

Sensibilidade e Resolução dos Parâmetros do Operador CRS 2D

Wildney W. S. Vieira e Lourenildo W. B. Leite, UFPA

Copyright 2010, SBGf - Sociedade Brasileira de Geofísica Este texto foi preparado para a apresentação no IV Simpósio Brasileiro de Geofísica, Brasília, 14 a 17 de novembro de 2010. Seu conteúdo foi revisado pelo Comitê Técnico do IV SimBGf, mas não necessariamente representa a opinião da SBGf ou de seus associados. É proibida a reprodução total ou parcial deste material para propósitos comerciais sem prévia autorização da SBGf.

RESUMO

Este trabalho descreve a sensibilidade do operador CRS (2D, superfície horizontal) em relação aos seus 4 parâmetros (v_0 , R_{NIP} , R_N , α_0), bem como as propriedades estatísticas em termos da solução do problema de otimização não-linear, multi-paramétrico de ajuste de superfícies. O trabalho propõe a combinação de dois métodos para alcançar o mínimo onde a linearidade é melhor alcançada. O primeiro é um método global do tipo busca aleatória controlada, e o segundo é realizar uma última iteração usando o método do gradiente de segunda ordem que permite calcular as matrizes resolução dos dados e dos parâmetros, e a matriz covariância dos parâmetros. As funções sensibilidades são representadas pelas colunas da matriz do problema, e estas funções exibem um comportamento bastante linear em vez de uma forma côncava desejada. Esta linearidade informa uma forte necessidade de informação a priori para o ponto de partida na busca dos 4 parâmetros.

INTRODUÇÃO

A motivação inicial parte de dois aspectos do empilhamento CRS: uma baseada no ruído dos atributos, e a outra na estratégia de busca dos parâmetros. A análise dos resultados de empilhamento CRS (seções Coerência, Afastamento-nulo, Migração, R_{NIP} , R_N , α_0) mostra que ao passo que o dado observado melhora na relação sinal/ruído as seções dos atributos se apresentam com uma forma cada vez mais parecida com a seção empilhamento; isto é, estruturadas. A estratégia de busca dos parâmetros no domínio semblance é dividida em duas partes principais: uma primeira para determinar valores iniciais de partida para serem usados na segunda etapa voltada à otimização, onde todos os parâmetros são resolvidos simultaneamente. As buscas famílias pontos-médios-comuns (PMC).

A descrição das propriedades estatísticas (resolução e correlação) do operador de empilhamento CRS é feita através do ajuste de duas superfícies como um problema de otimização, onde a função objeto de minimização é dada pela raiz quadrada da média da soma dos desvios

ao quadrado. O problema é classificado como não-linear multiparamétrico, e para evitar um mínimo local é proposto uma solução pela combinação de um método de busca global aleatória controlada (BAC), com o método de derivadas de segunda ordem (DSO), uma vez que este permite a análise estatística da solução. A combinação destes dois métodos segue uma seqüência que reside no princípio de que a BAC define a região ao redor de um mínimo global, este teoricamente bem definido; o processo é continuado com uma iteração final com o DSO ao redor do mínimo com propriedades lineares e derivadas que constroem as matrizes de resolução. Os testes foram realizados para um ponto $P_0(x_0, t_0)$, e o próximo passo é realizar os testes ao longo de um traço, e em seguida sobre todos os PMC. Os dois experimentos foram realizados separadamente.

A análise de sensibilidade do operador CRS é feita com base nas derivadas da função $t(x_m, h; v_0, R_{NIP}, R_N, \alpha_0)$ em relação aos parâmetros ($v_0, R_{NIP}, R_N, \alpha_0$), e que são apresentadas em função das variáveis independentes x_m e h .

O problema sísmico original é apresentado na seguinte forma: Dado a seção sísmica observada $t^{obs}(x_m, h)$ no espaço D dos dados, deseja-se encontrar um modelo \mathbf{m} no espaço M dos parâmetros cujo modelo direto $t^{pre}(x_m, h)$ ajuste aos dados observados no sentido da norma-2.

