



## Modelagem elástica e viscoelástica

Roberto Hugo M. dos Santos e Marco A. B. Botelho.  
CPGG – UFBA, Salvador, Bahia, Brasil.

Copyright 2006, SBGF - Sociedade Brasileira de Geofísica

*Este texto foi preparado para a apresentação no II Simpósio de Geofísica da Sociedade Brasileira de Geofísica, Natal, 21-23 de setembro de 2006. Seu conteúdo foi revisado pela Comissão Tecno-científica do II SR-SBGf mas não necessariamente representa a opinião da SBGF ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGF.*

### Resumo

As técnicas numéricas para efetuar a modelagem sísmica têm sido bastante utilizadas na prospecção de hidrocarbonetos com métodos sísmicos, seja para prever a resposta sísmica de uma estrutura, ou mesmo para analisar e interpretar a resposta real em função de mudanças nos parâmetros petrofísicos e assim contribuir na caracterização dos reservatórios. Objetivando simular de maneira realística a propagação da onda sísmica na subsuperfície da Terra desenvolvemos algoritmos baseados na equação elástica e viscoelástica da onda para simular as contribuições das ondas P e S. Neste trabalho nós fazemos uma análise comparativa das diferentes modelagens considerando os diferentes tipos de meios: elástico isotrópico e anisotrópico, viscoelástico isotrópico e anisotrópico.

### Introdução

Devido a dificuldade crescente em se descobrir novos campos petrolíferos com significantes reservas de hidrocarbonetos, é cada vez maior o interesse na caracterização de antigos reservatórios de hidrocarbonetos com o objetivo de aumentar a recuperação de óleo em campos maduros, obtendo-se como resultado final o aumento da produção. A caracterização do reservatório consiste em usar os métodos geofísicos para descrição detalhada da estrutura do ambiente de reservatório e dos fluxos de seus fluidos, é o conhecimento de como as propriedades das rochas dos reservatórios de hidrocarbonetos e seus fluidos influenciam na resposta geofísica, especialmente na propagação de ondas sísmicas. O processo de caracterização de reservatórios é baseado primordialmente nas informações obtidas de poços. Entretanto, no caso onde os dados são insuficientes para a caracterização, torna-se necessários outros meios para que este processo seja mais completo e abrangente. O emprego de técnicas numéricas para efetuar modelamento sísmico tem sido muito utilizado na prospecção sísmica onde, por meio de um procedimento direto, é possível simular a propagação de ondas e estudar todos os parâmetros que são necessários para a caracterização de reservatório. O modelamento direto de

dados sísmicos representa papel fundamental neste processo de caracterização onde não há dados disponíveis, pois através deste procedimento podemos compreender qual a parcela de contribuição de cada um dos parâmetros petrofísicos na propagação de ondas sísmicas. O procedimento usado neste trabalho para a caracterização de reservatórios leva em consideração uma série de parâmetros, tais como: mineralogia, propriedades das rochas (porosidade, saturações em óleo, água e gás, permeabilidade, compressibilidade), dos fluidos (viscosidade, composição química, molhabilidade, compressibilidade) e dos fatores ambientais (pressão nos poros, tensões, temperatura), assim como das variações espaciais e temporais desses parâmetros. Historicamente, são relevantes as seguintes contribuições: Reshef et al (1988), que introduziu o uso de sismogramas sintéticos com operadores diferenciáveis pseudospectral, onde considera um meio de pequena perda e modela a superfície livre chamando de método "Zero-padding". Nesse trabalho usamos o método numérico das diferenças finitas que usa as chamadas formulações homogêneas e heterogêneas para resolver a equação do movimento. No primeiro caso, o movimento em cada região homogênea é descrito por uma equação do movimento com parâmetros constantes acústicos. Para esse método, condições de contorno sobre todas interfaces devem ser explicitamente satisfeitas. A formulação heterogênea incorpora implicitamente as condições de contorno para construir a representação de diferenças finitas usando a equação do movimento para meios heterogêneos. Este trabalho esta baseado no trabalho de (Carcione, 2001).

