



## Critérios de Seleção de Valores Singulares em Tomografia Linearizada de Tempos de Trânsito

Caio Jean Matto Grosso da Silva\*, IGEO/UFBA e Amin Bassrei, IF/CPGG/UFBA.

Copyright 2008, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica

*Este texto foi preparado para a apresentação no III Simpósio Brasileiro de Geofísica, Belém, 26 a 28 de novembro de 2008. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do III SimBGF, mas não necessariamente representa a opinião da SBGf ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGf.*

### Abstract

Inverse problems are in general ill-posed, in such a way that we have to deal with the aspects of existence, uniqueness and stability. When using the well known singular value decomposition we face the problem of small singular values, that should be avoided in the construction of the pseudo-inverse matrix. We propose here a new methodology for the optimum selection of singular values. This methodology is based on the behaviour of the singular values decay, the RMS error for data parameters, the RMS error for model parameters, the model parameters energy and the model parameters entropy. We applied this methodology in linearized seismic travelttime tomography, where the simulations with synthetic data provided good results.

### Introdução

A tomografia foi inicialmente aplicada em imageamento médico e testes não-destrutivos, mostrando-se hoje adequadas às prospecções geofísicas. Trata-se de um tipo especial de problema inverso que pode ser formulado através de um sistema linear. O presente trabalho trata da tomografia de tempos de trânsito, assim definida, pois utiliza como dado de entrada os tempos de trânsito observados entre as fontes e os receptores. Os valores de tempos de trânsito constituem o vetor parâmetro de dado. A matriz utilizada contém os coeficientes utilizados no sistema linear e estes representam a geometria que o raio descreve no meio. Como parâmetro de saída tem-se a vagarosidade estimada da subsuperfície.

Entretanto, no contexto deste trabalho, a tomografia de tempos de trânsito não é um problema linear, ou seja, o caminho do raio depende da vagarosidade. Torna-se, então, imprescindível uma linearização para contornar este problema. O caso linear foi tratado por Silva (2008).

Para determinarmos a solução do problema é indispensável a existência da inversa da matriz que

contém os comprimentos dos raios. Entretanto, se esta não for quadrada e/ou não possuir posto completo, não possuirá uma inversa associada, então, torna-se necessário o emprego de uma metodologia que possa determinar uma aproximação da matriz inversa quando o problema estiver englobado por um destes casos, o que é bastante comum na geofísica. O procedimento inverso recorre à decomposição por valores singulares (SVD) (Noble & Daniel, 1982) que permite o cálculo de uma aproximação da matriz inversa. Entretanto, a metodologia utilizada traz consigo a indesejável presença de pequenos valores singulares que comprometem a solução do sistema. Para contornar este problema utilizou-se uma quantidade ótima de valores singulares que descartaria os valores de baixa amplitude a fim de se estimar um modelo o mais próximo possível da realidade.

O objetivo deste trabalho é de se encontrar critérios válidos que possam ser utilizados para se filtrar pequenos valores singulares em tomografia de tempos de trânsito. Os critérios abordados foram: (1) comportamento da amplitude do valor singular; (2) comportamento da derivada do valor singular; (3) erro entre os parâmetros de dado; (4) erro entre os parâmetros de modelo; (5) energia do parâmetro de modelo estimado; e (6) entropia do parâmetro de modelo estimado.

### Metodologia/ Problema Investigado

A tomografia sísmica é um tipo especial de problema inverso onde podemos estimar uma função a partir de uma integral de linha. Utilizando uma notação matricial podemos escrever o mesmo problema inverso como:

$$\vec{s}_{ver} = G^+ \vec{t}_{obs},$$

onde  $\vec{t}_{obs}$  é o vetor de tempo observado,  $G^+$  é a inversa da matriz que contém as distâncias que os raios percorrem no modelo, obtida a partir do traçado de raios curvos e  $\vec{s}_{ver}$  é o vetor da vagarosidade verdadeira do meio.

