

Alguns Aspectos da Lei de Snell em Meios Condutores

Edson Sampaio – CPGG/UFBA, Luiz G. Guimarães – IF/UFRJ.

Copyright 2006, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofisica

Este texto foi preparado para a apresentação no II Simposio de Geofisica da Sociedade Brasileira de Geofisica, Natal, 21-23 de setembro de 2006. Seu conteúdo foi revisado pela Comissão Tecno-cientifica do II SR-SBGf mas não necessariamente representa a opiniao da SBGf ou de seus associados. É proibida a reproducao total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem previa autorizacao da SBGf.

Resumo

Baseados nas equações de Maxwell e Lei de Ohm, mostaremos neste trabalho que em meios condutores a propagação de ondas planas depende de vários fatores tais como, estado de polarização, frequência temporal bem como das relações constitutivas do meio. Analisaremos o problema em duas situações distintas. Em uma primeira etapa, estudaremos o caso de propagação entre os meios ar-solo (dielétrico-condutor) e posteriormente analisaremos a situação na qual uma onda eletromagnética gerada no mar penetra em uma rocha sobreposta a um reservatório contendo hidrocarbonetos.

Palavras-Chave: Condutores, Lei de Snell, Métodos Eletromagnéticos.

Introdução:

Ondas eletromagnéticas (OEM) se propagando em meios condutores é um assunto abordado em vários livros-texto em eletromagnetismo [1, 2, 3]. Em tais meios, uma das características mais marcantes é a atenuação sofrida pela onda ao se propagar. Efeito este que do ponto de vista prático introduz limitações sérias à utilização de OEM como instrumento de sondagem em geofísica aplicada, pois nestes casos os efeitos de condução elétrica são importantes, uma vez que os meios a serem estudados são em geral oceanos, rios, rochas, solos etc..., e possuem condutividades que variam de alguns S/m à centésimos de S/m [4, 5, 6]. Neste trabalho vamos nos deter em estudar como muda a trajetória de uma OEM ao atravessar meios com condutividades distintas e comparar estes resultados com aqueles regidos pelas leis Snell em meios dielétricos. Para tanto, a seguir vamos fazer uma rápida revisão da teoria de propagação de OEM em meios condutores, para posteriormente apresentar e comentar nossos resultados.

Teoria:

Para um meio linear, isotrópico homogêneo satisfazendo a lei Ohm com condutividade σ e possuindo permeabilidade magnética $\mu = \bar{\mu}\mu_0$, permissividade dielétrica $\epsilon = \bar{\epsilon}\epsilon_0$, tem-se que os campos eletromagnéticos \mathbf{E} e \mathbf{H} satisfazem a seguinte equação de onda [1, 2]:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\bar{\mu}\bar{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\bar{\mu}\sigma}{c^2\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Onde $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ é a velocidade da luz no vácuo. Adotando o sistema de coordenadas cartesianas (x,y,z) com z caracterizando a profundidade, podemos definir os estados de polarização linear da onda Transversal Elétrico (TE) e Transversal Magnético (TM) respectivamente como,

$$\mathbf{E}_{TE} = (0, E_{TE}, 0) \quad (2)$$

e

$$\mathbf{H}_{TM} = (0, H_{TM}, 0). \quad (3)$$

Devido à simetria do problema, soluções de (1) tipo onda plana monocromáticas são da forma:

$$\begin{aligned} H_{TM} &= \sqrt{\bar{\epsilon}/\bar{\mu}} E_0 \exp\left(-\frac{2\pi f}{c} [\eta z - i(\xi z + k_x x - ct)]\right) \\ E_{TE} &= E_0 \exp\left(-\frac{2\pi f}{c} [\eta z - i(\xi z + k_x x - ct)]\right) \end{aligned} \quad (4)$$