### Equação dinâmica

Nesta seção, nós derivamos as equações diferenciais descrevendo a propagação da onda em termos dos deslocamentos do material. A conservação do momento linear implica em:

$$\partial_j \sigma_{ij} + f_i = \rho \partial_{tt}^2 u_i \quad (1)$$

onde  $u_i$  são as componentes do vetor deslocamento,  $\rho$  é a densidade de massa e  $f_i$  são as componentes da força por unidade de volume. Assumindo um volume  $\Omega$  limitado por uma superfície  $S$ , o volume integral da equação (1) é o balanço entre a tração da superfície em  $S$  - obtido aplicando ao teorema do divergente para  $\partial_j \sigma_{ij}$  - e a força com o termo de inércia  $\rho \partial_{tt}^2 u_i$ . A

equação (1) é conhecida como equação de Euler para a elasticidade, correspondendo a lei de Newton para movimento de partículas.

A substituição da lei de Hooke na equação (1) resulta

$$\partial_j(c_{ijkl}\epsilon_{kl}) + f_i = \rho\partial_{tt}^2 u_i \quad (2)$$

Para o uso da notação matricial curta, nós introduzimos a notação de Auld (Auld, 1990) para os operadores diferenciais. O operador gradiente simétrico tem sua representação matricial seguinte

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

A relação deslocamento-deformação pode ser escrita como

$$e = \nabla^T \cdot \vec{u}, \quad (e_I = \nabla_{Ij} u_j), \quad (4)$$

com

$$\vec{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)^T = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{23}, e_{13}, e_{12})^T, \quad (5)$$

O divergente do tensor esforço  $\partial_j \sigma_{ij}$  pode ser expresso como  $\nabla \cdot \vec{\sigma}$ , e a equação (1) torna-se

$$\nabla \cdot \vec{\sigma} + \vec{f} = \rho\partial_{tt}^2 \vec{u}, \quad (6)$$

onde

$$\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T, \quad (7)$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad (8)$$

e

$$\vec{f} = (f_1, f_2, f_3). \quad (9)$$

Deforma similar, usando a notação matricial, a relação esforço-deformação

$$\vec{\sigma} = \vec{C} \cdot \vec{e}, \quad (10)$$

com a matriz elasticidade dada por

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

O estado de deformação zero corresponde ao equilíbrio estático com o mínimo de energia de deformação  $\vec{V} = 0$ . Por causa disso a energia deve crescer constantemente quando o meio é deformado, nós temos  $c_{ij}e_I e_J > 0$ .

Matematicamente, essa expressão envolve componentes  $e_I$  não zerados que definem uma função quadrática exata, que, por definição, impõem alguns contrastes nas

constantes elásticas (condição de estabilidade, veja (Auld, 1990)); isto é, todo determinante principal deve ser maior que zero,

### Propagação da onda 2-D

A equação que governa a propagação da onda pode ser expressa por

i) Equação de Euler:

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma_1 + \partial_3 \sigma_5 + f_1 &= \rho t v_1 \\ \partial_3 \sigma_3 + \partial_1 \sigma_5 + f_2 &= \rho t v_2 \end{aligned} \quad (12)$$

onde  $f_1$  e  $f_2$  são as componentes de força.

ii) relação esforço deformação:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= c_{11} \frac{\partial x_1}{x} + c_{13} \frac{\partial x_2}{z} \\ \sigma_3 &= c_{33} \frac{\partial x_2}{z} + c_{13} \frac{\partial x_1}{x} \\ \sigma_5 &= c_{55} \left( \frac{\partial x_1}{z} + \frac{\partial x_2}{x} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