Contudo, se a matriz  $G$  (matriz contendo o caminho percorrido pelos raios curvos) não for quadrada e/ou não possuir posto completo, não possuirá uma matriz inversa

associada. Este problema pode ser resolvido utilizando a metodologia SVD.

O SVD   um tipo de fatora o na qual podemos escrever uma matriz  $A$  como produto de outras três matrizes, dada por:

$$A = U\Sigma V^T,$$

onde  $U$  e  $V$  são matrizes ortonormais e  $\Sigma$    uma matriz diagonal que cont m os valores singulares da matriz  $A$ . Podemos determinar uma inversa associada por:

$$A^+ = V\Sigma^+U^T,$$

onde  $A^+$    a matriz pseudo-inversa de  $A$ . Contudo, a matriz inversa será tão boa quanto melhor for a escolha da quantidade de valores singulares utilizados para ger la, pois, a tomografia se enquadra como um problema mal-posto, e um dos fatores que leva ao mal condicionamento do problema   a sua instabilidade, definida pelo número de condi o (NC) dado pela razão entre o maior e o menor valor singular, sendo que o problema   mais instável quanto maior for seu número de condi o, sendo, então, necessário uma sele o criteriosa da quantidade de valores singulares que irão compor a matriz pseudo-inversa.

Para tanto, foram utilizados seis cr terios. Os cr terios (1) e (2), abordados na introdu o, sugerem a sele o do valor singular a partir do comportamento de sua amplitude e sua derivada. Os demais cr terios possibilitam uma sele o a partir do parâmetro estimado, sendo determinados pelas fun es: (3) erro entre os parâmetros de dado; (4) erro entre os parâmetros de modelo; (5) energia do parâmetro de modelo estimado; e (6) entropia do parâmetro de modelo estimado.

O erro entre os parâmetros de dado   obtido por:

$$E_d = \sum_{i=1}^M \frac{\sqrt{(t_i^{obs} - t_i^{cal})^2}}{M},$$

onde  $t_i^{obs}$  e  $t_i^{cal}$  são os  $i$ -ésimos tempo observado e calculado respectivamente. O erro entre os parâmetros de modelo são dados por:

$$E_m = \sum_{i=1}^N \frac{\sqrt{(s_i^{ver} - s_i^{est})^2}}{N},$$

onde  $s_i^{ver}$  e  $s_i^{est}$  são as  $i$ -ésimas vagarosidade verdadeira e estimada respectivamente. A energia do modelo estimado   calculada por:

$$E = \sum_{i=1}^N (s_i^{est})^2.$$

Assim como a energia do modelo estimado a entropia representa t mbe m a estabilidade do modelo escolhido, podendo ser definida por:

$$H = \sum_{i=1}^N s_i^{est} \log \frac{1}{s_i^{est}},$$

onde  $H$    a entropia do modelo estimado.

Porém, temos ainda que o raio ao percorrer um meio homogêneo comporta-se como sendo reto, no entanto ao se percorrer meios em que existem contrastes de velocidades o novo caminho percorrido por ele será curvo. Para que fosse possível saber onde e quanto o raio se encurvaria seria necessário conhecer a distribui o do campo de velocidades em subsuperfície que neste caso   o parâmetro a estimar, logo, temos uma não-linearidade do problema.

Uma forma de se contornar este problema   realizando-se uma lineariza o que pode ser feita a partir de um procedimento iterativo, dado por:

$$\Delta \vec{t}_i = A \Delta \vec{s}_i,$$

onde  $\Delta \vec{t}_i$    o vetor da diferença entre o tempo observado e o calculado na itera o  $i$ ,  $A$    a matriz obtida pelo traçado de raio na mesma itera o e  $\Delta \vec{s}_i$    o vetor de atualiza o para nova vagarosidade, obtida por:

$$\Delta \vec{s}_i = A^+ \Delta \vec{t}_i,$$

onde  $A^+$    uma aproxima o da matriz inversa de  $A$ . A nova vagarosidade considerada será definida por:

$$\vec{s}_{i+1} = \vec{s}_i + \Delta \vec{s}_i.$$

Logo, a partir do modelo inicial realiza-se o traçado de raio (problema direto) depois   feita uma inversão, com os resultados da inversão realiza-se um novo traçado de raio e assim sucessivamente até que se chegue a um modelo aceitável.

