figura (b) mostra um zoom em parte da região do vale. Cada cor representa um meio com uma determinada propriedade física (a propriedade física pode ser a mesma para meios diferentes).

Nosso último modelo está ilustrado na Figura 9, o qual é composto por dois meios, e apresenta um relevo topográfico em forma de rampa com 3 km de largura e 1.2 km de profundidade. A Figura 10 mostra a malha usada para se fazer esta modelagem. Os mesmos comentários feitos acima para o modelo 2, com relação às resistividades dos meios, regiões de refinamento,

regiões de maior variação dos campos e cálculos de derivadas, são válidos aqui também. A Figura 12 mostra os perfis de resistividade aparente do modelo 3, para as frequências 1 e 30 Hz. Assim como no modelo 2, os resultados podem ser comparados com os de Wannamaker et al. (1986), de onde verifica-se, mais uma vez, o mesmo grau de confiança de nossos programas.

Para finalizar, vamos fazer uma breve análise nos resultados apresentados na Figura 11 e na Figura 12. Em ambas as figuras, verifica-se que os efeitos de topografia são evidentes, e dependem da frequência utilizada. Verifica-se também, que nos pontos onde a variação da topografia é mais brusca, a variação na resistividade aparente também é mais brusca. Nos intervalos onde a topografia é mais suave, a variação na resistividade aparente também é mais suave, como é descrito para outros modelos em Wannamaker et al. (1986).

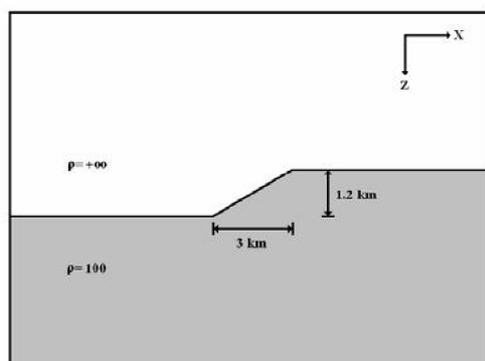
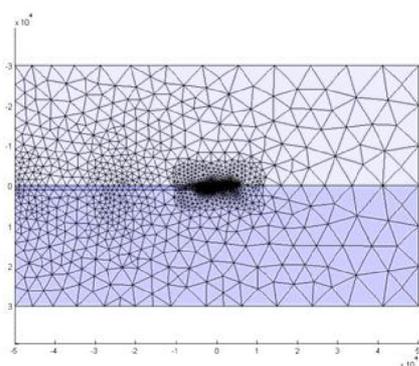


Figura 9 – Ilustração do modelo 3. O modelo é composto por dois meios e apresenta uma topografia em forma de rampa. A rampa tem 3 km de comprimento e 1.2 km de profundidade. As resistividades dos meios são infinito (∞) e 100 Ω .m.

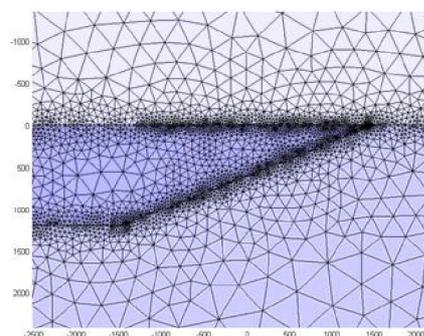


(a)

Conclusões

A modelagem numérica por elementos finitos de dados geofísicos elétricos e eletromagnéticos para modelos que apresentam topografia, não é tão simples quanto a usada para modelos sem topografia. É preciso levar em conta

fatores como o tipo de malha de EF usado, métodos para diminuir o custo computacional da modelagem (memória e tempo de processamento), e métodos para garantir a confiabilidade das respostas dos modelos.



(b)

Figura 10 – Malha de EF usada para o modelo 3. A figura (a) mostra a malha por completo, e a figura (b) mostra um zoom do lado esquerdo da rampa. Cada cor representa um meio com uma determinada propriedade física (a propriedade física pode ser a mesma para meios diferentes).

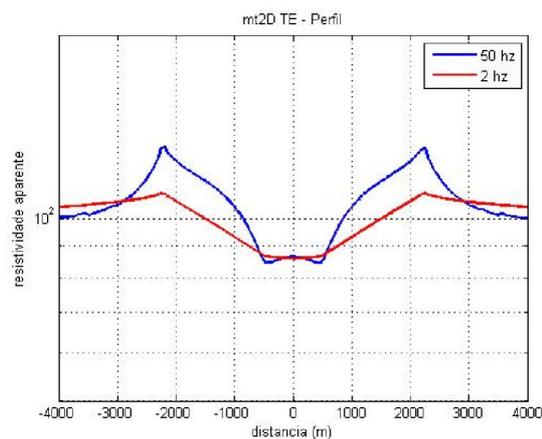


Figura 11 – Perfil de resistividade aparente do modelo 2. A linha azul representa o perfil para a frequência de 50 Hz, enquanto que a linha vermelha representa o perfil para a frequência de 2 Hz.

Neste trabalho, usamos três modelos para calibrar e validar nossos programas para modelagem com topografia. O método geofísico usado na calibração foi o MT 2-D modo TE. Através do modelo 1, já pudemos constatar que os programas para refinamento de malhas de EF, redução da banda da matriz de EF, e cálculo de derivadas numéricas para malhas não-estruturadas estão

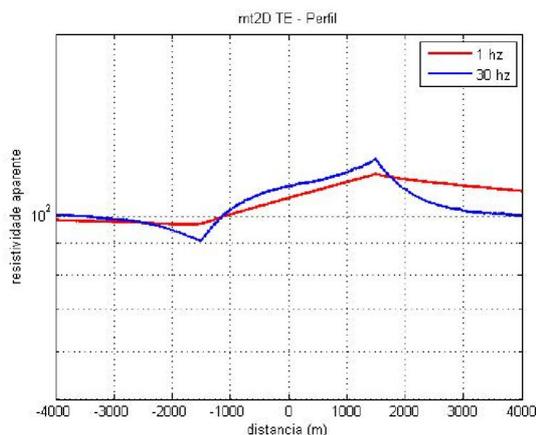


Figura 12 - Perfil de resistividade aparente do modelo 3. A linha azul representa o perfil para frequência 30 Hz e a vermelha 1Hz.

funcionando corretamente. Constatamos também que não houve um aumento significativo no número de nós da malha não-estruturada em relação ao da malha estruturada, entretanto, a banda da matriz de EF, apesar da redução substancial, ainda é maior que a banda da matriz da malha estruturada. Através dos modelos 2 e 3, pudemos mostrar a flexibilidade da malha não-estruturada, e seu ajuste a modelos mais complexos, tais como os que apresentam topografia. Pôde-se verificar também a coerência das respostas calculadas para modelos com topografia, além de validar nossos programas.

Foram feitos muitos outros testes semelhantes a esses e todos forneceram ótimos resultados. Então, podemos concluir que nossos programas estão devidamente calibrados para a análise de efeitos de topografia. A etapa seguinte será a análise de efeitos da batimetria nos dados mCSEM.

Agradecimentos

Este trabalho teve o suporte do Programa de Recursos Humanos da ANP – PRH - 06, através da manutenção do PROEM (Laboratório de Processamento Eletromagnético) e na concessão de bolsas, do primeiro autor (R.E.C.), bolsista de doutorado, e do segundo autor (L.R.) bolsa de professor visitante. Os autores agradecem também ao Curso de Pós-Graduação em Geofísica – UFPA.

Referências

Balde, E., 2000. Refinamento adaptativo de malhas 2D e 3D para solução numérica de problemas de propagação eletromagnética. Tese de Doutorado – UNICAMP.

Borouchart, H. and George, P. L., 1997. Aspects of 2-D Delaunay mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40: 1957-1975.

Cuthill, E. and McKee, J., 1969. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices In *Proc. 24th Nat. Conf. ACM*, pages 157-172.

Filho, M. R., 2002. Geração automática e adaptativa de malhas para elementos finitos 2D com aplicações em eletromagnetismo. Tese de Doutorado – UFPA/CT/PPGEE.

Key, K. & Weiss, C., 2006. Adaptive finite-element modeling using unstructured grids: The 2D magnetotelluric example. *Geophysics*, 71: G291-G299.

Li, Y. & Constable, S., 2007. 2D marine controlled-source electromagnetic modeling: Part 2 — The effect of bathymetry. *Geophysics*, 72: WA63–WA71.

MATLAB, 1999. The language of technical computing, Version 5.3.010183 (R11), Math Works Inc.

Rijo, L., 2001. " Teoria dos Métodos Eletromagnético I, II e III". UFPA, Departamento de Geofísica. (www.rijo.pro.br, acesso: maio 2008)

Volakis, J. L., Chatterjee, A. & Kempel, L. C., 1998. Finite Element Method for Electromagnetics. IEEE Press: New York.

Wannamaker, P. E., Stodt, J. A. & Rijo, L., 1986. Two-dimensional topographic responses in magnetotellurics modeled using finite elements. *Geophysics*, 51: 2131-2144.