MODELO DIRETO

O modelo direto é dado pela equação que define o operador, hiperbólico, 2-D, do empilhamento CRS que descreve o tempo de trânsito impulsivo para refletores curvos baseado na teoria paraxial do raio, considerando apenas trajetórias de reflexão primária (Mann, 2002). A equação, representada fisicamente na Figura 1, é dada por:

$$t^2(x_m, h) = \left[t_0 + \frac{2\text{sen}\alpha_0(x_m - x_0)}{v_0} \right]^2 + \frac{2t_0 \cos^2 \alpha_0}{v_0} \left[\frac{(x_m - x_0)^2}{R_N} + \frac{h^2}{R_{NIP}} \right], \quad (1)$$

onde v_0 é a velocidade ao redor do ponto de referência da observação e do processamento, $P_0(x_0, t_0)$, porém sendo aqui tomada como um dos parâmetros a ser determinado pelo processo de otimização. As variáveis independentes x_m e h são, respectivamente, o ponto-médio e o meio-afastamento na configuração PMC, como mostra a Figura 2. O parâmetro α_0 corresponde ao ângulo de emergência vertical da frente de onda no ponto de referência. As quantidades R_{NIP} e R_N são relacionadas ao raio central segundo a teoria paraxial do raio. O método CRS é descrito como sendo um empilhamento independente de um macro-modelo para simular uma seção (ao afastamento-nulo, por exemplo) no domínio

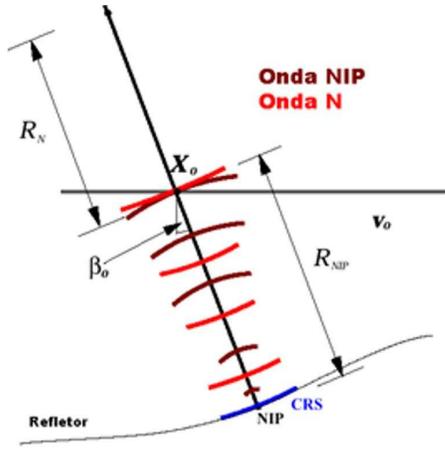


Figura 1: Representação física do modelo CRS formado por uma camada sobre um semi-espaço separados por uma interface curva.

(t, x). O operador é obtido matematicamente considerando que dois experimentos teóricos sejam realizados para gerar ondas próprias e que são: a onda-NIP e a onda-N. A onda-NIP é associada a um difrator em explosão que produz a denominada Onda de Incidência Normal com raio de curvatura R_{NIP} no ponto $P_0(x_0, t_0)$ na superfície de observação. A onda-N é associada ao refletor-em-explosão para gerar a denominada Onda Normal com raio de curvatura R_N no ponto $P_0(x_0, t_0)$ na superfície de observação, e sendo este refletor-em-explosão localmente aproximado por um segmento de arco de círculo ao redor do ponto NIP. Para satisfazer a teoria paraxial do raio, um raio central de referência e informação deve ser estabelecido, e neste caso é tomado o raio de afastamento-nulo entre o ponto de observação na superfície e o ponto de incidência normal em sub-superfície. Além disso, apenas eventos primários são levados em consideração. O raio central satisfaz a lei de Snellius através das interfaces, e as curvaturas das frentes das ondas NIP e N mudam de acordo com leis de refração e transmissão. A Figura 4 representa o modelo direto calculado pela equação (1). A Figura 3 representa o dado observado (sintético) calculado a partir da equação (1) sendo adicionado ruído aleatório segundo uma distribuição normal controlado por um fator e efeito visual. Conseqüentemente, este estudo não tem marcação de evento, inclusive no sentido do semblance.