## Resultados

A Figura 1 representa o modelo sint tico utilizado para a realiza o das simula es numéricas. A utiliza o de dados sint ticos se mostra necessária para que se possa validar a metodologia de sele o de valores singulares e os cr terios abordados. Pois, para dados reais não seria possível avaliar a metodologia empregada uma vez que o que realmente há em subsuperfície   desconhecido.

O modelo foi discretizado em 30 blocos na dire o horizontal e 30 na dire o vertical, contabilizando 900 blocos. A aquisi o dos dados foi do tipo poço a poço, onde foram locados 30 fontes no poço   esquerda e 30 receptores no poço da direita, totalizando 900 raios. Assim, a matriz que cont m os caminhos dos raios   da ordem de 900x900.

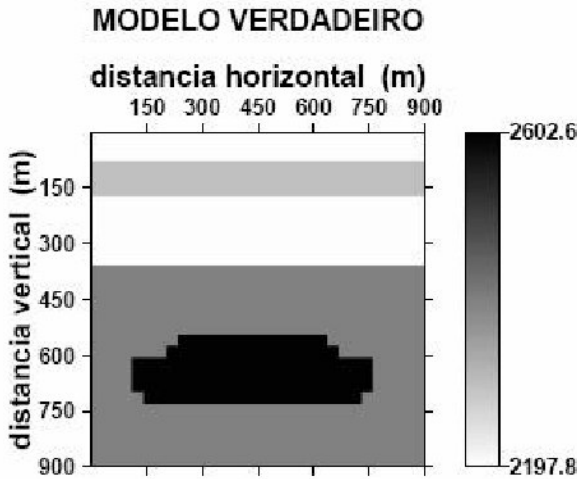


Figura 1 – Modelo verdadeiro

O meio possui três campos de velocidade, o primeiro com velocidade de 2200 m/s, região mais clara, o segundo com velocidade de 2400 m/s e o terceiro com velocidade de 2600 m/s, região mais escura. O modelo inicial utilizado foi um modelo homogêneo com velocidade de 2400 m/s, desta forma, os raios que assumiremos percorrer o meio, para a primeira iteração, serão retos, o que não é verdade. Logo, além da velocidade do modelo ser diferente temos também que os raios percorrerão caminhos diferentes.

Para o traçado de raios foi utilizado o programa desenvolvido por Schots (1990), este por sua vez baseado no trabalho de Anderson & Kak (1982).

O primeiro passo da iteração formou uma matriz composta de raios retos, devido à homogeneidade considerada para o modelo, a partir do traçado de raios. Posteriormente realizou-se o processo inverso, nesta parte da iteração foi montada uma matriz inversa para diferentes quantidades de valores singulares, começando com 1 e com variação de 1 até o limite de 900 valores singulares. Para cada uma das novecentas inversões foi calculado: erro entre os parâmetros de modelo, erro entre os parâmetros de dados, energia do modelo estimado e entropia do modelo estimado.

Além desses critérios, foi gerado uma curva da amplitude do valor singular e uma curva da derivada do valor singular.

As Figuras 2 e 3 mostram, respectivamente, a curva do comportamento da amplitude do valor singular e da derivada do valor singular, ambas representadas em escala mono-logarítmica, que mostram uma grande deflexão na região do octocentésimo valor singular. Portanto, as curvas mostraram-se como indicadoras da localização de pequenos valores singulares.