Sendo E_0 a amplitude inicial do campo elétrico e f a frequência e define-se respectivamente os parâmetros de atenuação η e propagação ξ que dependem não apenas de $\bar{\mu}$ e $\bar{\epsilon}$ como também da *tangente de perda* do meio definida como $Z \equiv \sigma/(2\pi f\bar{\epsilon}\epsilon_0)$ e do ângulo de incidência (ou propagação) θ [7, 8]. Este último sendo definido como o ângulo formado pela direção de propagação da onda com eixo de profundidade. Pode-se mostrar que a onda ao incidir sobre a interface entre dois meios distintos, tem-se que a onda refletida emerge em um ângulo igual ao incidente enquanto que os ângulos incidente θ e refratado α satisfazem a seguinte lei de Snell generalizada:

$$\sqrt{\bar{\mu}_1\bar{\epsilon}_1} \sin(\theta) \kappa^J(\theta, Z_1) = \sqrt{\bar{\mu}_2\bar{\epsilon}_2} \sin(\alpha) \kappa^J(\alpha, Z_2). \quad (5)$$

Onde a função κ^J além de depender das relações constitutivas do meio depende também da frequência f e do estado de polarização ($J = TE, TM$) da onda incidente. Em geral, a polarização TM só permite propagação quase frontal ($\theta \approx \alpha \approx 0$) e não será analisada aqui. A seguir vamos exemplificar o comportamento da eq(5) em diferentes situações.

Resultados:

Por simplicidade vamos supor que os meios aqui tratados não sejam magnéticos de modo que possamos ad-

mitir que $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 1$. Vamos inicialmente aplicar a teoria exposta acima em interfaces tipo dielétrico–conductor, como por exemplo quando o meio 1 é o ar ($\sigma \approx 0$ e $\epsilon \approx \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} F/m$) e o 2 é o solo ($\sigma = 10^{-2} S/m$ e $\epsilon \approx 20\epsilon_0$). Vamos supor também que neste caso uma onda plana não homogênea se propagando no ar incida sobre o solo. A figura(1) mostra o comportamento da eq(5) para valores de frequência na faixa de 1Hz a 10GHz. Observa-se desta figura(1) que para frequências inferiores à 1MHz o ângulo de refração α é inferior a 1° , isto é, mesmo para uma incidência quase razante ($\theta \approx 90^\circ$) a onda sempre penetra no solo quase que frontalmente ($0 \leq \alpha < 1^\circ$). Este comportamento deixa de existir para frequências superiores 0.1GHz. Por exemplo, na faixa de 10GHz e para ângulos de incidência inferiores a 50° o solo, do ponto de vista da lei de Snell, se comporta como um dielétrico pois neste caso as soluções da eq(5) são muito próximas das soluções da lei de Snell clássica, representadas pela linha cheia na figura(1). Na figura(2), para o caso em que o ângulo de incidência θ é fixado em 45° , mostramos o comportamento do ângulo de refração α como uma função do raiz quadrada da frequência. Observa-se dessa figura(2) que para frequências inferiores à 100MHz α tem um comportamento quase linear com \sqrt{f} , enquanto que para frequências superiores à esta a figura(2) sugere que o solo, do ponto de vista EM, possa ser tratado quase como um material dielétrico. Outra situação interessante que estudamos refere-se ao caso em que as interfaces separam meios puramente condutores ($\sigma \neq 0$). Especificamente estudamos a propagação da onda EM em três meios distintos 0,1 e 2 representando respectivamente o oceano, rocha e reservatório contendo hidrocarbonetos como mostra a figura(3). Admitimos aqui que estes meios possuem respectivamente os seguintes parâmetros constitutivos: $\sigma_0 = 4.0 S/m$, $\sigma_1 = 1.0 S/m$, $0.1 \leq \sigma_2 \leq 0.001 S/m$, $\bar{\epsilon}_0 = 81$, $\bar{\epsilon}_1 = 20$, $\bar{\epsilon}_2 = 4$ e $\bar{\mu}_0 = \bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 1$. Para o modo TE, $f = 1 Hz$ e supondo que a onda EM tenha sido gerada no oceano, a figura(4) mostra a relação entre os ângulos ϕ , θ e α associados respectivamente aos vetores normais às interfaces oceano–rocha e rocha–reservatório. Por exemplo, observe que se a onda incide na interface oceano–rocha com um ângulo $\phi \approx 23.7^\circ$, tal onda atravessará a rocha em um ângulo de $\theta \approx 45^\circ$ e se propagará ao longo do reservatório em uma direção quase razante de $\alpha \approx 82^\circ$.