MODELO INVERSO

Dois métodos de otimização foram aplicados nas investigações: Busca Aleatória Controlada (Método Price) e o Gradiente de Segunda Ordem. A função da medida de desajuste, $\phi(\mathbf{m})$, é expressa por:

$$\phi(\mathbf{m}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [t_i^{obs} - t_i^{pre}(\mathbf{m})]^2}, \quad (2)$$

e que não é para ser confundido com a função sem-

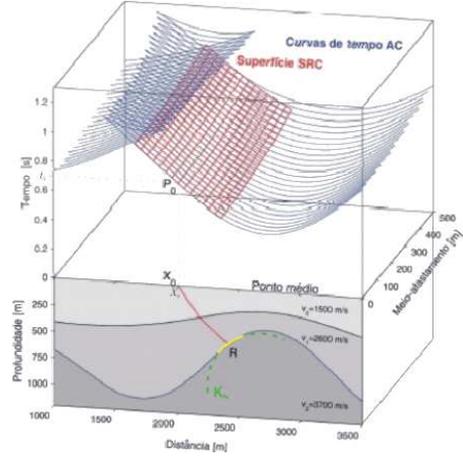


Figura 2: Perspectiva 3-D da superfície do operador CRS em vermelho e do dado em azul.

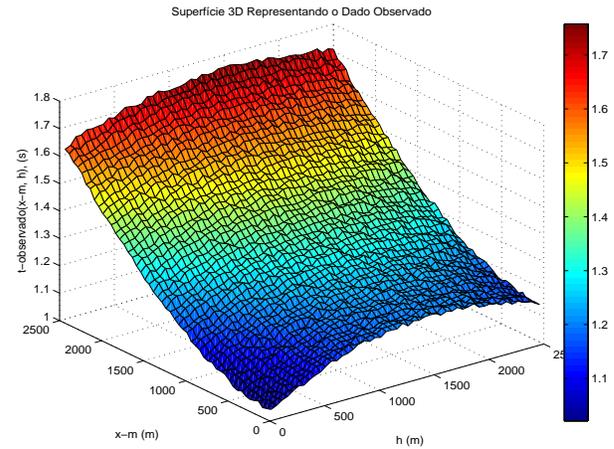


Figura 3: Perspectiva 3-D do dado sintético com ruído aleatório mostrando o aspecto hiperbólico.

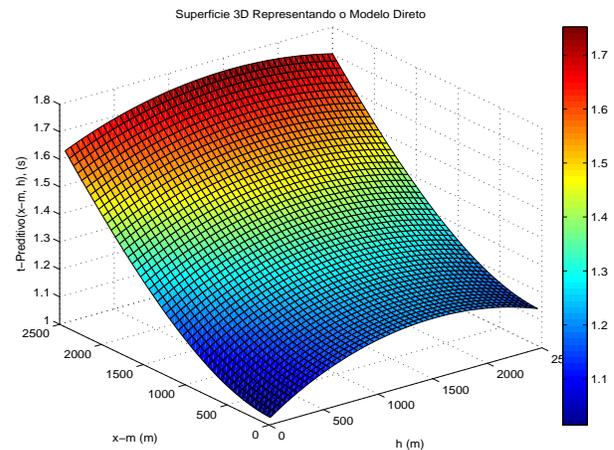


Figura 4: Perspectiva 3-D do modelo direto.

blance. Para ambos os métodos de otimização, adota-se o princípio de inversão representado pela Figura 5.

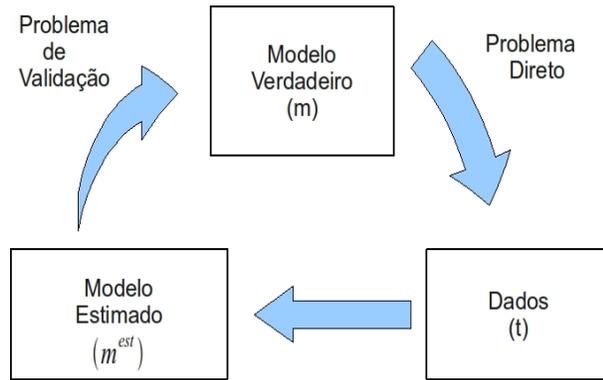


Figura 5: Representação canônica do princípio de inversão.