### Propagação da onda em um meio homogêneo

Com o objetivo de estudar a propagação do campo de onda elástica e validar o programa de modelagem numérica, escolhemos inicialmente um modelo 2-D em meio elástico que deve representar uma superfície de um material consolidado. O modelo usa uma malha de  $200 \times 200$  com uma dimensão de cada valor de  $dx = dz = 10m$ . O movimento é iniciado por uma força vertical localizada no centro do modelo. Para a força direcional foi usada uma fonte definida

$$\vec{F}(t) = \exp[-n f_0^2 (t - t_0^2) \cos \epsilon \pi f_0 (t - t_0)] \quad (14)$$

onde  $f_0 = 20Hz$  a frequência de corte,  $t_0 = 0.001s$  é variação do tempo e  $n$  e  $\epsilon$  são constantes. O modelo é definido para uma densidade  $\rho = 2000kg \cdot m^{-3}$  e velocidade da onda compressional  $v_p = 2800m \cdot s^{-1}$  e velocidade da onda cisalhante  $v_s = 1200m \cdot s^{-1}$  as figuras mostram a componente  $u_1$  (a) e a componente  $u_2$  (b) para dois diferentes instantes de tempos.

A figura compara os sismogramas numérico e analítico para  $x = 150m$  e  $z = 200m$  (a) componente  $u_1$  e (b) componente  $u_2$ .

### Solução analítica

A solução analítica é usada para estudar a física da propagação da onda e testar o algoritmo de modelagem numérica.

A solução geral da propagação do campo de onda para uma força pontual em um meio elástico é dada por Eason

et al (1956) e Pilant (1979). Para uma força impulsiva atuando na direção positiva  $x_2$ , essa solução pode ser

$$u_1(r,t) = \frac{F}{2\pi\rho} \cdot \frac{x_1 \cdot x_2}{r^2} [G_1(r,t) + G_2(r,t)] \quad (15)$$

e

$$u_2(r,t) = \frac{F}{2\pi\rho} \cdot \frac{1}{r^2} [x_2^2 G_1(r,t) - x_1^2 G_2(r,t)] \quad (16)$$

onde  $F$  é a constante que determina a magnitude da força,  $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$  e

$$G_1 = \frac{1}{v_1^2} (t^2 - \tau_1^2)^{-1/2} H(t - \tau_1) + \frac{1}{r^2} (t^2 - \tau_1^2)^{1/2} H(t - \tau_1) + \frac{1}{r^2} (t^2 - \tau_2^2)^{1/2} H(t - \tau_2) \quad (17)$$

e

$$G_2 = -\frac{1}{v_2^2} (t^2 - \tau_2^2)^{-1/2} H(t - \tau_2) + \frac{1}{r^2} (t^2 - \tau_1^2)^{1/2} H(t - \tau_1) + \frac{1}{r^2} (t^2 - \tau_2^2)^{1/2} H(t - \tau_2) \quad (18)$$

onde  $\tau_1 = \frac{r}{v_1}$  e  $\tau_2 = \frac{r}{v_2}$ , com  $v_1$  e  $v_2$  as velocidades da

onda elástica compressional e cisalhante, e  $H$  a função de Heaviside.

A solução analítica da propagação do campo de onda é dada

$$w(r,t) = u_v(r,t) * f(r,t) \quad (19)$$

onde  $f$  é o vetor frequência.

## Conclusões

Muitas das aplicações de modelagem sísmica consideram que a subsuperfície do meio é acústico, e só em casos limites é considerado a geologia elástica. Quando o objetivo é modelar uma estrutura geológica real, por exemplo, reservatórios de hidrocarbonetos, essa suposição pode não ajustar bem os efeitos da atenuação e dispersão que são fundamentais no cálculo da amplitude dos eventos sísmicos. Portanto a modelagem viscoelástica é a mais indicada para descrever a atenuação do pulso sísmico.