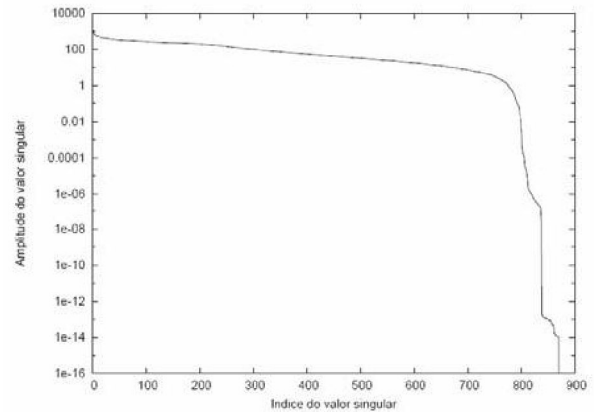


Figura 2 – Curva dos valores singulares em escala mono-log

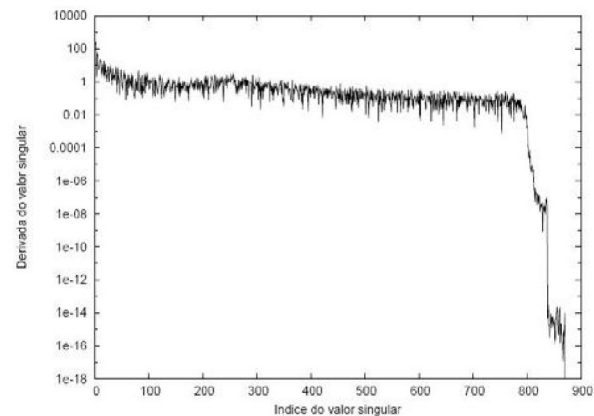


Figura 3 – Curva da derivada do valor singular em escala mono-log

Para se avaliar a influência do número de valores singulares, no erro dos parâmetros de modelo, no erro dos parâmetros de dados, na energia dos parâmetros de modelo, e na entropia dos parâmetros de modelo, foram gerados os gráficos mostrados, respectivamente, nas Figuras 4, 5, 6 e 7.

A curva do erro do modelo mostra que a região em que o modelo estimado possui uma maior aproximação com o real é obtida com 230 valores singulares, esta não pode ser considerada como critério para seleção dos valores, mas permitiu validar os outros três critérios: erro entre os parâmetros de dados, energia para o modelo estimado e entropia para o modelo estimado, ou seja, eles indicaram uma mesma região onde a quantidade de valores singulares seria ótima.