Método de Busca Aleatória Controlada

O formalismo aplicado foi descrito por Price (Price, 1983) para resolver o problema de otimização global (Brachetii et al., 1997). Uma característica comum a estes métodos é que eles atacam dois problemas distintos ao mesmo tempo:

1. O problema de Busca Global que é o exame de toda a região de interesse com a finalidade de localizar sub-regiões “mais promissoras” que podem conter um mínimo global (\mathbf{m}^{**});
2. O problema de Busca Local que é a determinação do mínimo global (\mathbf{m}^{**}) usando uma estratégia local, uma vez que tenha sido localizada uma vizinhança suficientemente pequena ao redor deste mínimo.

Numa conceituação simples, no método Price se deseja a solução do problema de otimização global, não-vinculado, estruturado da seguinte forma: $\min \phi(\mathbf{m})$, $\mathbf{m} \in R^M$, onde $\phi : R^M \rightarrow R$ é uma função contínua; isto é, se busca o mínimo da função contínua ϕ , onde o vetor de parâmetros \mathbf{m} (dimensão M) a determinar é definido no espaço R^M . Desta forma, \mathbf{m} representa pontos-coordenadas m_i , ($i = 1, M$) no espaço contínuo dos parâmetros. A função objeto de minimização é considerada multimodal.

Para iniciar o processo, um domínio V de busca é definido através da especificação dos limites dos domínios de cada um dos parâmetros. Em seguida, é definido uma quantidade predeterminada, N , de pontos de testes, aleatoriamente escolhidos em V e consistentes com os vínculos (caso sejam impostos) formando o conjunto:

$$S_1^k = \{ \mathbf{m}_1^{(k)}, \mathbf{m}_2^{(k)}, \mathbf{m}_3^{(k)}, \dots, \mathbf{m}_N^{(k)} \}. \quad (3)$$

O funcional $\phi(\mathbf{m})$ é avaliado em cada ponto N , e a posição e o valor da função $\phi(\mathbf{m})$ são armazenados numa

matriz:

$$\mathbf{A}[Nx(N+1)]. \quad (4)$$

A cada iteração um novo ponto P de teste, $\hat{\mathbf{m}}^{(k)}$, é calculado usando um sub-conjunto aleatório $S_2^{(k)}$ de $S^{(k)}$ descrito na forma:

$$\hat{\mathbf{m}}^{(k)} = \mathbf{c}^{(k)} - (\mathbf{m}_{40}^{(k)} - \mathbf{c}^{(k)}), \quad (5)$$

sendo \mathbf{c} o centróide definido por:

$$c_j^{(k)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M m_{4i}^{(k)} \quad (j = 1, M). \quad (6)$$

Em seguida é feito o teste se o ponto P satisfaz os vínculos, e se

$$\phi(\hat{\mathbf{m}}^{(k)}) < \phi(\hat{\mathbf{m}}_{\max}^{(k)}). \quad (7)$$

Caso estas condições não sejam atendidas, o processo retorna para novas definições. A probabilidade dos pontos convergirem para o mínimo global dependerá da distribuição, do valor de N , da complexidade do funcional, da natureza dos vínculos e da escolha dos pontos de teste.

Método do Gradiente de Segunda Ordem

Este método é baseado na expansão em série de Taylor multivariada da função modelo direto, $t(x_m, h; \mathbf{m})$, com parâmetros \mathbf{m} para ajuste. A série lineariza o problema para permitir uma solução a partir de uma posição conhecida \mathbf{m}_1 e de suas derivadas, e tem a forma:

$$t(x_m, h; \mathbf{m}_2) \cong t(x_m, h; \mathbf{m}_1) + \sum_{j=1}^M \frac{\partial t}{\partial m_j}(x_m, h; \mathbf{m}_1) \Delta m_j. \quad (8)$$

A variável aleatória é representada pelo tempo observado:

$$t(x_m, h; \mathbf{m}_2) = t^{obs}(x_m, h; \mathbf{m}_2 = real) = t^{obs}(x_m, h); \quad (9)$$

e o tempo preditivo representa o modelo teórico

$$t(x_m, h; \mathbf{m}_1) = t^{pre}(x_m, h; \mathbf{m}_1 = modelo) = t^{pre}(x_m, h). \quad (10)$$