Nos experimentos executados observamos os efeitos da anelasticidade, definidos por  $Q_p = 30$  e  $Q_s = 40$ , correspondendo respectivamente as deformações compressão e cisalhantes, na amplitude dos sinais, onde as componentes de deslocamento horizontal e vertical são visivelmente mais atenuados que nos meios perfeitamente elásticos.

A precisão do algoritmo numérico para meios elásticos é verificada em comparação com a solução analítica baseada na função de Green elástica 2-D.

Comparações entre simulações elásticas e viscoelásticas mostram diferenças nas amplitudes da onda P e S, principalmente nas amplitudes da onda P e nos tempos de chegada.

## Agradecimentos

Roberto H. M. dos Santos agradece a CAPES pelo apoio financeiro. Ambos autores agradecem a prestimosa e desinteressada orientação de estudo recebida do Dr. José M. Carcione. Agradecemos também o apoio da PEGEESSE do Brasil a essa pesquisa, através do convênio UFBA/PGS/FAPEX.

## Referências

Auld, B. A., 1990, Acoustic fields and waves in solids: Voll. Krieger Publ. Co.

Botelho, M. A. B., Santos, R. H. M. (2004) Técnicas para Simular a Propagação e Depropagação de Ondas Acústicas Empregando Operadores de Diferenças Finitas, I Workshop da Rede Cooperativa em Risco Exploratório, Natal-RN. 2 pg

Carcione, J. M., 1995, Constitutive model and wave equation for linear, viscoelastic, anisotropic media: Geophysics, 60, 537-548.

Carcione, J. M., 2001, Wave propagation in porous, anelastic and anisotropic media: Hand book of Geophysical Exploration.

Eason, G., Fulton, J., and Sneddon, I. N., 1956, The generation of waves in an infinite elastic solid by variable body forces, Phil. Trans. R. Soc. A, 248, 575-607.

Kelvin, Lord (Thomson, W.), 1856, Elements of a mathematical theory of elasticity: Phil. Trans. R. Soc. London, 146, 481-498.

Pilant, W. L., 1979, Elastic wave in the Earth, North Holland, Amsterdam.

Pipkin, 1976, Constraints in linearly elastic materials: Journal of Elasticity, 6, 179-193.

Reshef, M., Kosloff, D., Edwards, M., and Hsiung, C., 1988, Tree-dimensional elastic modeling by the fourier method: Geophysics, 53, 1184-1193.

Santos, R. H. M., Botelho, M. A. B., Silva M. S. (2004) Simulação da Propagação e Depropagação de Ondas Acústicas Usando Operadores de Diferenças Finitas, Rio Oil & Gás Conference, Rio de Janeiro. 8 pg.

Santos, R. H. M., Botelho, M. A. B. (2005), Modelagem Sísmica de Ondas SH Aplicada em Meios Efetivos, II Workshop da Rede Cooperativa em Risco Exploratório, Belém-Pará. 4 pg.

Santos, R. H. M., Botelho, M. A. B. (2005), Modelagem Sísmica SH Viscoelástica Anisotrópica, Ninth International congress of the Brazilian Geophysical Society, Salvador - BA . 5 pg.

Santos, R. H. M., Botelho, M. A. B. (2005), Modelagem Sísmica SH Viscoelástica Simulando Meios Geológicos

com Anisotropia, III Congresso Brasileiro de P&D, Salvador -BA. 6 pg.

Santos, R. H. M., Botelho, M. A. B. (2005), Simulação da Propagação da Onda em um meio Homogêneo Elástico, III Workshop da Rede Cooperativa em Risco Exploratório, Slavador-BA. 5 pg.