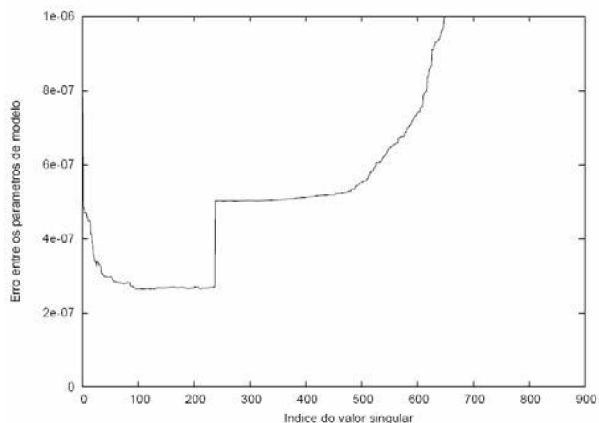


Figura 4 – Erro entre o modelo verdadeiro e estimado

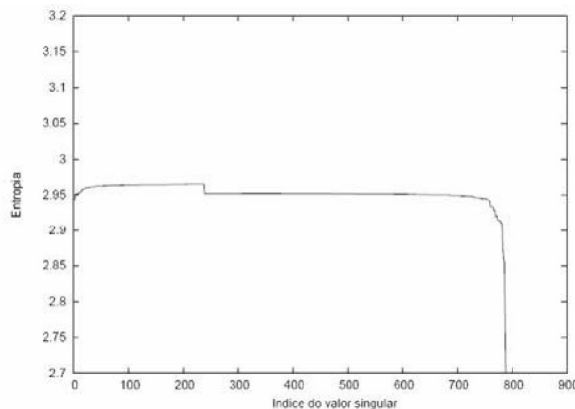


Figura 7 – Curva da entropia do modelo

A Figura 8 mostra o modelo estimado com 230 valores singulares, escolhidos a partir das curvas do erro entre os parâmetros de dado, energia do modelo estimado e entropia do modelo estimado. Sendo que os valores de vagarosidade obtidos para o modelo não sofreram filtragem ou suavização.

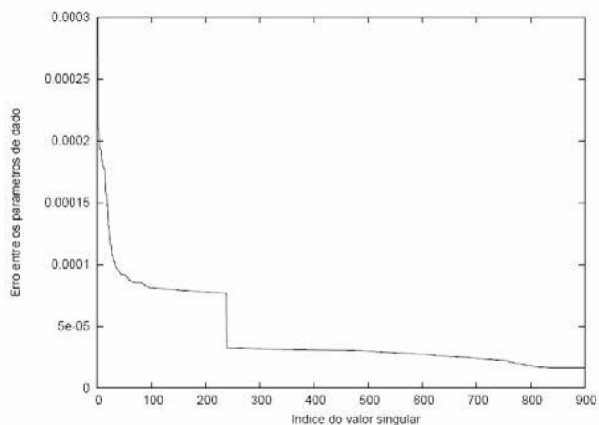


Figura 5 – Erro entre o tempo observado e calculado

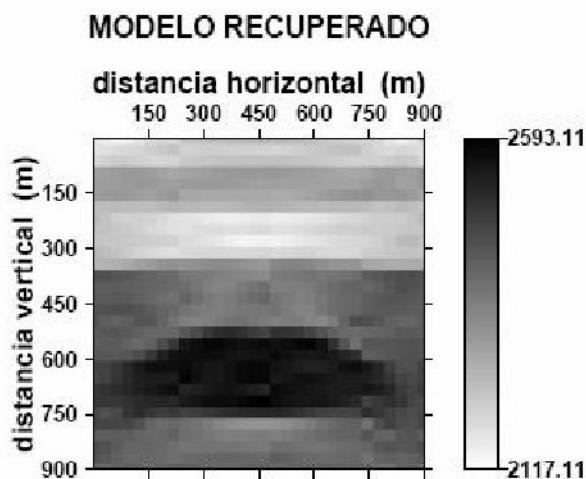


Figura 8 – Modelo estimado na primeira iteração

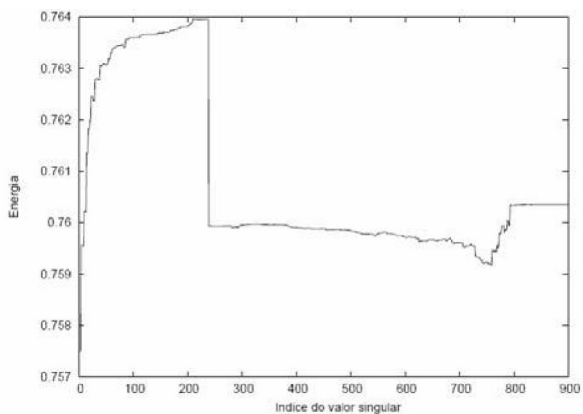


Figura 6 – Curva da energia do modelo

Os valores de velocidades obtidos após a primeira iteração foram utilizados para o próximo traçado de raio onde se inicia a segunda iteração. Com os dados obtidos após a modelagem direta, repetiu-se o procedimento inverso.

As Figuras 9, 10, 11 e 12 representam, respectivamente, o erro entre os parâmetros do modelo, o erro entre os parâmetros dos dados, a energia do modelo, e, a entropia do modelo, para a segunda iteração.