A partir destes se escreve que:

$$t^{obs}(x_m, h) - t^{pre}(x_m, h) = \sum_{j=1}^M \frac{\partial t^{pre}}{\partial m_j}(x_m, h; \mathbf{m}) \Delta m_j. \quad (11)$$

E na forma matricial:

$$\Delta t(x_m, h; \mathbf{m}) = \mathbf{G}(x_m, h; \mathbf{m}) \Delta \mathbf{m}. \quad (12)$$

A equação (12) é a forma linearizada para a solução do problema não-linear, onde $\Delta t(x_m, h; \mathbf{m})$, ($Nx1$), é um vetor coluna que representa o desvio dos dados; $\Delta \mathbf{m}$, ($Mx1$), é um vetor coluna que representa o desvio dos parâmetros; e $\mathbf{G}(x_m, h; \mathbf{m})$, (NxM), é a matriz Jacobiana do problema que tem os dados ao longo das colunas e os parâmetros ao longo das linhas, e é dada por:

$$G_{i,j} = \frac{\partial t^{pre}}{\partial m_j}(x_m, h; \mathbf{m}), \quad (i = 1, N; j = 1, M) \quad (13)$$

As derivadas representadas na equação (13) são muito longas para serem apresentadas neste texto, e elas representam as funções sensibilidade na otimização com relação aos parâmetros. As Figuras 7, 8, 9 e 10 representam as derivadas segundo a equação (13), e se observa o comportamento linear na janela $t - x$ sem ter uma janela específica que melhor defina a resolução; isto é, o operador apresenta baixa resolução e se faz necessário um bom ponto de partida para a otimização, e mesmo até a possibilidade de vínculos a priori.

O problema é definido como sendo sobre-determinado (puro), uma vez que a quantidade de dados é considerada maior do que a de parâmetros a determinar, ($N > M$), sendo resolvido uma reflexão de cada vez. O método de minimização é por derivadas na forma $\partial\phi(\mathbf{m})/\partial\mathbf{m} = 0$, o que estabelece um mínimo local. A linearização do problema de inversão estabelecido pela equação $\mathbf{G}\Delta\mathbf{m} = \Delta\mathbf{t}$, e a solução é da seguinte forma:

$$\Delta\mathbf{m} = [\mathbf{G}^T\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^T\Delta\mathbf{t}. \quad (14)$$

A atualização dos parâmetros durante as iterações é dada por:

$$\mathbf{m}^{(k+1)} = \mathbf{m}^k + \gamma\Delta\mathbf{m} \quad (15)$$

onde γ é um fator de ponderação (atenuação ou amplificação) da solução encontrada $\Delta\mathbf{m}$, e k indica o número de iterações realizadas no processo de inversão.

Resolução

A análise estatística do método é feita através das matrizes Resolução dos Dados, Resolução dos Parâmetros e da Matriz Covariância Unitária. Estas matrizes são entendidas como atributos do método do gradiente de segunda ordem, e envolvem as matrizes do problema, \mathbf{G} , e a inverso generalizado, \mathbf{G}^{-g} (Menke, 2002). Para o problema sobre-determinado se tem que $\mathbf{G}^{-g} = [\mathbf{G}^T\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^T$.

A matriz resolução dos parâmetros é dada por:

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}. \quad (16)$$

A matriz resolução dos dados é dada por:

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{G}\mathbf{G}^{-g}. \quad (17)$$

A matriz covariância unitária é dada por:

$$cov_u(\mathbf{m}) = \sigma^{-2}\mathbf{G}^{-g} [cov(\mathbf{t})] \mathbf{G}^{-gT} = \mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}^{-gT}. \quad (18)$$

FLUXOGRAMA

O fluxograma do programa de computador desenvolvido é resumidamente descrito a seguir:

- 01 - Início
- 02 - Entrada dos parâmetros de controle da inversão.
- 03 - Entrada dos parâmetros do modelo direto para gerar dados reais sintéticos.

- 04 - Entrada dos parâmetros para o modelo inicial.
- 05 - Entrada dos parâmetros da inversão.
- 06 - Início da iterações da Busca Aleatória Controlada.
- 07 - Fim da Busca Aleatória Controlada cuja solução serve como entrada para a otimização pelo gradiente de segunda ordem.
- 08 - Início das iterações.
- 09 - Cálculo do modelo direto.
- 10 - Cálculo do ajuste das curvas e teste para fim das iterações.
- 11 - Derivadas do operador preditivo.
- 12 - Cálculo matricial.
- 13 - Atualização dos parâmetros.
- 14 - Teste de convergência.
- 15 - Retorno a 08.
- 16 - Cálculo da matriz resolução dos parâmetros.
- 17 - Cálculo da matriz resolução dos dados.
- 18 - Cálculo da matriz covariância unitária.
- 19 - Cálculo da matriz quantidade de solução.

RESULTADOS

A busca aleatória controlada se mostrou como forte aliado na estratégia de busca dos 4 parâmetros do operador CRS cujos valores obtidos pela aplicação dos métodos BAC e DSO estão apresentados na Tabela 1, que mostra concordância entre os resultados obtidos.

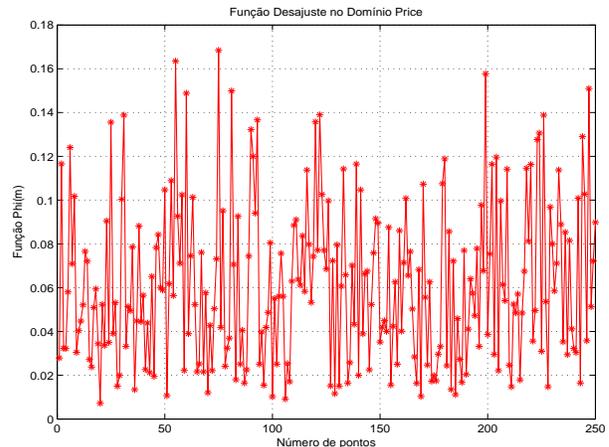


Figura 6: Função aleatória de desajuste inicial no Price.

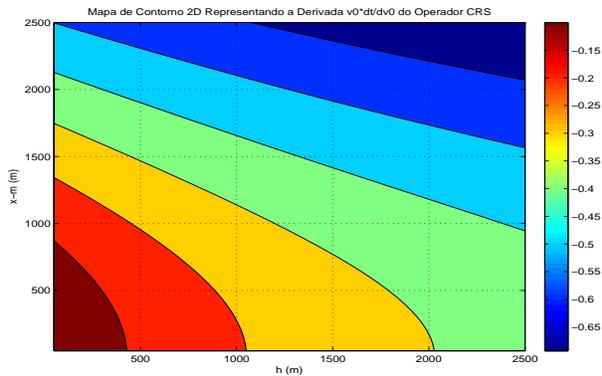


Figura 7: Mapa de contorno da derivada ponderada $v_0 * \partial t(x_m, h; \mathbf{m}) / \partial v_0$ do modelo direto indicando a dependência linear em relação às duas coordenadas x_m e h . Consequentemente, este parâmetro é melhor determinado em seções $h = x_m$.

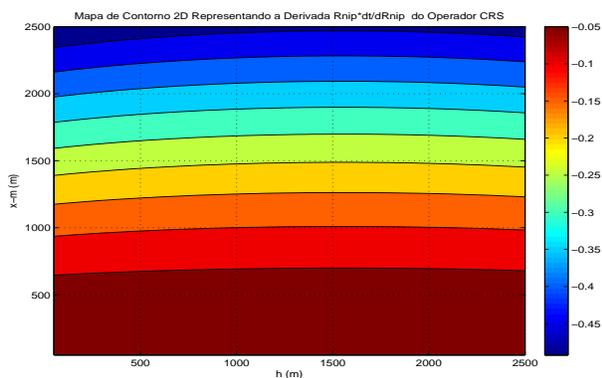


Figura 8: Mapa de contorno da derivada ponderada $R_{NIP} * \partial t(x_m, h; \mathbf{m}) / \partial R_{nip}$ do modelo direto indicando a forte dependência linear em relação à coordenada x_m e constante em relação a h . Consequentemente, este parâmetro é melhor determinado nas seções $h = constante$ (Afastamento-Comum).

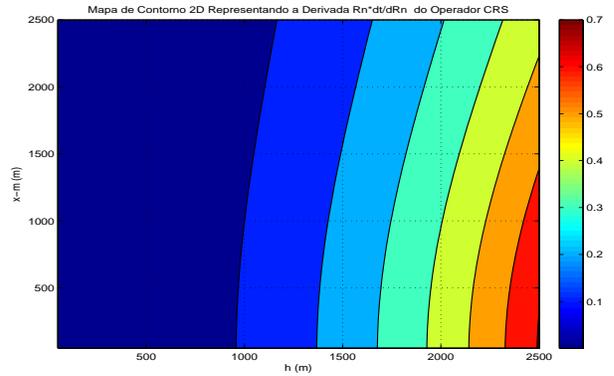


Figura 9: Mapa de contorno da derivada ponderada $R_N * \partial t(x_m, h; \mathbf{m}) / \partial R_n$ do modelo direto indicando a forte dependência linear em relação à coordenada h e quase constante em relação à coordenada x_m . Consequentemente, este parâmetro é melhor determinado nas seções $x_m = constante$ (PMC).

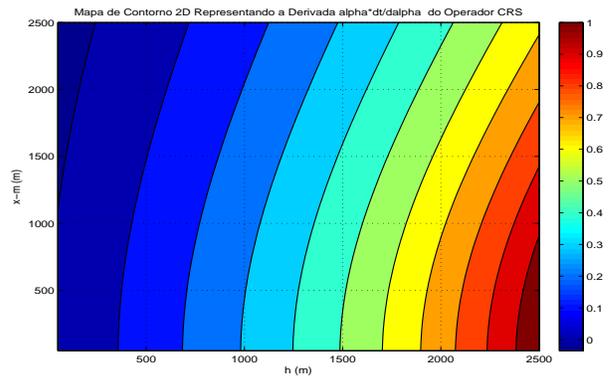


Figura 10: Mapa de contorno da derivada ponderada $\alpha_0 * \partial t(x_m, h; \mathbf{m}) / \partial \alpha_0$ do modelo direto indicando a forte dependência linear em relação à coordenada h e uma fraca dependência linear em relação à coordenada x_m . Consequentemente, este parâmetro é melhor determinado nas seções $x_m = constante$ (PMC).

Tabela 1: Valores dos 4 parâmetros do operador CRS.

Parâmetros	Real	BAC	DSO
v_0 (m/s)	1500	1459	1445
R_{NIP} (m)	5000	5012	5112
R_N (m)	-5000	-4910	-4800
α_0 (radianos)	0,2094	0,2019	0,2186

A Tabela 2 representa a matriz (4X4) da resolução normalizada dos parâmetros, que deveria ter idealmente uma forma diagonal unitária, e mostra um espalhamento fraco.

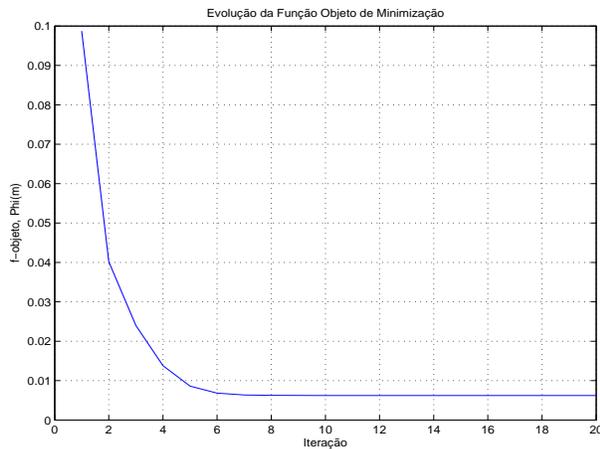


Figura 11: Evolução da função objeto de minimização calculada em 20 iterações mostrando a estabilização do processo a partir aproximadamente da décima iteração.