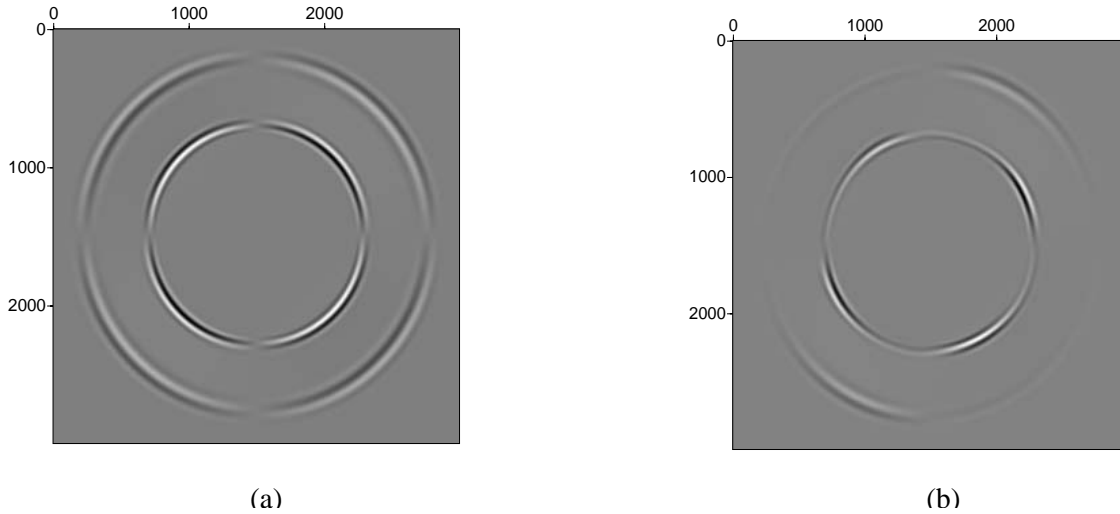


Figura 1: Snapshot do deslocamento da componente horizontal devido uma força vertical homogênea elástica isotrópica  $U_1$  (a) e homogênea viscoelástica isotrópica  $U_1$  (b) para  $t = 0,19s$ . A amplitude da onda S (frente de onda interna) permanece mais forte que a amplitude da onda P (frente de onda externa).

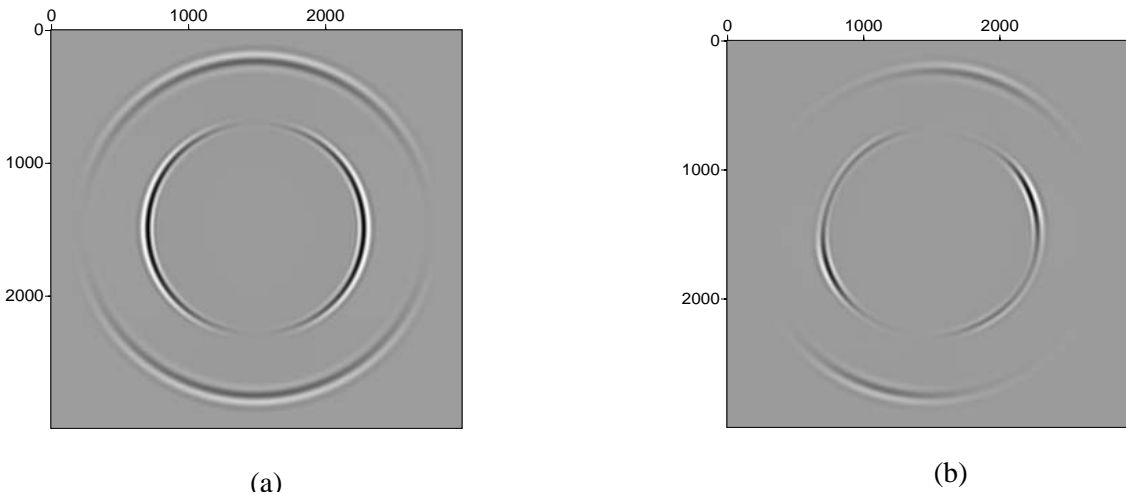


Figura 2: Snapshot do deslocamento da componente vertical devido uma força vertical homogênea elástica isotrópica  $U_2$  (a) e homogênea viscoelástica isotrópica  $U_2$  (b) para  $t = 0,19s$ . A amplitude da onda S (frente de onda interna) permanece mais forte que a amplitude da onda P (frente de onda externa).