Conclusões:

Mostramos aqui que mesmo para meios não dispersivos (relações constitutivas independentes de frequência $\epsilon \neq \epsilon(f)$, $\mu \neq \mu(f)$, $\sigma \neq \sigma(f)$) os mecanismos de propagação de ondas EM em meios condutores dependem do estado de polarização da onda bem como podem depender da frequência com a qual ela se propaga. Na realidade, nossos cálculos sugerem que efeitos de frequência na função $\kappa^J(\theta, Z)$ que aparece na lei generalizada de Snell(5) são relevantes apenas para valores de $f > 1/(2\pi\tau)$, onde $\tau = \epsilon/\sigma$ é o tempo de relaxamento das cargas no condutor, por exemplo para $\sigma = 10^{-2} S/m$ e $\epsilon \approx \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} F/m$ κ^J é independente de f (com

relativa acurácia) até frequências da ordem de $10^6 Hz$.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq e FAPESB pelo apoio financeiro parcial e um dos autores (LGG) agradece aos Profs Roberto Argollo e Olivar Lima pelos esforços dispensados e agradável acolhida no CPGG–UFBA.

Referências

- [1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, (John Wiley and Sons, NY, 1999).
- [2] J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, (Mcgraw-Hill, NY, 1941).
- [3] P. Lorrain and D. R. Corson, *Electromagnetic Fields and Waves*, (Freeman, San Francisco, 1970).
- [4] M. N. Nabighian (Editor), *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics: Theory (Investigations in Geophysics Series No. 2)* (Society of Exploration Geophysics, 1988).
- [5] D.S. Parasnis, *Principles of Applied Geophysics*, (Chapman and Hall, NY, 1997).
- [6] W. M. Telford, L. P. Geldart, R. E. Sheriff, *Applied Geophysics* (Cambridge UP, NY, 1990).
- [7] R. D. Radcliff and C. A. Balanis, "Modified propagation constants for nonuniform plane wave transmission through conducting media," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, vol. GE-20, no. 3, pp. 408–411, July 1982.
- [8] J. J. Holmes and C. A. Balanis, "Refraction of a uniform plane wave incident on a plane boundary between two lossy media," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-26, pp. 738–741, Sept. 1978.

