

Solução da equação da onda usando operadores de derivadas espaciais implícitos

Nei D. Figueiredo, Reynam Pestana, LAGEP/CPGG/UFBA e Dan Kosloff, Tel-Aviv University and Paradigm

Copyright 2008, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica Este texto foi preparado para a apresentação no III Simpósio Brasileiro de Geofísica, Belém, 26 a 28 de novembro de 2008. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do III SimBGf, mas não necessariamente representa a opinião da SBGf ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGf.

RESUMO

Um novo esquema para a solução da equação acústica da onda é apresentado. O esquema utiliza operadores de derivadas espaciais implícitos na aproximação das derivadas espaciais de segunda ordem. Neste contexto, apresentamos a geração de seções de tiro comum para avaliar a precisão e estabilidade do novo esquema, mediante comparação com os métodos clássicos de diferenças-finitas e pseudo-espectral. Adicionalmente, realizamos a migração de seções de afastamento nulo, utilizando os mesmos operadores de derivadas espaciais implícitos. Esses experimentos numéricos também mostram que o novo esquema proposto para solução da equação da onda, com operadores implícitos de segunda e quarta ordens, consegue reduzir significativamente a dispersão numérica com relação aos esquemas baseados em diferenças-finitas.

INTRODUÇÃO

A sísmica de reflexão é de crucial importância para o desenvolvimento e avaliação de estudos relacionados à exploração de petróleo. Trata-se de uma ferramenta de elevado potencial investigativo devido à capacidade de mapeamento de diversas estruturas geológicas em subsuperfície, sendo, portanto, vital para identificação de armadilhas estruturais potencialmente capazes de armazenar óleo em diversas profundidades. Como exemplo de armadilha estrutural, podemos citar as intrusões salinas (domos de sal). Neste caso, o trapeamento do óleo pode ocorrer tanto nos flancos como nos sedimentos do pré-sal. Em ambos os casos, por se tratar de problemas de alta complexidade no imageamento, convém realizar modelagem numérica e migração sísmica com vistas à caracterização e mapeamento de estruturas e à geração de seções sísmicas para testar algoritmos que possam resolver uma variedade de problemas na propagação de ondas.

A modelagem consiste na propagação do campo de onda em um modelo de velocidades conhecido. Logo, pode-

mos afirmar que, na modelagem, o campo de ondas é propagado e sismogramas são gerados como resposta do modelo ao pulso propagante. Tais sismogramas são utilizados como entrada para o processo de migração, cujo objetivo é reconstruir o modelo em profundidade a partir de dados sísmicos adquiridos em superfície de aquisição definida previamente.

A solução numérica da equação da onda é rotineiramente usada nesses dois procedimentos. Entretanto, por se tratar de uma equação diferencial parcial de segunda ordem, o sucesso dos procedimentos acima descritos depende do método utilizado para efetuar a aproximação de derivadas presentes na equação da onda. Neste trabalho faremos uma breve exposição do operador implícito (Kosloff et al., 2008) utilizado na aproximação das derivadas espaciais e discutiremos os resultados obtidos com a sua aplicação para modelagem de seções de tiro comum e também na migração de seções de afastamento nulo. A análise da eficiência da aplicação do novo esquema, operadores implícitos, será feita mediante a comparação com resultados obtidos com esquemas baseados em operadores de diferenças-finitas (Alford et al., 1974) e pseudo-espectral (Kosloff and Baysal, 1982).

EQUAÇÃO ACÚSTICA DA ONDA

A equação acústica da onda em coordenadas cartesianas, para o caso bidimensional, é dada por:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

onde $P = P(x, z, t)$ é o campo de onda, $c(x, z)$ é a velocidade do meio, x e z são as coordenadas espaciais e t é o tempo.

A solução da equação escalar da onda é usada na produção de sismogramas sintéticos e na migração de dados sísmicos que serão determinantes na interpretação e exploração sísmica. Entretanto, é bom ressaltar que para que isso seja possível é necessária a existência de um o modelo de velocidades discretizado para que o campo de ondas seja calculado em cada ponto da malha de discretização. Logo, para que tal cálculo seja efetuado, as derivadas parciais presentes na equação da onda devem ser aproximadas mediante utilização de métodos numéricos.

Entre os métodos numéricos mais utilizados podemos citar o método de diferenças-finitas. Tal método efetua a discretização das derivadas parciais mediante truncamento da série de Taylor, permitindo assim que a equação (1) seja reescrita da seguinte maneira:

$$P_{l,k}^{n+1} - 2P_{l,k}^n + P_{l,k}^{n-1} = g[P_{l+2,k}^n + P_{l-2,k}^n]$$

$$\begin{aligned}
 & - 16(P_{l+1,k}^n + P_{l,k+1}^n \\
 & + P_{l-1,k}^n + P_{l,k-1}^n) \\
 & + 30P_{l,k}^n + P_{l-2,k}^n \\
 & + P_{l,k-2}^n] \quad (2)
 \end{aligned}$$

onde

$$g = \frac{-c^2 \Delta t^2}{12h^2}$$

com $\Delta x = \Delta z = h$.

Além disso, convém enfatizar que o primeiro membro da equação (2) é uma aproximação de segunda ordem para a derivada segunda temporal e o termo entre colchetes, do segundo membro na mesma equação, é uma aproximação de quarta ordem para as derivadas espaciais.

Outro método muito utilizado para resolver numericamente a equação da onda é o método pseudo-espectral, também conhecido como método de Fourier. Nesse método é utilizada a propriedade da derivada na transformada de Fourier para o cálculo de derivadas parciais de acordo com a seguinte relação:

$$\frac{\partial^2 F(x)}{\partial x^2} \Leftrightarrow -k_x^2 F(k_x)$$

Logo, podemos reescrever a equação (1), adaptando-a ao método de Fourier, da seguinte maneira:

$$P_{l,k}^{n+1} - 2P_{l,k}^n + P_{l,k}^{n-1} = -c^2 \Delta t^2 F^{-1}[k_x^2 + k_z^2] F P_{l,k}^n, \quad (3)$$

onde F e F^{-1} representam a transformada direta e inversa de Fourier, respectivamente. Portanto, pela equação (3) vemos que o método de Fourier também utiliza os operadores de diferenças-finitas de segunda ordem, mostrados anteriormente, para aproximar a derivada de segunda ordem temporal.

Além destes dois métodos bastante utilizados, outra forma de calcular numericamente as derivadas parciais, na determinação da solução numérica da equação da onda, é através de um novo esquema que descreveremos a seguir. As derivadas espaciais de segunda ordem serão aproximadas usando-se um esquema com operadores de derivadas espaciais, calculados implicitamente.

OPERADORES ESPACIAIS IMPLÍCITOS

Seja um função $P(x)$ contínua. Admitindo-se uma discretização para essa função, podemos estabelecer a seguinte notação:

$$x = jdx \Rightarrow P[j] = P(x = jdx)$$

Assim, pode-se demonstrar que uma aproximação recursiva para a derivada segunda da função $P[j]$ pode ser escrita como (Kosloff et al., 2008):

$$\frac{\partial^2 P[j]}{\partial x^2} = \frac{a_0 + a_1 \Delta_1 + a_2 \Delta_2 + \dots + a_N \Delta_N}{1 + b_1 \Delta_1 + b_2 \Delta_2 + \dots + b_M \Delta_M} P[j], \quad (4)$$

onde $\Delta_k P[j] = P[j + k] + P[j - k]$.

Considerando $M \leq N$, a equação (4) pode ser reescrita de forma equivalente:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 P[j]}{\partial x^2} = & (c_0 + \dots + c_{N-M} \Delta_{N-M} + \frac{d_0}{1 + \beta_0 \Delta_1} + \\
 & + \dots + \frac{d_{M-1}}{1 + \beta_{M-1} \Delta_1}) P[j] \quad (5)
 \end{aligned}$$

Os coeficientes em (5) podem ser relacionados aos coeficientes em (4). A equação (5) é mais conveniente para efeito de cálculo, enquanto a equação (4) é mais adequada para projetar os coeficientes. Os primeiros termos $c_0 + \dots + c_{N-M} \Delta_{N-M}$, formam um operador explícito. Mas cada termo $\frac{d_j}{1 + \beta_j \Delta_1}$ resulta em um sistema tridiagonal de equações.

Os coeficientes a_l e b_l da equação (5) são calculados através de uma ajuste no domínio espectral, de acordo com a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
 -k_L^2 = & a_0 + 2a_1 \cos k_L dx + 2a_2 \cos 2k_L dx + \\
 & + 2a_N \cos Nk_L dx + 2b_1 k_L^2 \cos k_1 dx + \\
 & + 2b_M k_L^2 \cos Mk_L dx + (-1)^L e, \quad (6)
 \end{aligned}$$

onde $L = 1, \dots, N + M + 2$. Enquanto, $a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_M$ são os coeficientes a serem determinados e e é o erro. Os $N+M+2$ componentes de números de onda K_L estão dentro do intervalo $0 \leq k_L < k_{max} < \pi dx$, onde k_{max} é definido pelo usuário.

Na modelagem, como na migração, usamos o operador de derivadas com dois termos no numerador e um termo no denominador, que é dado por:

$$\begin{aligned}
 D_x = & \frac{1}{dx^2} \frac{a_0 + a_1 \Delta_x}{1 + b_1 \Delta_x} \\
 = & A \left(1 + \frac{B}{1 + b_1 \Delta_x} \right) \quad (7)
 \end{aligned}$$

Para avaliar a equação (7) temos que resolver um sistema de equações. A matriz do operador $1 + b_1 \Delta_x$ é tridiagonal. Além disso, desde que a decomposição LU deste operador pode ser pré-calculada, o cálculo da derivada segunda torna-se relativamente rápido.

RESULTADOS

Nesta seção discutiremos os resultados obtidos na realização dos experimentos numéricos descritos anteriormente. Primeiramente, analisaremos os resultados obtidos na modelagem de seções de tiro comum utilizando o modelo do domo de sal da Figura 1, cujos parâmetros usados na modelagem estão dispostos na Tabela 1.

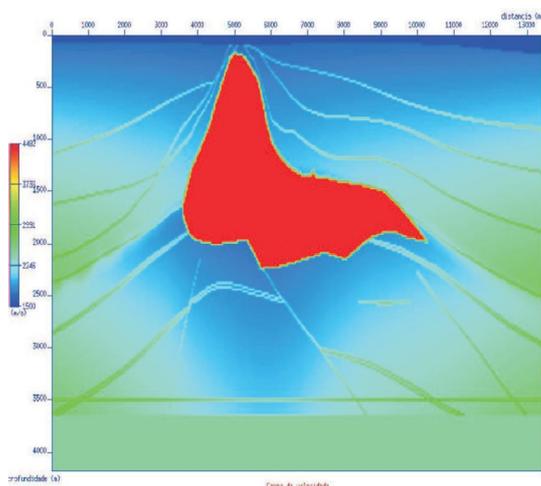


Figura 1: - Modelo de Sal - campo de velocidades

Parâmetros		
amostragem lateral	n_x	338
amostragem vertical	n_z	210
intervalo de amostragem lateral	dx	40
intervalo de amostragem vertical	dz	20

Tabela 1- Parâmetros

Os tiros para a modelagem foram posicionados na coordenada horizontal de 2000 m e profundidade 20 m no modelo do domo salino. A escolha dessa posição para os experimentos ocorreu devido à existência de muitas reflexões na referida região e devido à facilidade proporcionada pelos resultados obtidos na comparação entre as seções de tiro comum geradas. É bom ressaltar que tínhamos posicionado nosso tiro na posição 6000 m do modelo, região do topo do domo do sal, e a 20 m de profundidade, todavia, devido ao alto contraste de velocidade na região, o resultado não nos permitiu uma análise adequada das seções modeladas.

Foram geradas quatro seções de tiro-comum com 1251 amostras temporais, intervalo de amostragem temporal de 4 ms e frequência máxima da fonte de 45-hz. O resultado das modelagens com os operadores de diferenças-finitas de 4ª ordem, operadores implícitos de 2ª e 4ª ordens e com o método pseudo-espectral estão mostrados nas Figuras de 2 a 5, respectivamente. Nota-se uma diminuição sensível da dispersão numérica com o resultado apresentado pelo operador implícito de 4ª ordem (Figura 4).

Além da modelagem, apresentamos os resultados das migrações de uma seção de afastamento nulo. O dado

sintético foi gerado com o módulo de modelagem *Susynlv* - *SYNthetic Linear Velocity* do pacote SU (Seismic Unix). Os operadores utilizados na migração e na modelagem foram os mesmos e as respostas foram interessantes no sentido de validar a aplicação do método implícito em ambos os procedimentos. As seções apresentadas nas Figuras 6, 7 e 8 possuem afastamento entre traços de 10, 20 e 27 metros, respectivamente. Desses resultados, nota-se que mesmo aumentando a distância espacial o método implícito de 4ª ordem ainda apresenta uma dispersão numérica bem menor do que o método de diferenças-finitas de 4ª ordem.

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentado a modelagem e a migração de dados sísmicos, através da solução numérica da equação da onda, utilizando um novo esquema com operadores implícitos. Os resultados obtidos na modelagem de seções de tiro comum para o modelo domo (Figura 1) foram considerados satisfatórios devido à sua equivalência com o pseudo-espectral e à melhor performance em relação ao esquema de diferenças-finitas de quarta ordem. Com respeito à migração das seções de afastamento nulo, o método implícito, tanto de segunda ordem quanto o de quarta ordem, também mostrou-se válido devido à sua equivalência com o método pseudo-espectral semelhantemente à modelagem.

AGRADECIMENTOS

Ao LAGEP (Laboratório de Geofísica de Exploração de Petróleo) pela disponibilização de recursos computacionais para realização dos experimentos e à ANP (Agência Nacional de Petróleo) pelo apoio através de bolsa de estudos (Nei Davi Figueiredo).

REFERÊNCIAS

- Alford, R., Kelly, K. R., and Boore, D., 1974, Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation: *Geophysics*, **39**, 834–842.
- Kosloff, J., and Baysal, E., 1982, Forward modeling by a fourier method: *Geophysics*, **47**, 1402–1412.
- Kosloff, D., Pestana, R., and Tal-Ezer, H., 2008, Numerical solution of the constant density acoustic wave equation by implicit spatial derivative operators: Expanded Abstract, SEG, 2008.

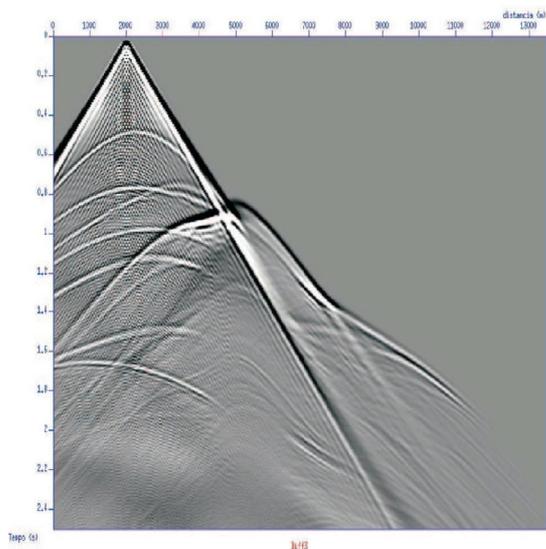


Figura 2: - Resultado da modelagem com operador de diferenças-finitas de 4ª ordem

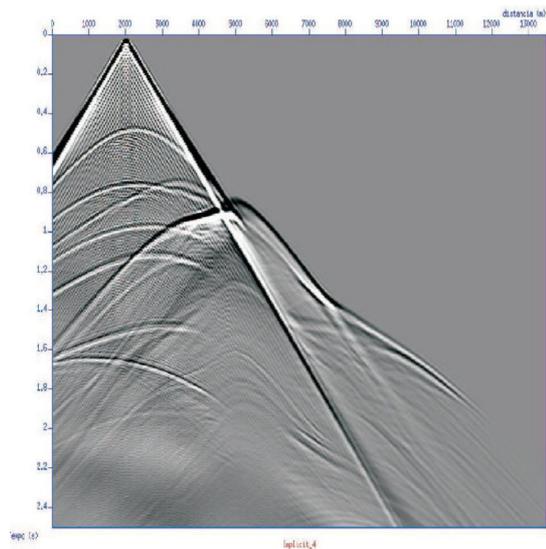


Figura 4: - Resultado da modelagem com operador implícito de 4ª ordem

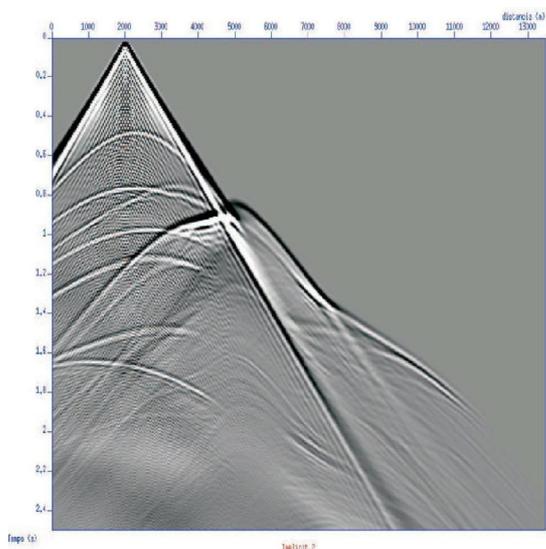


Figura 3: - Resultado da modelagem com operador implícito de 2ª ordem

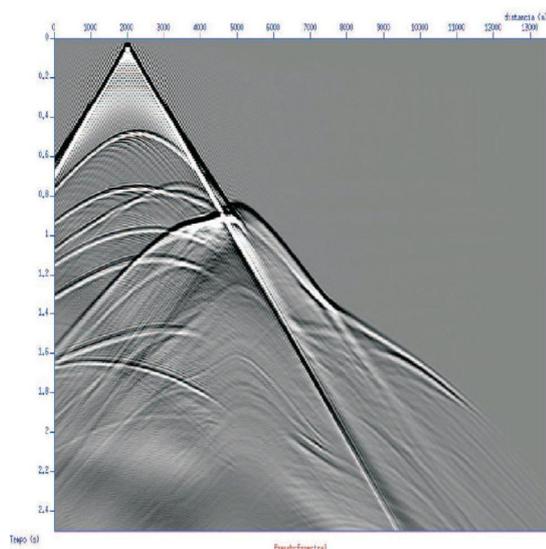


Figura 5: - Resultado da modelagem com o método pseudo-espectral

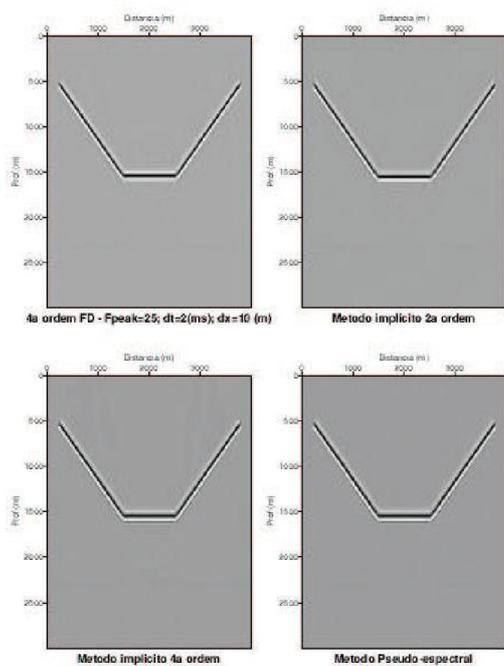


Figura 6: - Resultado da migração de afastamento nulo com $dx = dz = 10m$

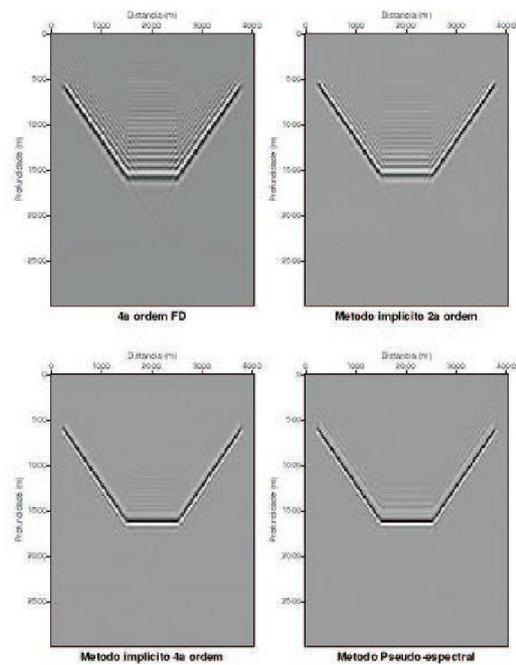


Figura 8: - Resultado da migração de afastamento nulo com $dx = dz = 27m$

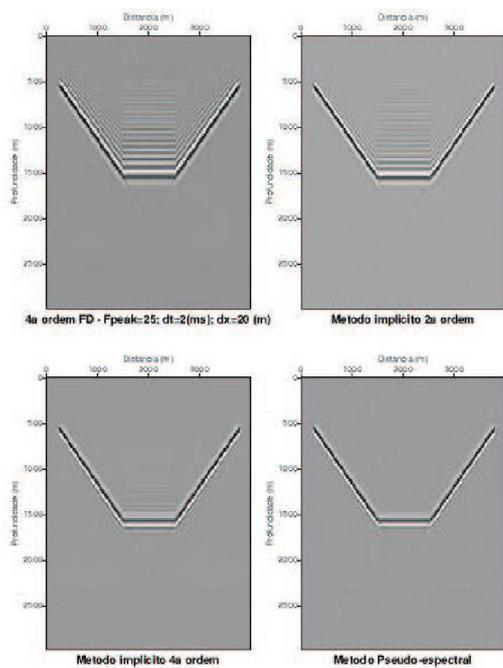


Figura 7: - Resultado da migração de afastamento nulo com $dx = dz = 20m$