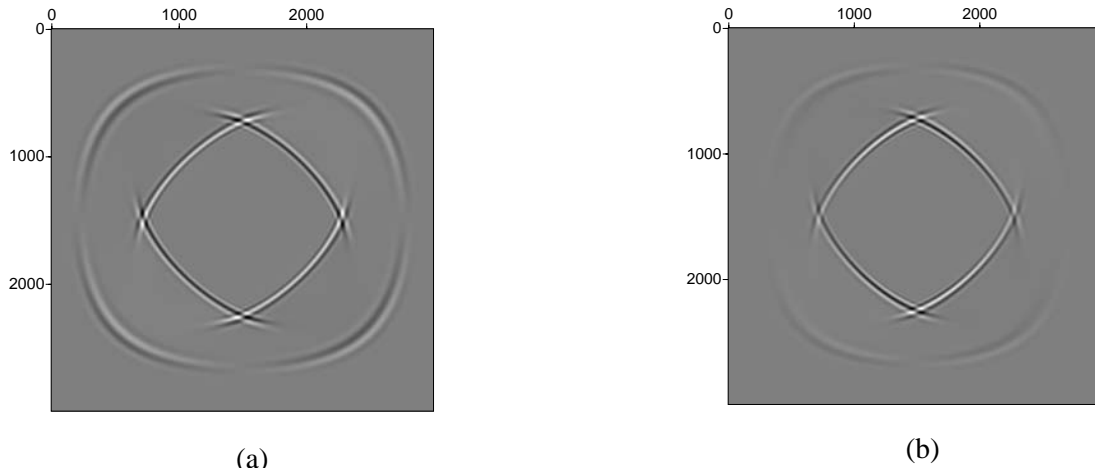


Figura 3: Snapshot do deslocamento da componente horizontal devido uma força vertical homogênea elástica anisotrópica  $U_1$  (a) e homogênea viscoelástica anisotrópica  $U_1$  (b) para  $t = 0,19s$ . A amplitude da onda S (frente de onda interna) permanece mais forte que a amplitude da onda P (frente de onda externa).