Tabela 2: Matriz resolução normalizada dos parâmetros.

R_m	v_0	R_{NIP}	R_N	α_0
v_0	1	0.287	-0.173	0.000
R_{NIP}	0.287	1	0.893	0.000
R_N	-0.173	0.893	1	0.000
α_0	0.000	0.000	0.000	1

A Tabela 3 representa a matriz (4X4) da covariância unitária normalizada dos parâmetros, que deveria ter idealmente uma forma diagonal unitária, mas mostra um espalhamento muito forte, o que corresponde a uma correlação indesejável entre os parâmetros. Disto se conclui que alterando um parâmetro os outros também serão alterados.

Tabela 3: Matriz covariância unitária normalizada dos parâmetros.

$cov_u(\mathbf{m})$	v_0	R_{NIP}	R_N	α_0
v_0	1	-0.832	-0.855	-0.362
R_{NIP}	-0.832	1	0.999	0.772
R_N	-0.855	0.999	1	0.750
α_0	-0.362	0.772	0.750	1.0

CONCLUSÃO

O número máximo permitido de iterações no método DSO foi 20, e a evolução da função objeto de minimização é dada pela Figura 11.

Foi estabelecido que a estratégia da solução pelo método BAC é para ser usada como entrada para o método DSO. No entanto, as soluções obtidas foram realizadas para os dois experimentos separadamente para análise.

O operador de empilhamento CRS pode ser analisado

através das derivadas que representam as funções sensibilidade da otimização com relação aos parâmetros, e que são dadas pelas Figuras 7, 8, 9 e 10, representando as derivadas ponderadas segundo a equação (13) e que são dadas em unidades de tempo.

No método de empilhamento CRS, a velocidade v_0 é admitida como fixa, mas ela tem uma representação como mostra o modelo na Figura 2. Em termos práticos ela representaria uma média ao longo da janela de observação, resultante da amostragem nas camadas superiores pelo comprimento de onda dominante do pulso-fonte efetivo.

Partindo da observação do comportamento linear das derivadas na janela espacial (x_m, h) , sendo o desejado uma janela tipo côncava que melhor definisse a resolução dos parâmetros, conclui-se que o operador se apresenta com baixa capacidade de resolução. Sendo assim, se faz necessário um bom ponto de partida para a otimização que busca os 4 (ou mesmo 3) parâmetros $(v_0, R_{NIP}, R_N$ e $\alpha_0)$.

Do ponto de vista da função sensibilidade, seria necessário o emprego de vínculos como condição a priori para o método de otimização dos parâmetros.

Os testes foram realizados para um ponto $P_0(x_0, t_0)$, e o próximo passo é realizar os testes aleatoriamente ao longo de um traço, $(t_0 = 0, t_{total})$, e em seguida sobre todos os pontos médios-comuns $(x_0 = 0, x_{total})$.

Uma vez estabelecidas as propriedades de resolução e sensibilidade da função $t(x_m, h; v_0, R_{NIP}, R_N, \alpha_0)$ a seus parâmetros, um próximo passo seria repetir o experimento com base numa marcação semblance.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à PETROBRAS e à FINEP pelo apoio à pesquisa. O autor W. Vieira agradece à CAPES pela bolsa de estudos. Este trabalho faz parte do INCT-GP.

REFERÊNCIAS

- Brachetii, P., Ciccoli, M. D. F., Pillo, G. D., and Lucidi, S., 1997, A new version of price's algorithm for global optimization.: Journal of Global Optimization, pages 165–184.
- Mann, J., 2002, Extensions and applications of the common-reflection-surface stack method.: Ph.D. thesis, University of Karlsruhe.
- Menke, W., 2002, Geophysical data analysis: discrete inverse theory: Academic Press.
- Price, W., 1983, Global optimization by controlled random search.: Journal of Optimization Theory and Applications, **40**, no. 3, 333–348.