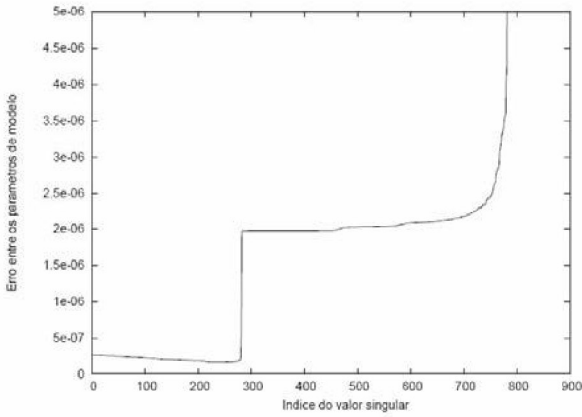


Figura 9 – Erro entre o modelo verdadeiro e estimado

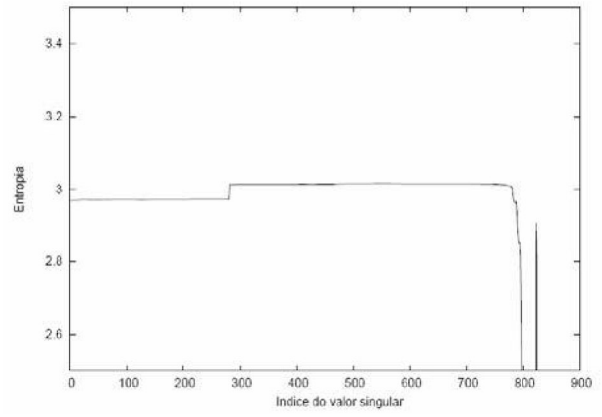


Figura 12 – Curva da entropia do modelo

A Figura 13 representa o modelo recuperado após a segunda iteração obtido com 280 valores singulares.