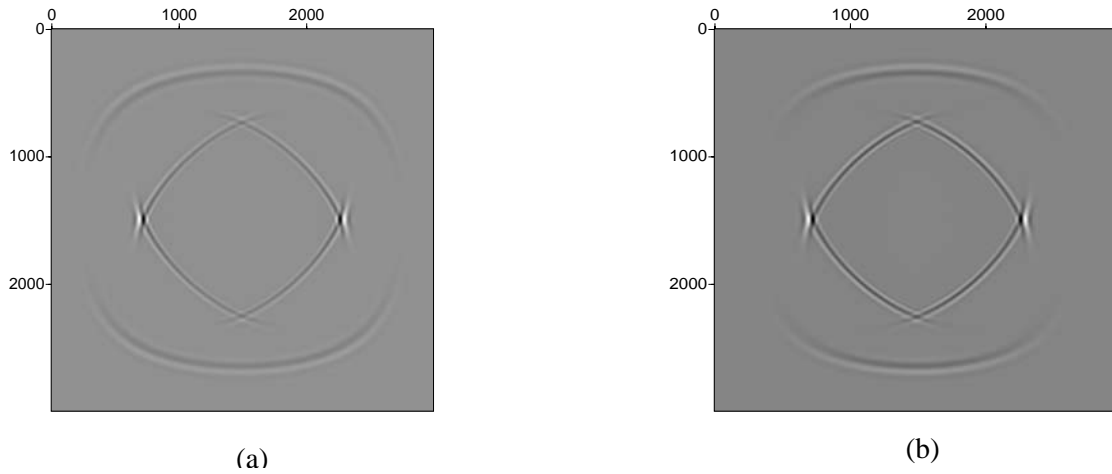
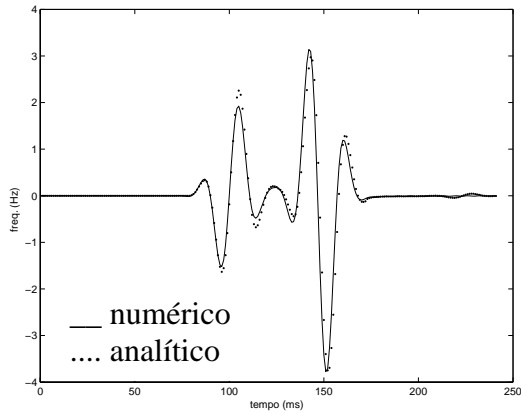
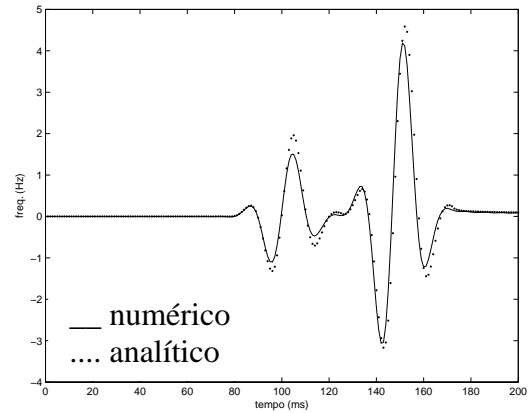


Figura 4: Snapshot do deslocamento da componente vertical devido uma força vertical homogênea elástica anisotrópica  $U_2$  (a) e homogênea viscoelástica anisotrópica  $U_1$  (b) para  $t = 0,19s$ . A amplitude da onda S (frente de onda interna) permanece mais forte que a amplitude da onda P (frente de onda externa).

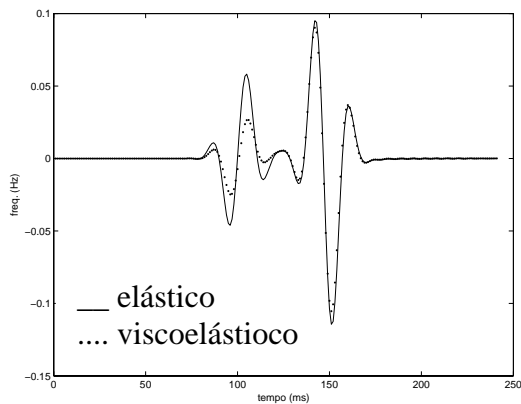


(a)

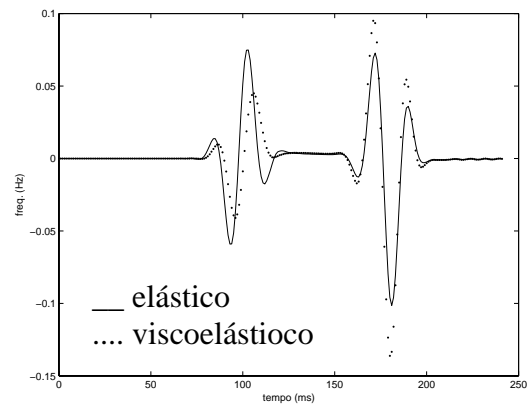


(b)

Figura 5: Sismogramas numérico e analítico da componente horizontal  $U_1$  (a) e componente vertical  $U_2$  (b) no meio homogêneo elástico isotrópico.



(a)



(b)

Figura 6: Sismogramas elástico e viscoelástico da componente horizontal  $U_1$  (a) e componente vertical  $U_2$  (b) no meio homogêneo isotrópico.