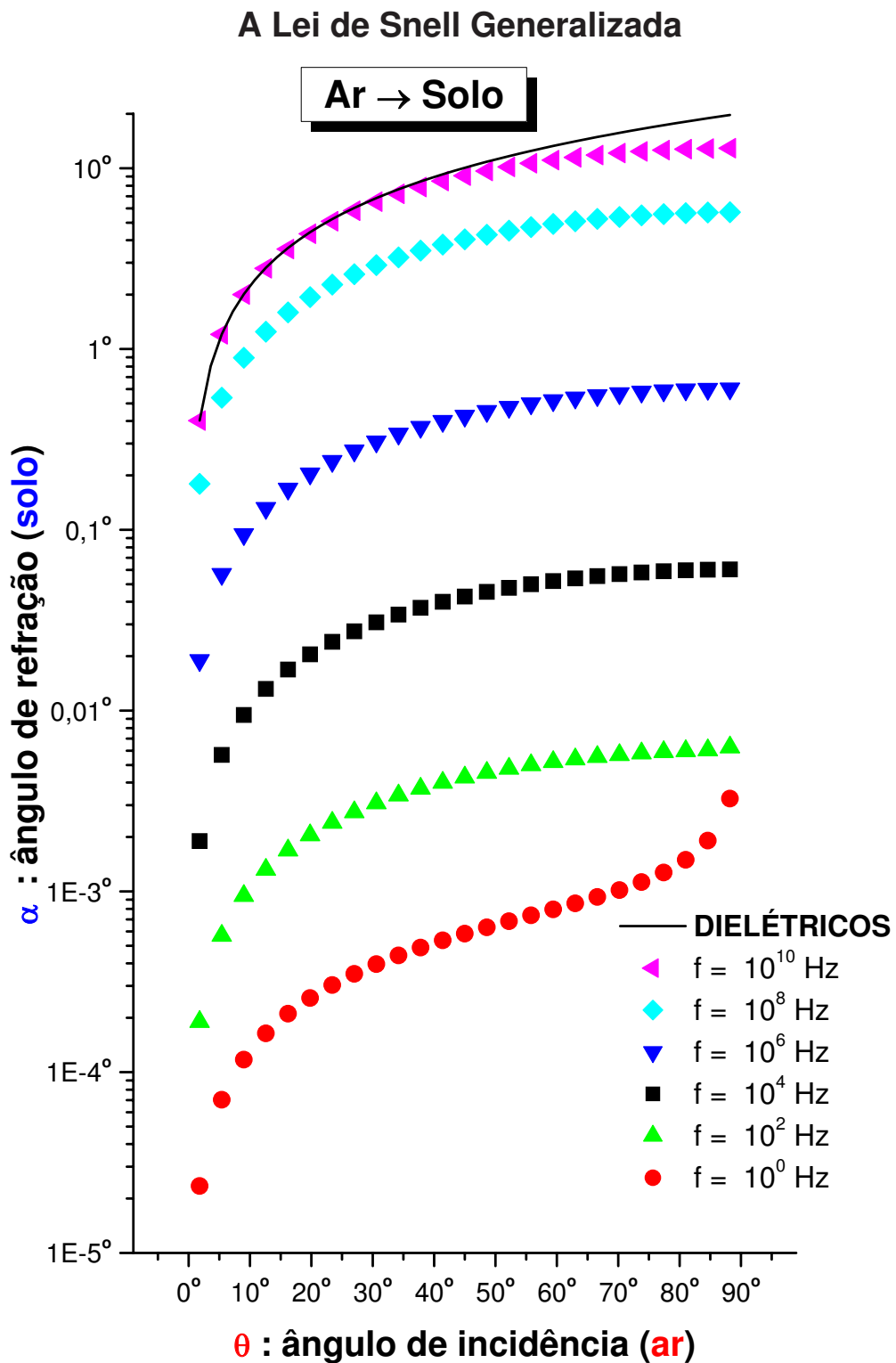


Figura 1: Mostra para diferentes valores da frequência f o comportamento da lei de Snell generalizada(5).

Lei de Snell: Comportamentos Limites

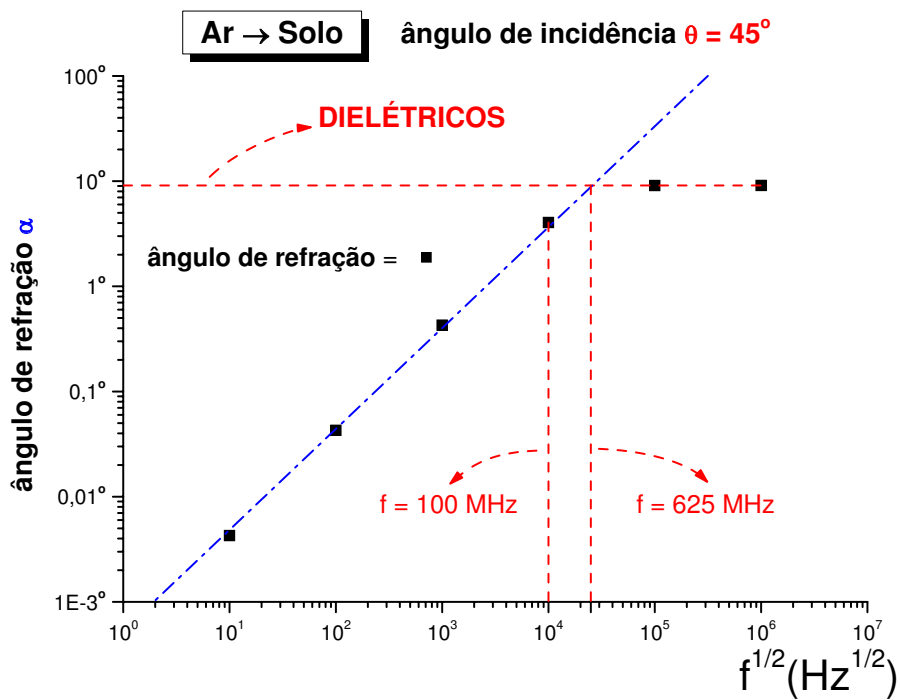


Figura 2: Para um ângulo de incidência $\theta = 45^\circ$, mostra o comportamento do ângulo de refração α em função de \sqrt{f} .

GEOMETRIA

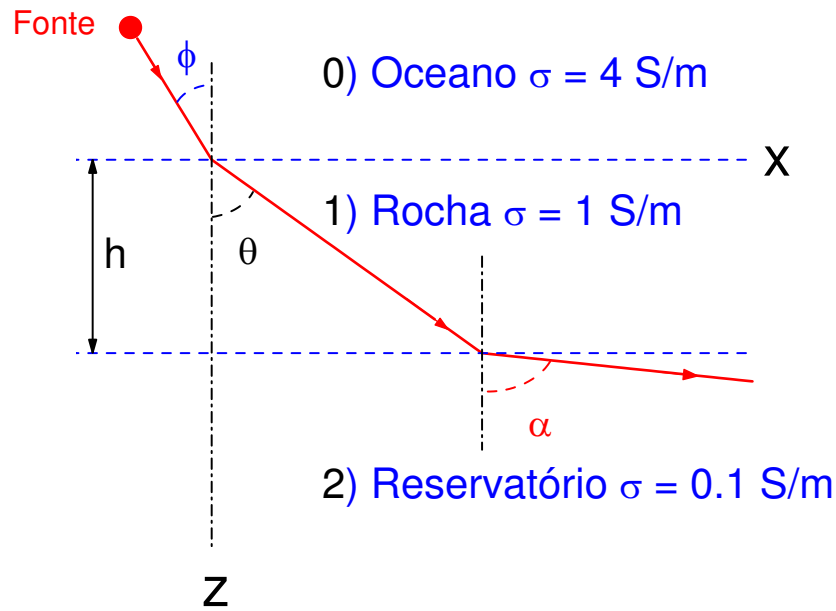


Figura 3: Mostra a Geometria para a propagação da onda EM que gerada no oceano atravessa a rocha de espessura h e propaga-se ao longo de um reservatório com hidrocarbonetos.

A Lei de Snell em Meios Condutores

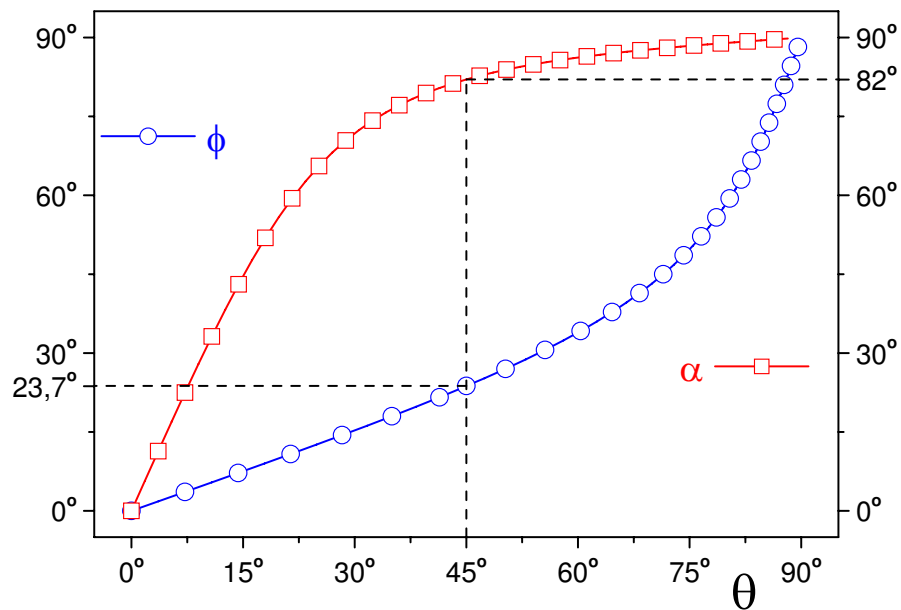


Figura 4: Para o modo TE, $f = 1 \text{ Hz}$ mostra a relação entre os ângulos ϕ (eixo vertical esquerdo), θ e α (eixo vertical direito).