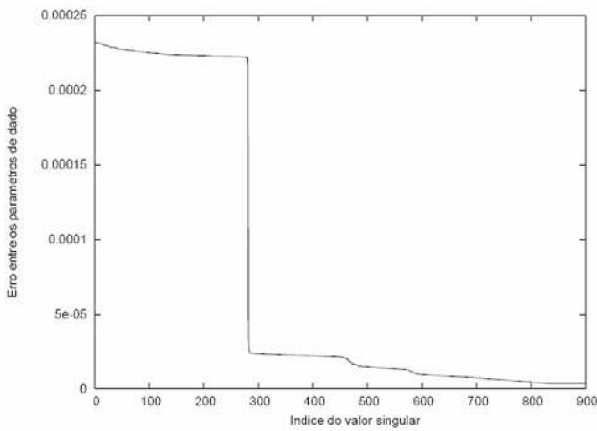


Figura 10 – Erro entre o tempo observado e calculado

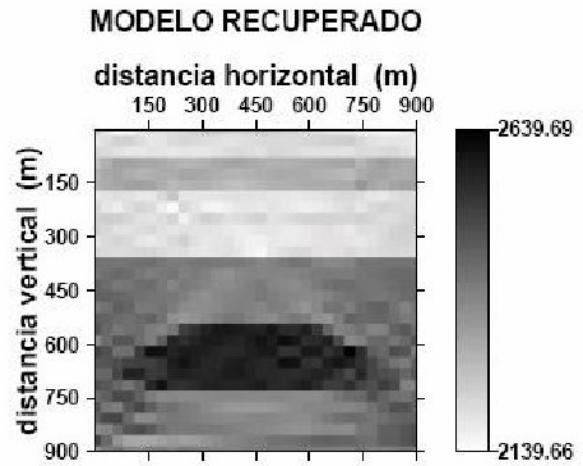


Figura 13 – Modelo estimado na segunda iteração

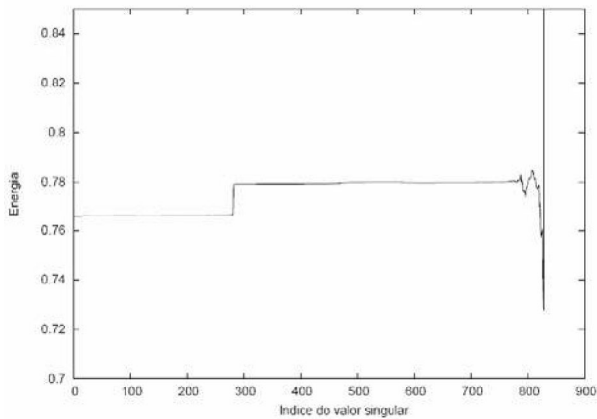


Figura 11 – Curva da energia do modelo

**Discussão e Conclusões**

A tomografia de tempos de trânsito é um problema inverso considerado mal-posto, na tentativa de amenizar este mal-condicionamento e obter uma solução satisfatória utilizamos uma metodologia criteriosa de corte de valores singulares.

Os resultados obtidos para a primeira e a segunda iteração, permitiram validar a metodologia de aplicação de valores singulares selecionados na tomografia de tempos de transitos. Contudo, não somente os pequenos valores singulares, como valores singulares considerados relativamente altos, tiveram que ser descartados na inversão para que se fosse possível uma boa representação do modelo.

Os critérios de seleção: (1) comportamento do valor singular e (2) comportamento da derivada do valor singular não se mostraram adequados à escolha do valor singular, uma vez que as deflexões de suas curvas indicam uma região de corte com apenas pequenos valores singulares, mas foi verificado que valores maiores também deveriam ser desconsiderados.

A curva do erro entre os parâmetros de modelo, não pode ser abordada como critério, pois em um caso real não conhecemos o modelo verdadeiro. Sendo usada somente para que fosse possível validar as metodologias de seleção empregadas.

Os demais critérios de seleção de valores singulares abordados: (3) erro entre os parâmetros de dado, (5) energia do modelo estimado e (6) entropia do modelo estimado; mostraram-se válidos, pois indicaram uma mesma região de ponto de corte.

É importante destacar que no critério (3) erro entre os parâmetros de dado, o objetivo não é encontrar um menor erro entre os dados, uma vez que o problema pode está englobado pela não-unicidade e sim se encontrar uma região anômala, indicando uma alta variação nos parâmetros do modelo estimado. Os critérios de energia do modelo e entropia do modelo mostraram uma região com variação na sua estabilidade, para as duas iterações, indicando o ponto de corte.

Enfim, pôde-se concluir que os resultados obtidos, foram satisfatórios, uma vez que foi obtido um modelo próximo do verdadeiro a partir de um modelo homogêneo.

Silva, J. N. P. (2008) Critérios de seleção de valores singulares na inversão de dados geofísicos: aplicação em tomografia de tempos de trânsito, Trabalho de Graduação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.

### **Agradecimentos**

Os autores agradecem ao LAGEP/CPGG/UFBA pela utilização dos recursos computacionais. C. J. M. G Silva agradece a FAPESB e ao Convênio UFBA/ANP-PRH 08 pela bolsa de IC. A. Bassrei agradece ao CNPq pelos projetos 484.239/2006-6 (Edital Universal MCT/CNPq 02/2006) e 308.875/2007-9 (Bolsa de Pesquisa).

### **Referências**

Anderson, A. H. and Kak, A. C. (1982). Digital ray tracing in two-dimensional refractive fields. *Journal of Acoustical Society of America*, 72, 1953-1606.

Noble, B. and Daniel, J. W. (1982). *Algebra Linear Aplicada*, University of Wisconsin and University of Texas.

Schots, H. A. (1990) Tomografia sísmica poço a poço e poço a superfície utilizando ondas diretas, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil.